فصل دوم  تابع

تعریف : به هر دوتایی(a,b)  که ترتیب نوشتن در آن مهم باشد یعنی  (a,b)≠(b,a)زوج مرتب گوییم، که درآن aرا مؤلفه ی اول  b مؤلفه ی دوم گوییم.

**تصاوی دو زوج مرتب:** دو زوج مرتب وقتی باهم مساویند که مؤلفه ی اول با هم و مؤلفه های دوم با هم مساوی باشند.
$$(\mathrm{a},\mathrm{b}) = (\mathrm{c},\mathrm{d}) \rightarrow \begin{cases} a = c \\ \mathrm{b} = \mathrm{d} \end{cases}$$

**مثال:**  y,uرا طوری تعیین کنید که دو زوج  (3,y+3)و(x-3,4) با هم برابر باشند.

**توجه:** هر زوج مرتب می توانند بیانگر یک نقطه در صفحه ی مختصات باشند که طول نقطه ی مؤلفه ی اول(x) و مؤلفه ی دوم آن عرض نقطه (y) را نشان می دهند.

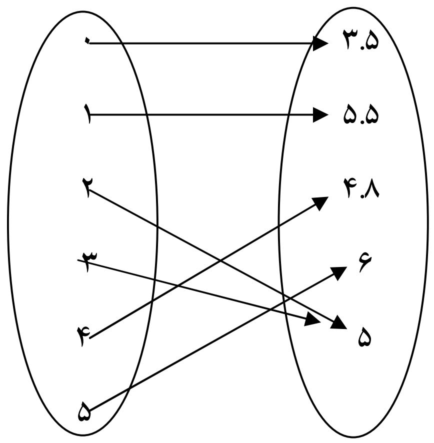
**رابطه:** به مجموعه ای از زوج های مرتب یک رابطه گوییم.

**مثال:** جدول زیر رابطه ی بیان وزن یک کودک خواص را از هنگام تولد تا ۵ ماهگی نشان می دهد .این رابطـه بـه بصو رت زوج مرتب بنویسید.

| سن | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| وزن | ۳.۵ | ۵.۵ | ۵ | ۵ | ۴.۸ | ۶ |

**نمایش رابطه به  کمک نمودار  ون:** اگر برای نشان دادن ارتباط بین دو مجموعه هر عضو مجموعه ی اول را با یک پیکان بر هر عضو متناظر آن در مجموعه ی دوم وصل کنیم  اینگو نمایش رابطه بین دو مجمو عه را نمودار ون گوییم.

**مثال:** رابطه ی مثال قبل رل به کمک نمودار ون نمایش دهید.




**تابع:** رابطه ی است از مجموعه ی A به مجموعه B که در آن به هر عضو از A ، دقیقاً یک عضو از B نظیر شود.

## نحوه ی تشخیص توابع:

**الف:** در زوج های مرتب : مؤلفه های اول یکسان نداشته باشد در صورت یکسان بودن مؤلفه های اول مؤلفه های دوم نیز یکسان باشد.

**ب:** در جدول برای یکx دو جواب yنداشته باشیم.

**ج:** در نمودار ون از مؤلفه های اول مجموعه های اول ۲ پیکان خارج نشود.

### در نمودار

**د:** یک نمودار زمانی، نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. یابه عبارتی ، این خط یا نمودار را قطع نکند یا اگر قطع می کند فقط در یک نقطه قطع کند.

**مثال:** در هر قسمت تابع بودن یا نبودن آن را تعیین کنید.

ب) { (۲و۴) و(۵و۳) و(۲و۳) }

الف) { (۴و۲) و(۵و۳) و(۴و۱) و(۵و۳) }

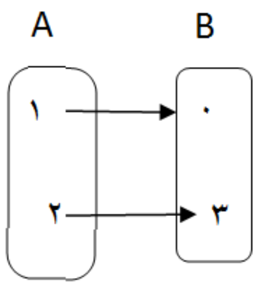
د )

| زمان | ۰ | ۲ | ۳ | ۵ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| وزن | ۰ | ۳ | ۱ | ۶ |

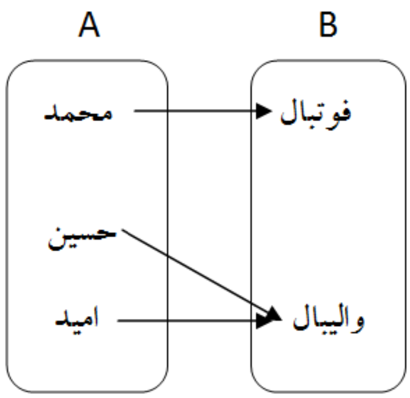
ج)

| X | 1 | 2 | 3 | 1 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| y | 5 | 6 | 5 | 7 |

و)



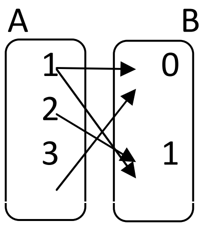

ه)




ح) {(۶و۵) و(۷و۲) و(۷و۱)}

ز) {(۶و۷) و(۱و۳) و(۲و۵) و(۱و۴)}

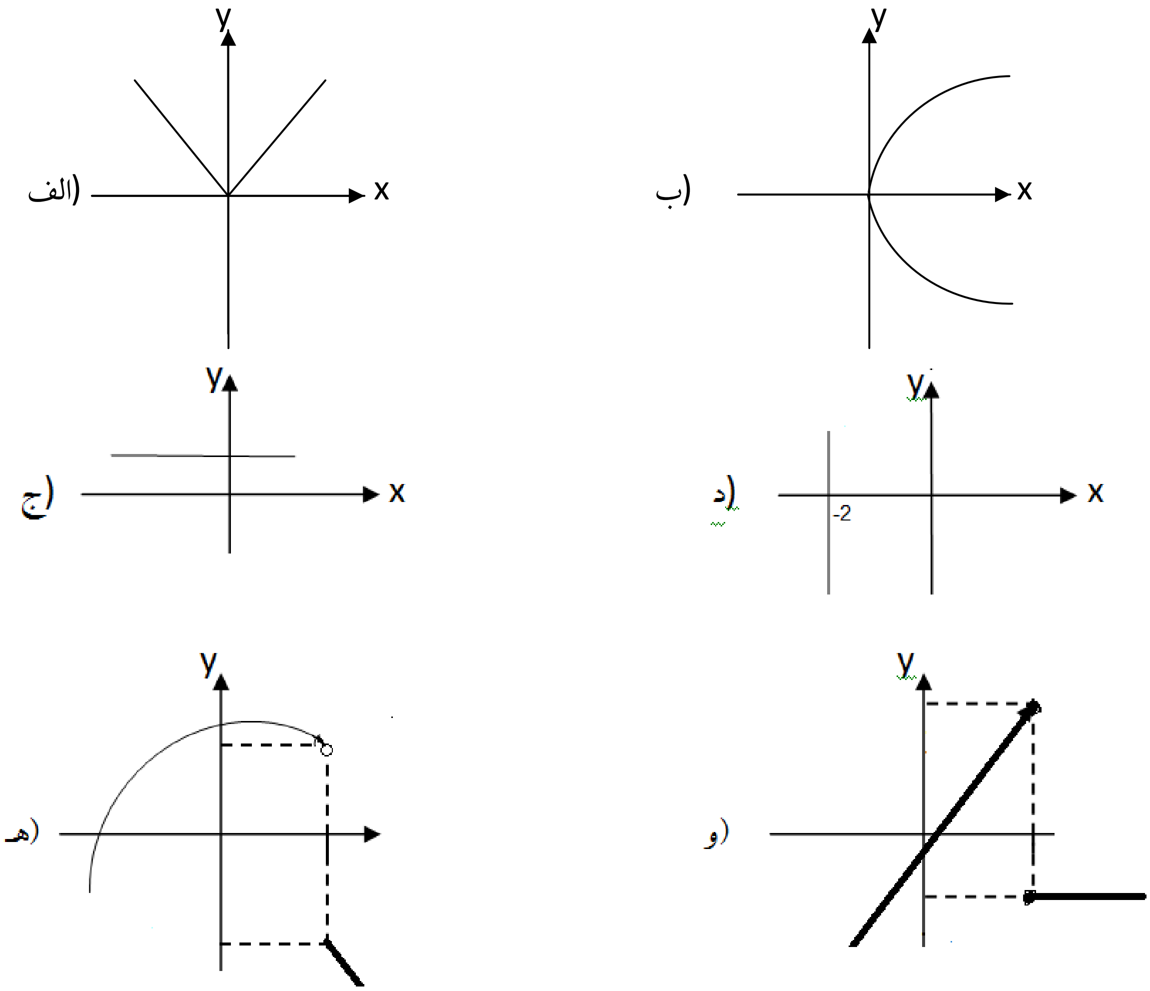
ی)




ط)

| x | ۲ | ۸ | ۷ | ۴ | ۸ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y | ۲ | ۷ | ۷ | ۹ | ۴ |

**مثال :** تعیین کنید کدام یک از نمودارهای زیر نمودار تابع است؟




**دامنه وبرد توابع:** مجموعه ی همه ی مؤلفه های اول نمایش یک تابع را دامنه و مجموعه همه ی مؤلفه های دوم را برد گوییم.

**نحوه تشخیص دامنه وبرد در نمودار :** سایه نمودار روی محور x ها را دامنه وسایه نمودار روی محور yرا برد می گوییم.

**مثال:** در هر یک از مثال های قبل دامنه و برد را تعیین کنید.

**توابع خطی:** معمولاً رابطه ها را با حروفی مانند T,S,R و ... و توابع را با حروفی مانند : F،y،h و ... نام گذاری می کنیم.

**یادآوری :** هر رابطه ی بین x و y که بتوان آن را به صورت y=ax+b نمایش داد رابطه ی خطی می نامیم. در رابطه ی y=ax+b ، a همان شیب بوده (m) و b عرض از مبدأ است ، برای مشخص شدن خطی بودن تابع کافی است معادله ی آنرا بدست آورید که همان طور که در سال گذشته گفته شده به صورت زیر است.

معدله خط

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

البته نمودار یک رابطه ی خطی در دستگاه مختصات به شکل یک خط راست می باشد .( یعنی شیب تمام نقاط یکسان است)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب

**مثال:** مشخص کنید کدام یک از روابط زیر تابع خطی است؟

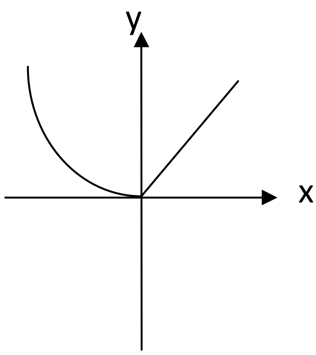
الف)

| X | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | ۰ | ۵ | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ |

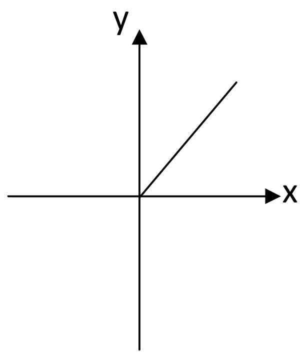
ب)

| X | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| y | ۱ | ۱ | ۴ | ۹ |

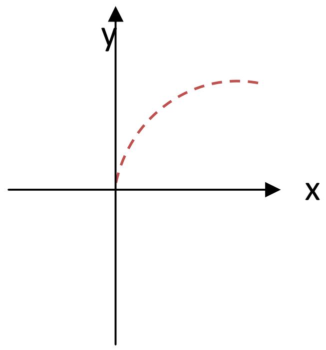
ج)



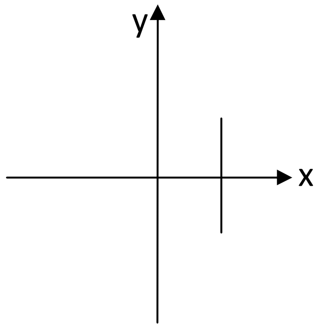

د)



هـ)




و)




**وارون یک رابطه:** برای بدست آوردن وارون یک رابطه کافی است جایه مؤلفه های اول و دوم را عوض کنیم که در این صورت جایه دامنه و برد و نیز عوض خواهد شد.

**مثال :** در هریک از روابط های زیر وارونه آن ها را نبویسید سپس دامنه و برد را نیز را تعیین کنید .

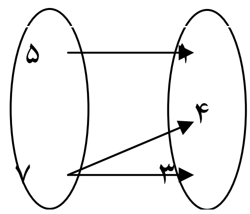
الف) $A = \{(5,2), (2,3), (1,5), (3,7)\}$

ب) $B = \{(1,2), (2,5), (,3,2)\}$

ج)

| X | -۱ | ۰ | ۲ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| y | ۵ | ۶ | ۷ | ۵ |

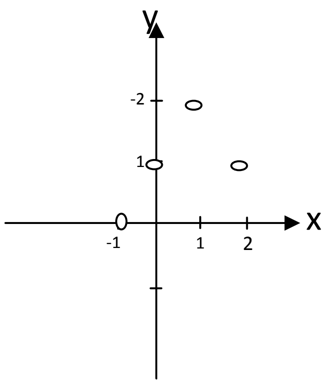
و)



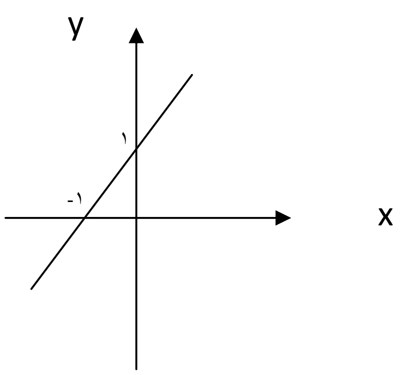

د)

| X | ۲ | ۵ | ۵ |
|---|---|---|---|
| y | ۴ | ۳ | ۷ |

ز)




ح)

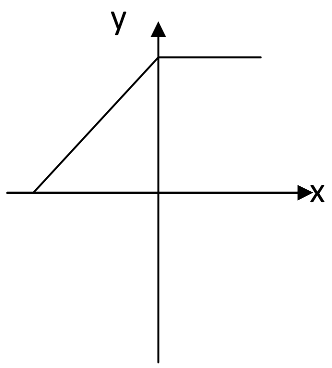


**نکته :** در حالتی که رابطه به صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد با پیدا کردن قرینه ی هر نقطه از نمودار نسبت به خط y=x (نیم ساز ناحیه ی اول و سوم) نمودار وارون آن رابطه بدست می آید یعنی :

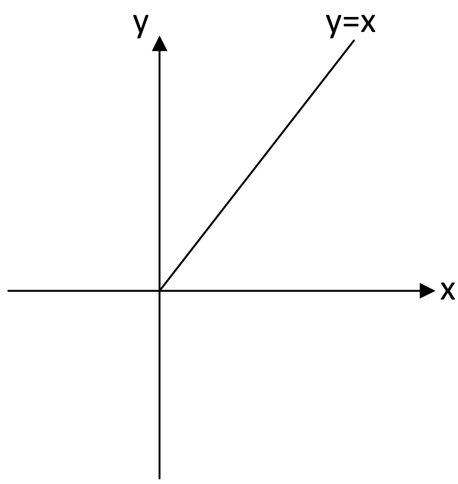
$$(x_0, y_0) \xrightarrow[y=x]{\text{نسبت قرینه}} (y_0, x_0)$$

**مثال :** وارون رابطه ی f را در هر قسمت بدست آورید.

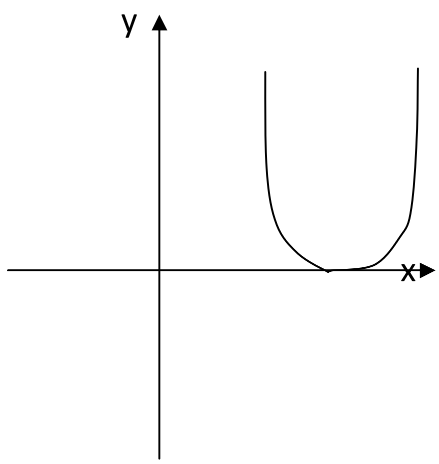
الف)




ب)




ج)




– حال با توجه به اینکه تابع نیز یک نوع رابطه است پس می توانیم وارون یک تابع رانیز بدست آوریم.

*اگر وارون یک تابع نیز تابع باشد آن راتابع وارون می نامیم که در این صورت می گوییم تابع وارون پذیر یابه عبارتی معکوس پذیر است وتابع وارون f را با $f^{-1}$ نمایش می دهیم.

**مثال :** در دو مثال قبل تابع های وارون پذیر را مشخص کنید سپس شرط وارون پذیری توابع را حدس بزنید.

**توابع یک به یک:** با فرض اینکه تابع f بین دو مجموعه تعریف شده باشد هنگامی یک به یک است که به هر عضو مجموعه ی دوم بیش از یک عضو از مجموعه ی اول نظیر نشود. *یا به عبارتی هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه ی دوم یکسان نباشد ودر صورت یکسان بودن ، مؤلفه های اول نیز یکسان باشند.

**نکته:** نمودار یک تابع هنگامی یک است که هر خط موازی محور x نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

**مثال :** بررسی کنید که کدام یک از موارد زیر تابع یک به یک است .

الف)

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| y | -۱ | -۱ | ۱ |

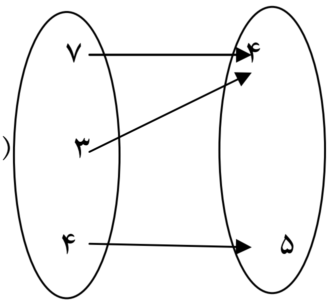
ب)

| X | 5 | 7 | 6 |
|---|---|---|---|
| y | 1 | 2 | 7 |

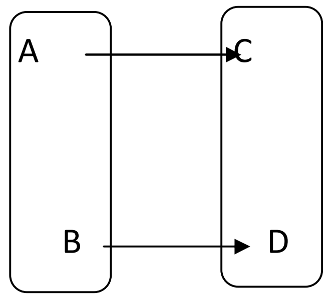
ج) $\{(1,2),(3,5),(2,3)\}$

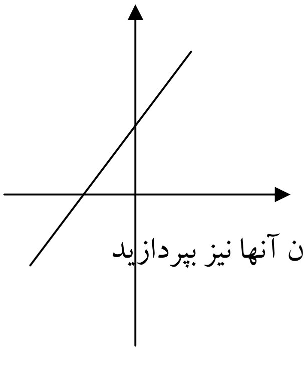
د) $\{(1,2),(6,2),(7,3)\}$

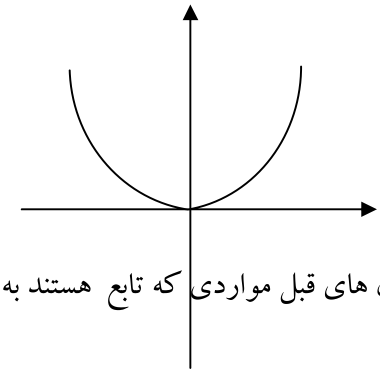
هـ)




و)



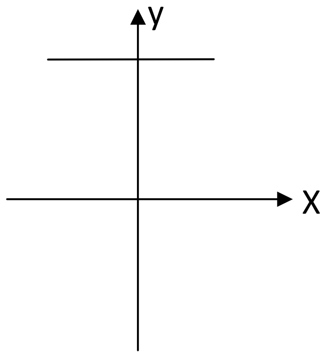





**مثال :** در مثال های قبل مواردی که تابع هستند به بررسی یک به یک بودن آنها نیز بپردازید

**نکات :** تابع f را وارون پذیر گوییم به شرطی که f یک به یک باشد در این صورت وارون f نیز وارون پذیر خواهد بود.

**نکته ی ۲ :** تمام توابع خطی یک به یک ودر نتیجه وارون پذیرند.( به شرطی که m≠0 باشد(شیب مخالف صفر باشد)).




**مثال :** تابع زیر را در نظر بگیرید.

| X | 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| y | ۵ | ۸ | ۱۱ | ۱۷ |

الف) آیا این تابع یک به یک است معادله ای برای آن بنویسید.

ب) وارون این تابع را بدست آورید ، معادله ای برای وارون آن بنویسید.

**مثال :** آیا تابعی بامعادله ی $y = \frac{3}{2}x + 5$ وارون پذیر است؟ در صورت معکوس پذیری معادله ای برای وارون آن بنویسید . *چون معادله ی داده شده از فرم کلی معادله ی خط (تابع خطی) پیروی می کند

( $y = ax + b$ که در آن $b = 0, a = \frac{3}{2}$ است) وشیب آن نیز غیر صفر است در نتیجه یک به یک وارون پذیر خواهد بود.

**نکته :** برای حل معادلات رادیکالی کافی است طرفین معادله را به توان فرجه ی رادیکال مجهول برسانیم .

**بازه( فاصله) :** اگر aو b دو عدد حقیقی و a کوچکتر از b باشد حالات زیر را داریم

۱- تمام اعداد حقیقی بین این دو عدد که آن را بازه ی باز aوb می خوانیم.

$$(a,b)=\left\{ X \mid X \in R\ , a < x < b \right\}$$

۲- تمام اعداد حقیقی بین دو عدد به همراه خود این دو عدد را که به صورت زیر نمایش می دهیم وبازه ی بسته ی aوb می نمایم.

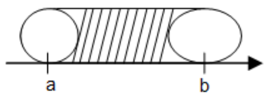
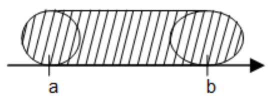
$$[a,b]=\left\{ X \mid X \in R\ , a \leq x \leq b \right\}$$

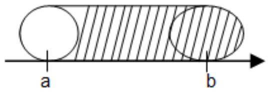
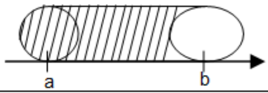
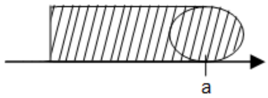
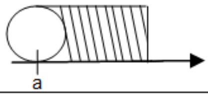
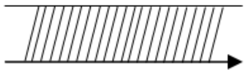
۳- تمام اعداد حقیقی بین این دو عدد به همراه یکی از این دو عدد که آنها را بازه ی نیمه می نمامیم.

$$[a,b)=\left\{ X \mid X \in R, a \leq X < b \right\}$$

$$(a,b]=\left\{ X \mid X \in R, a < X \leq b \right\}$$

**نکته :** به طور خلاصه روابط برخی بازه ها را با فرض a <b می توان به صورت زیر نوشت

| نمایش هندسه | نمایش مجموعه ای | نمایش بازه ای | نوع بازه |
|---|---|---|---|
|   | $\{X \mid X \in R, a < X < b\}$ | $(a,b)$ | باز |
|   | $\{X \mid X \in R, a \leq X \leq b\}$ | $[a,b]$ | بسته |

| | | | |
|---|---|---|---|
| نیم باز | (a,b] | $\{X \ \vert X \in R, a < X \leq b\}$ |  |
| نیم باز | [a,b) | $\{X \ \vert X \in R, a \leq X < b\}$ |  |
| نیم باز | $(-\infty, a]$ | $\{X \ \vert X \in R, x \leq a\}$ |  |
| باز | $(a, +\infty)$ | $\{x \vert x \in R,\ x > \alpha\}$ |  |
| باز | $(-\infty, +\infty)$ | $\{x \vert x \in R\}$ |  |

**مثال :** مراجعه به تمرین در کلاس صفحه ۴۷ سوال ۲

**نمایش تابع و ضابطه ی تابع:** مراجعه به ۴۹ تا ۵۹

با تشکراز دبیر مربوطه : آقای حسام قاضی