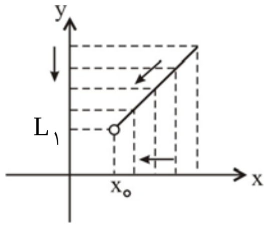
مؤلف: فرهاد حامی

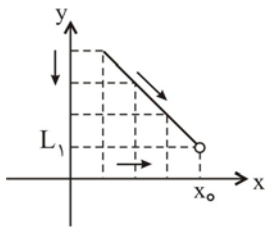
فرض کنید L_1 یک عدد حقیقی باشد:

۱ اگر $f(x)$ در مجاورت x_0 به ازای $x > x_0$ تعریف شده باشد به طوری که وقتی x به x_0 میل می‌کند $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L_1 نزدیک شود، می‌گوییم حد راست $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می‌کند، L_1 است و می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$$

۲ اگر $f(x)$ در مجاورت x_0 به ازای $x < x_0$ تعریف شده باشد به طوری که وقتی x به x_0 میل می‌کند $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L_1 نزدیک شود، می‌گوییم حد چپ $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می‌کند، L_1 است و می‌نویسیم:



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

تعریف حد : $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ است اگر و تنها اگر $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. (هر دو موجود و مساوی باشند.)

قضایای حد (محاسبات حد در نقطه)

قضایای حد در یک نقطه

۱ حد تابع ثابت $f(x) = k$ (k عددی است حقیقی و ثابت) وقتی x به سمت a میل می‌کند همان مقدار ثابت k است. یعنی:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

به عنوان مثال اگر $f(x) = ۴$ آنگاه $\lim_{x \to ۱} f(x) = ۴$ و $\lim_{x \to \sqrt{۲}} f(x) = ۴$.

۲ حد تابع همانی $f(x) = x$ هنگامی که x به سمت x_0 میل می‌کند برابر با x_0 است. یعنی:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0$$

به عنوان مثال $\lim_{x \to ۲} x = ۲$ و $\lim_{x \to \sqrt{۲}} x = \sqrt{۲}$.

۳ اگر دو تابع f و g در نقطه‌ی x_0 حد داشته باشند و $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ آنگاه:

۱) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$ (یعنی حد مجموع دو تابع برابر مجموع حدهای آن‌هاست)

۲) $\lim_{x \to x_0} (f . g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 . L_2$ (یعنی حد حاصل‌ضرب دو تابع برابر حاصل‌ضرب حدهای آن‌هاست)

۳) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2} \ , \ L_2 \neq ۰$

یعنی حد خارج قسمت دو تابع، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج قسمت حدهای آن دو تابع.

➢ **تذکر:** حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آن‌ها.

حد حاصلضرب چند تابع برابر است با حاصلضرب حدهای آن‌ها.

➢ **تذکر:** حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند، برابر است با x_0^n. یعنی:

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

❖ **نتیجه:** حد تابع چند جمله‌ای $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+L$ (n عددی صحیح و مثبت) در نقطه‌ی x_0 مساوی مقدار تابع در آن نقطه است:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

۴ اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ باشد آنگاه:

۱) $\lim_{x\to x_0}(f(x))^n=L^n$ (n صحیح و مثبت) مثال: $\lim_{x\to 1}(3x^2-1)^3=(3-1)^3=8$

۲) $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\begin{cases}\sqrt[n]{L} & , \quad n \text{ فرد}\\ \sqrt[n]{L}\quad (L\geq 0) & , \quad n \text{ زوج}\end{cases}$ مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{0+1}=1$

اما $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}$ وجود ندارد، زیرا دامنه‌ی تعریف تابع $x\geq 1$ است که $x\to 1^-$ درآن وجود ندارد به طوری غیر رسمی این مسأله را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x-1}=\sqrt{1^- -1}=\sqrt{0^-}$$ (رادیکال تعریف نمی‌شود.)

اما $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$ وجود دارد و برابر صفر است.

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=\sqrt{1-1}=\sqrt{0}$$

۵ اگر $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ آنگاه $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|L|$.

۶ حد تابع گویای کسری به صورت $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g دو چندجمله‌ای هستند) در نقطه‌ی $x=x_0$ برابر با مقدار آن در نقطه‌ی x_0 است (به شرط آن که x_0 ریشه‌ی مخرج نباشد.)

به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x-1}{x^3+x}=\frac{2+1-1}{1+1}=1$$

۷ برای محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

۲) $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

۳) $\lim_{x\to x_0\neq k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\tan x_0$

۴) $\lim_{x\to x_0\neq k\pi}\cot x=\cot x_0$

محاسبه‌ی حد چپ و راست

۱- در توابع شامل جزء صحیح

الف- محاسبه‌ی $\lim_{x\to a}[x]$

با توجه به نمودار تابع به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\lim_{x\to a}[x]=\begin{cases}a\notin Z \rightarrow \text{حد}=[a]\\ a\in Z \rightarrow \begin{cases}\text{حد راست}=a\\ \text{حد چپ}=a-1\end{cases}\end{cases}$$

به عنوان مثال $\lim_{x\to \frac{1}{2}}[x]=\left[\frac{1}{2}\right]=0$ و $\lim_{x\to 1^+}[x]=1$ و $\lim_{x\to 1^-}[x]=0$.

ب- استفاده از نقاط نزدیک به نقطه در توابع شامل جزء صحیح

به‌عنوان مثال در محاسبه‌ی $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}[2x]=0$، می‌توانیم از عدد ۰/۴۹ استفاده کنیم و برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}[2x]=1$ می‌توانیم از عدد ۰/۵۱ استفاده کنیم. اما در محاسبه‌ی $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}[2x+0/01]$ اگر عدد را همان ۰/۴۹ در نظر بگیریم، حد تابع صفر درمی‌آید. در حالی‌که حد تابع (۱) است.

۲- در توابع دوضابطه‌ای: به شکل زیر، برای محاسبه‌ی حد راست در a، $(x>a)$، از ضابطه‌ی بالا و برای محاسبه‌ی حد چپ در a، $(x<a)$ از ضابطه‌ی پایین استفاده می‌کنیم:

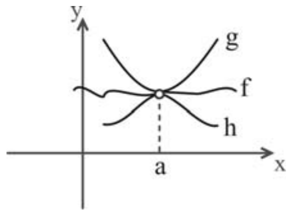
$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & , \quad x>a\\ f_2(x) & , \quad x<a\end{cases}$$

✍ **توجه:** تابع‌های دو ضابطه‌ای به شکل $f(x)=\begin{cases} h(x) & , \quad x>a \\ g(x) & , \quad x<a \end{cases}$ زمانی در $x=a$ حد دارند که در a حد چپ و راست آن‌ها برابر باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$.

قضیه‌ی فشردگی

این قضیه راجع به رفتار حدی تابعی است که بین دو تابع دیگر، که هر دو در یک نقطه داده شده حد مساوی دارند، قرار دارد.

قضیه هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (جز احتمالاً در خود a)، $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و نیز $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$



■ **مثال:** نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

◀ **حل:** از آنجایی‌که $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$، برای مقدارهای مثبت x داریم $-x\le x\sin\frac{1}{x}\le x$ و برای مقدارهای منفی x، $x\le x\sin\frac{1}{x}\le -x$، حد توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در $x=0$ برابر صفر است، پس $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ است.

قضیه‌ی کران‌داری

اگر $g(x)$ تابعی کران‌دار در همسایگی محذوف a باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$ است.

رفع ابهام $\frac{0}{0}$
- حذف عامل صفر شونده
- قاعده‌ی هوپیتال (خارج کتاب درسی)

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری

در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، آنگاه از قضیه‌ی حدی و جای‌گذاری مستقیم برای محاسبه‌ی حد، نمی‌توانیم استفاده کنیم زیرا با جانشینی مستقیم، به کسر بی‌معنی $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، این نوع عبارت‌ها را صورت *مبهم* می‌نامیم. وقتی در محاسبه‌ی یک حد به این صورت برمی‌خورید، به یاد داشته باشید که باید کسر را طوری بنویسید که مخرج یا صورت کسر جدید، حد صفر نداشته باشد، برای رسیدن به این هدف از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم.

حذف عوامل صفر شونده از صورت و مخرج

اگر صورت و مخرج، دو چندجمله‌ای باشند، آنگاه آن‌ها را به عوامل اول تجزیه کرده و با حذف عامل صفر شونده‌ی یکسان از صورت و مخرج، حد تابع را می‌یابیم، دقت کنید که در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، $(x-a)$ را *عامل صفرشونده* گوییم.

■ **مثال:** حاصل $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}$ را بیابید.

◀ **حل:**

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x-2)(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-2)=-5$$

➢ **تذکر (۱):** در صورتی که صورت و مخرج یا هر دو، از عبارت‌های اصم (گنگ) تشکیل شده باشند، آن‌ها را گویا می‌کنیم و سپس حد را با حذف عامل صفرشونده‌ی یکسان می‌یابیم.

■ **مثال:** حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ را بیابید.

◀ **حل:** صورت کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}$$

➢ **تذکر (۲):** در بعضی از موارد با انتقال حد به نقطه‌ی صفر می‌توانیم مسأله را راحت‌تر حل کنیم، در این حالت برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x-a=t$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

■ **مثال:** حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+(x-1)^2}{\sqrt[3]{x-1}+(x-1)^3}$ را بیابید.

◀ **حل:** با فرض $x-1=t$ داریم:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t}+t^2}{\sqrt[3]{t}+t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t}(1+t\sqrt[3]{t^2})}{\sqrt[3]{t}(1+t^2\sqrt[3]{t^2})}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

➢ **تذکر (۳):** دررفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$، باید قدر مطلق را در مجاورت نقطه‌ی $x=a$ تعیین علامت و جزء صحیح را در آن نقطه تعیین مقدار کنیم.

■ **مثال:** حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{|2-x|[x]}{|x|-2}$ را بیابید.

◀ **حل:** وقتی $2<x<3$، آنگاه $[x]=2$ و $|2-x|=x-2$ و $|x|=x$ ، پس:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(2)}{x-2}=2$$

(قاعده هوپیتال) خارج کتاب درسی یکی از روش های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ استفاده از قاعده‌ی هوپیتال است در این حالت از صورت و مخرج به طور جداگانه مشتق گرفته تا به کسر جدیدی برسیم و سپس از آن حد می‌گیریم.

توجه: به طور غیر رسمی در رفع ابهام $\frac{0}{0}$، هوپیتال یک تابع کسری، کسری است که صورت آن مشتق صورت و مخرج آن مشتق مخرج است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

➢ **تذکر (۴):** به جدول مشتق توابع توجه کنید:

	تابع	مشتق	مثال
۱	$y=u^n$	$y'=nu'\times u^{n-1}$	$y=(x^2+x)^3\to y'=3(2x+1)(x^2+x)^2$
۲	$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^3+5}\to y'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$
۳	$y=\sqrt[m]{u}$	$y'=\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y=\sqrt[3]{x^2+x}\to y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}$
۴	$y=\frac{au+b}{cu+d}$	$y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$	$y=\frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+5}\to y'=\frac{5-6}{(3\sqrt{x}+5)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$
۵	$y=\sin u$	$y'=u'\times\cos u$	$y=\sin(x^2+1)\to y'=2x\cos(x^2+1)$
۶	$y=\cos u$	$y'=-u'\times\sin u$	$y=\cos\sqrt{x}\to y'=\frac{-1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$
۷	$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)$	$y=\tan(\sin x)\to y'=\cos x(1+\tan^2(\sin x))$
۸	$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)$	$y=\cot(x^2-1)\to y'=-2x(1+\cot^2(x^2-1))$

مثال: حدود زیر را بیابید:

$$(1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x^3+1}\overset{H}{=}\lim_{x\to -1}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3x^2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

$$(۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۴)\sqrt{x^۲+x+۱}}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۴)\sqrt{۷}}{x^۳-۸}\overset{H}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(۲x)\sqrt{۷}}{۳x^۲}=\frac{۴\sqrt{۷}}{۱۲}$$

رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ — استفاده از هم‌ارزی‌ها

در محاسبه‌ی $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$، که ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد نمی‌توانیم با ساده‌سازی معمولی حد را بیابیم، برای محاسبه‌ی حد این تابع با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، دایره‌ی مثلثاتی، مساحت قطاع و مثلث، می‌توان ثابت کرد که برای هر x در بازه‌ی $\left(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right)$، نامساوی $\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le ۱$ برقرار است و از آنجا بر طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ و در نتیجه $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$ است.

در محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی داریم:
$(۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ $(۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$

تعریف دو تابع هم ارز: دو تابع f و g را وقتی $x\to a$ هم‌ارز گویند هرگاه:

$$\lim_{x\to a}f(x)=۰\quad و\quad \lim_{x\to a}g(x)=۰\quad و\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=۱$$

به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x$ در $x=۰$ هم‌ارزند زیرا $\lim_{x\to ۰}x=۰$، $\lim_{x\to ۰}\sin x=۰$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$.

هم‌ارزی‌های مثلثاتی

به هم‌ارزی‌های مهم زیر توجه کنید:
$(۱)\ \sin ax\underset{x\to ۰}{\approx} ax$ $(۲)\ \tan ax\underset{x\to ۰}{\approx} ax$ $(۳)\ \sin u\underset{u\to ۰}{\approx} u$
$(۴)\ \tan u\underset{u\to ۰}{\approx} u$ $(۵)\ ۱-\cos u\underset{u\to ۰}{\approx}\frac{u^۲}{۲}$

■ **مثال:** حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۱۲}}\frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})}{\tan(x-\frac{\pi}{۱۲})}$ را بیابید.

◄ **حل:** از آنجا که $۲x-\frac{\pi}{۶}$ و $x-\frac{\pi}{۱۲}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{۱۲}$ هر دو به صفر میل می‌کنند و ابهام از نوع $\frac{۰}{۰}$ است، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۱۲}}\frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۶})}{\tan(x-\frac{\pi}{۱۲})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۱۲}}\frac{۲(x-\frac{\pi}{۱۲})}{x-\frac{\pi}{۱۲}}=۲$$

توابع جبری

حد یک چندجمله‌ای وقتی $x\to ۰$ برابر حد کوچک‌ترین درجه‌ی آن چند جمله‌ای است.

$$(۱)\ x^۳-x^۲-۲x\underset{x\to ۰}{\approx}-۲x\qquad (۲)\ x+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x}\underset{x\to ۰^+}{\approx}\sqrt[۴]{x}$$

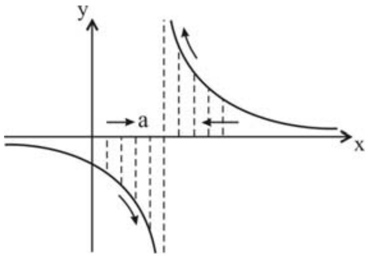
به عنوان مثال:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-x}{\sqrt[۳]{x}+۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x}}=۱$$

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت — قضیه‌ها و محاسبات

حد بی‌نهایت

اگر f را تابعی فرض کنیم که نمودارش در شکل زیر رسم شده است، وقتی x از راست به a میل می‌کند، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود، لذا به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نمی‌کند، در نتیجه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ وجود ندارد و می‌نویسیم:



$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad (۱)$$

دقت کنید که نماد ∞ نشانگر این نوع رفتار تابع است و عدد حقیقی نیست.

وقتی x از سمت چپ a به a میل می‌کند، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی در جهت منفی، کوچک و کوچک‌تر می‌شود، لـذا بـه هـیچ عـدد متنـاهی ثابتی میل نمی‌کند، پس $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ نیز وجود ندارد و در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad (۲)$$

❖ **نتیجه:** به حدود زیر توجه کنید: « n عددی طبیعی است»

اگر n زوج باشد: ۲) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{۱}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & x\to a^+ \\ +\infty & x\to a^- \end{cases}$

اگر n فرد باشد: ۱) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{۱}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & x\to a^+ \\ -\infty & x\to a^- \end{cases}$

به عنوان مثال:

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۱}{(x-۱)^۳} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty$ و ۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۱}{(x-۱)^۳} = \dfrac{۱}{۰^-} = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۱}{(x-۱)^۲} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty$ و ۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۱}{(x-۱)^۲} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty$

و به طور کلی:

هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ۰$ و همواره $f(x) > ۰$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند)، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{۱}{f(x)} = +\infty$

هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ۰$ و همواره $f(x) < ۰$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند)، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{۱}{f(x)} = -\infty$

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

رفع ابهام‌ها $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

حد در بی‌نهایت

تابع f را که برای هر $x > x_۰$ تعریف شده است در نظر بگیرید. اگر بخواهیم x بدون هیچ محدودیتی افزایش یابد، در ایـن صـورت مـی‌نویسـیم $x \to +\infty$ (بخوانید x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند) و اگر تابع f به ازای هر $x < x_۰$ تعریف شـده باشـد، اگـر بخـواهیم x بـدون هـیچ محدودیتی کاهش یابد می‌نویسیم $x \to -\infty$ (بخوانید x به سمت منهای بی‌نهایت میل می‌کند)، در این صورت $f(x)$ به عدد L یا $+\infty$ یـا $-\infty$ میل می‌نماید.

چند قضیه در محاسبات حد در بی‌نهایت:

۱- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

مثال : $\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})=2+0+0=2$

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{5x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3-\frac{1}{x})}{x(5+\frac{2}{x})}=\frac{3-0}{5+0}=\frac{3}{5}$

۲- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

الف – اگر n زوج باشد $\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$.

ب – اگر n فرد باشد $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$.

توجه: برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$ ، با توجه به علامت a $(a\neq 0)$ و زوج یا فرد بودن n، می‌توانیم حد را بیابیم.

۳- در محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ خواهیم داشت: (n عددی صحیح و مثبت است)

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+...+L)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n(1+\frac{b}{ax}+...+\frac{L}{ax^n})$$

چون حد $\frac{b}{ax}$ و ... تا $\frac{L}{ax^n}$ وقتی $x\to\pm\infty$ صفر است پس:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+...+L)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

یعنی حد چندجمله‌ای وقتی $x\to\pm\infty$، مساوی حد جمله‌ای است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

به عنوان مثال: $\lim_{x\to-\infty}(3x^3-x^2+2)=\lim_{x\to-\infty}3x^3=-\infty$

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

الف) برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند، وقتی $x\to\pm\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+c'x^{n-2}+\cdots}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m}{a'x^n}$$

برای محاسبه‌ی حد این کسر وقتی $x\to\pm\infty$ خواهیم داشت:

$1)\ m<n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ — مثال : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{3x^2+2}=0$

$2)\ m=n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{a'}$ — مثال : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+5}{3x+7}=\frac{2}{3}$

$3)\ m>n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ یا $-\infty$ یا $\pm\infty$ — مثال : $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{x^2+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=-\infty$

ب) در توابع رادیکالی با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\sqrt{x^2+ax+b}=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+b}$$

چون $x\to\pm\infty$ پس عبارت هم ارز آن برابر است با:

$$\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+b}\ \simeq\ \left|x+\frac{a}{2}\right|$$

لذا می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$1)\ \sqrt{x^2+a}\underset{x\to\pm\infty}{\simeq}|x|$

$2)\ \sqrt{x^2+ax+b}\underset{x\to\pm\infty}{\simeq}\left|x+\frac{a}{2}\right|$

$3)\ \sqrt{ax^2+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\simeq}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|,\ a>0$

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+1}}{x+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+|x|}{x+|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\left|x+\frac{1}{2}\right|}{\left|x+\frac{1}{2}\right|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}=4$

پیوستگی در نقطه

پیوستگی در نقطه

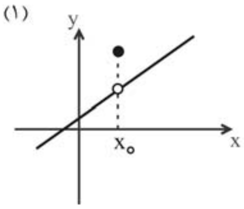
تعریف: تابع f که در بازه‌ی I تعریف شده است در نقطه‌ی x_0 از دامنه‌ی آن را پیوسته گویند، هرگاه:

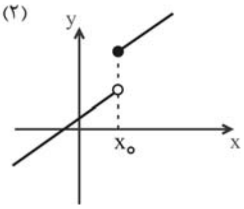
۱- تابع در $x=x_0$ حد داشته باشد.

۲- حد تابع در $x=x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0)=f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه‌ی آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد، در آن نقطه ناپیوسته است.





در شکل (۱)، حد تابع در x_0 وجود دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست و در شکل (۲) تابع در x_0 حد ندارد، پس هر دو شکل نمایش تابعی ناپیوسته در x_0 خواهند بود.

نکته
برای تابع $f(x)=[ax]$ در x_0 دو حالت در نظر می‌گیریم:
الف- اگر $ax_0=k\notin Z$، تابع در x_0 پیوسته است.
ب- اگر $ax_0=k\in Z$، تابع در x_0 ناپیوسته است.