

فصل اول: الگو و دنباله

یادآوری:

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

دنباله: هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد نامیده می‌شود و به هر عدد که در دنباله قرار گرفته است یک جمله آن دنباله می‌گوییم و به جمله n ام یک دنباله عمومی دنباله می‌گوییم و با نماد a_n یا t_n نشان می‌دهیم.

الگو یابی: در برخی دنباله‌ها الگویی وجود دارد که به وسیله‌ی این الگومیتوانیم جملات بعدین دنباله را حدس بزنیم
مثال:

1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

2) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

مثال: الگوی دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $3, 6, 9, 12, \dots$ ب) $1, 3, 5, \dots$

ج) $2, 4, 8, 16, \dots$ د) $1, 4, 9, 16, \dots$

مثال: سه جمله اول هر دنباله را بنویسید.

الف) $\frac{2n+3}{n+2}$

ب) $2n^2 - 1$

ج) $\frac{3n-1}{n}$

دنباله حسابی:

دنباله‌ای که هر جمله آن (غیر از جمله اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله قبل از خود بدست آید که به این مقدار ثابت قدر نسبت گفته و با نماد d نشان می‌دهیم و معمولا جمله اول هر دنباله را با a یا a_1 نشان می‌دهیم.

مثال ۱: بررسی کنید کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله حسابی است؟

الف) $2, 5, 8, 10, \dots$ ب) $4, 8, 16, \dots$

ج) $4, 10, 16, \dots$

د) $6, 2, -2, \dots$

نکته: قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی رامی‌توان از تفاضل دو جمله‌ی متوالی بدست آورد که این قدرنسبت میتواند مثبت یا منفی باشد

- با فرض این که جمله اول دنباله را با a_1 نشان دهیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی در حالت کلی به صورت زیر است

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: جمله عمومی دنباله‌های حسابی مثال ۱ را بدست آورید

الف) $4, 10, 16, \dots$

ب) $6, 2, -2, \dots$

مثال: دنباله های زیر چنانچه دنباله حسابی هستند جمله عمومی آن ها را بدست آورید، سپس جمله دهم آنرا بدست آورید

الف) $1, 4, 7, 10, \dots$ ب) $-1, 1, 3, 5, \dots$

مثال: جمله ی اول یک دنباله ی حسابی ۳ و قدرنسبت آن ۱۱ است جمله ی چندم آن ۱۰۲ است؟

نکته: در تصاعد حسابی برای بدست آوردن قدر نسبت می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad (n > m)$$

مثال: در یک دنباله حسابی جمله نهم ۱۹ و جمله سیزدهم آن ۲۷ است، قدر نسبت این دنباله را بدست آورید

مثال ۲: اگر جمله ی هفتم یک دنباله ی حسابی ۱۵ و جمله ی سیزدهم آن ۲۷ باشد جمله ی دهم این دنباله را بدست آورید

مثال: بین دو عدد ۳- و ۱۷ چهار عدد چنان درج کنید که اعداد حاصل تشکیل دنباله ی حسابی بدهند

نکته: اگر X, Y, Z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه Y را واسطه

$$Y = \frac{X+Z}{2}$$

حسابی X, Z گوئیم و داریم بیان شده حل کنید.

مثال: اگر ۱ و X و ۵ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند مقدار X را بدست آورید

دنباله ی هندسی:

دنباله هایی که هر جمله ی آن (غیر از جمله ی اول) با ضرب یک عدد ثابت در جمله ی قبل از خود به دست می آیند که این عدد ثابت را قدرنسبت گفته و بانماد q نمایش می دهیم

مثال: بررسی کنید کدام یک از دنباله های زیر دنباله ی هندسی است

۱) $2, 10, 50, 250, \dots$ ۲) $-1, 3, 5, 7, \dots$ ۳) $-4, 8, -16, 32, \dots$

۴) $3, 6, 9, \dots$ ۵) $250, 50, 10, 2, \frac{2}{5}, \dots$

نکته: برای بدست آوردن قدرنسبت دنباله ی هندسی میتوان هر جمله را بر جمله ی قبلیش تقسیم کرد

- با فرض اینکه جمله ی اول دنباله ی هندسی را a_1 نشان دهیم جمله ی عمومی دنباله ی هندسی به صورت زیر نشان میدهیم

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

مثال: جمله ی عمومی دنباله های هندسی مثال قبل را بدست آورید

1) $2, 10, 50, 250, \dots$ 2) $-4, 8, -16, 32, \dots$

3) $250, 50, 10, 2, \frac{2}{5}, \dots$

مثال: دنباله های زیر چنانچه دنباله ی هندسی باشند جمله ی عمومی آنها را به دست آورید و سپس جمله ی هشتم آنها را بدست آورید

۱) $2, 6, 18, \dots$ ۲) $3, 6, 12, \dots$ ۳) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$

4) $13, 15, 17, 20, \dots$ ۵) $1, \sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \dots$

مثال: جمله ی اول یک دنباله ی هندسی ۲ و قدر نسبت آن ۳ است جمله ی چندم آن ۵۴ است

مثال: در یک تصاعد هندسی جمله ی سوم ۲۰- و جمله ی پنجم آن ۸۰- است جمله ی عمومی این دنباله را بدست آورید

نکته: در دنباله ی هندسی برای به دست آوردن قدر نسبت می توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \quad (n > m)$$

مثال: مثال قبل را به کمک نکته ی بیان شده حل کنید

مثال: بین دو عدد ۲ و ۶۲ سه عدد را طوری درج کنید که اعداد حاصل تشکیل دنباله ی هندسی بدهند

مثال ۳: اگر جمله ی سوم یک دنباله ی هندسی ۱۲ و جمله ی پنجم آن ۴۸ باشد جمله ی چهارم این دنباله را بدست آورید

نکته: اگر a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند آنگاه b را واسطه ی هندسی a, c گوئیم و داریم $b^2 = \sqrt{a \times c}$

مثال: واسطه ی هندسی مثبت بین ۴، ۱۶ را به دست آورید

مثال: مثال ۳ را به کمک نکته ی بیان شده حل کنید
دنباله ی تقریبی اعشاری:

مثال: در تقسیم ۵ بر ۷ خارج قسمت را تا یک رقم اعشار، دو رقم اعشار، سه رقم اعشار و... به دست آورید سپس خارج قسمت هارادریک دنباله بنویسید

نکته برای درس:

حال تفاضل این دنباله را از $\frac{5}{7}$ به دست آورید می بینیم که حاصل به صفر نزدیک می شود اگر جملات دنباله ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل به صفر نزدیک شود گوئیم آن دنباله به آن عدد نزدیک شده است.

تعریف

برای هر عدد حقیقی x می توانیم دنباله ای از اعداد اعشاری بسازیم که جملات آن به x نزدیک شوند که در آن دنباله جمله ی n ام عددی اعشاری است با n رقم اعشار که هر جمله ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله ی قبل حاصل می شود. دنباله به وجود آمده را دنباله ی تقریبات اعشاری X گوئیم.

مثال: دنباله ی تقریبات اعشاری $\frac{11}{6}$ ، $\frac{3}{7}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{5}{7}$ را به دست آورید.

مثال: اگر بدانیم $5x+1 < 42/2$ ، $13/46 > 3-x$ انگاه دنباله ی تقریبات اعشاری عدد حقیقی X را به دست آورید

ریشه گیری اعداد حقیقی:

برای هر عدد حقیقی مثبت b ، $\pm \sqrt[k]{b}$ را ریشه ی k ام b گوئیم (k عددی زوج)
برای هر عدد حقیقی دلخواه b ، $\sqrt[k]{b}$ را ریشه ی k ام b گوئیم (k عددی فرد)

مثال: الف) ریشه ی سوم هشت را بدست آورید ب) ریشه ی چهارم شانزده را بدست آورید ج) رادیکال شانزده بافرجه ی چهار د) رادیکال هشت بافرجه ی سه

تذکر: فرق بین ریشه ی n ام a و $\sqrt[n]{a}$ را میتوان بصورت زیر بیان کرد
حالت اول: اگر n عددی فرد باشد تفاوتی بین ریشه ی n ام a و $\sqrt[n]{a}$ وجود ندارد
حالت دوم: اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a} = \pm$ ریشه ی n ام a

نکته: اگر k عددی زوج باشد فقط اعداد نامنفی ریشه ی k ام دارند اما اگر k عددی فرد باشد همه ی اعداد میتوانند ریشه ی k ام داشته باشند

مثال: الف) ریشه ی سوم 27 - مساوی 3 - و ریشه ی سوم 27 مساوی 3 است
ب) ریشه ی چهارم 16 مساوی ± 2 است در حالی که 16 - ریشه ی چهارم ندارد

نکته: در حالت کلی در مورد عبارت های رادیکالی بافرجه ی زوج زیر رادیکال وجواب رادیکال هر دو باید مثبت باشد چنانچه فرجه فرد باشد زیر رادیکال وجواب رادیکال هم علامت خواهند بود

نکته (قواعد توان رسانی):

$$\begin{aligned} 1) a^1 &= a & 2) a^n \times a^m &= a^{n+m} & 3) a^n \div a^m &= a^{n-m} \\ 4) a^n \times b^n &= (a \times b)^n & 5) a^n \div b^n &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ 6) (a^n)^m &= a^{n \times m} & 7) a^{-n} &= \frac{1}{a^n} & 8) a^0 &= 1 & 9) 0^0 &= \text{تعریف نشده} \\ 10) a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a^1} & 11) a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} & 12) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt{m \times n} \sqrt{a} \end{aligned}$$

نکته: در توان رسانی پایه همواره عددی مثبت است ولی نما (توان) هر عددی میتواند باشد

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\begin{aligned} 1) 8^{\frac{-1}{2}} & \quad 2) 9^{\frac{3}{2}} & 3) (\sqrt{3})^{\frac{3}{5}} & \quad 4) ((\sqrt{2})^{\frac{4}{7}})^{\frac{1}{2}} & 5) (\sqrt{2})^{\frac{-1}{4}} & \quad 6) 5^{\frac{7}{5}} \\ 7) (\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} & \quad 8) 8^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[3]{6^4 \sqrt{6}} & \quad 2) \sqrt[3]{4 \sqrt{6}} & 3) \sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} & \quad 4) \sqrt[8]{4} \div \sqrt[6]{8} & 5) 6^{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

مثال: عدد $\sqrt[20]{128}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه ی چهار بنویسید

مثال: عدد $\sqrt[12]{250}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه ی دو بنویسید

توان رسانی با توان اعداد حقیقی: طبق یادآوری $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ تمام قوانین توان رسانی با توان اعداد گویا برای توان رسانی با توان اعداد حقیقی نیز برقرار است

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$\begin{aligned} 1) 10^{2-\sqrt{5}} \times 10^{2+\sqrt{5}} & \quad 2) ((\pi - 1)^{\sqrt{3}} (\pi + 1)^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \\ 3) (\sqrt{3} - 1)^{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3} + 1)^{\sqrt{2}} & \quad 4) (\sqrt{7}^{\sqrt{5}-3})^{\sqrt{5}+3} \\ 5) (\sqrt[6]{5^{\sqrt[3]{9}}})^{\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

مثال: مقدار x را به گونه ای بیابید که $\sqrt[3]{x} = 3$ باشد

مثال: معادله ی رادیکالی $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x}$ را حل کنید

مثال: از معادله ی $x^{\sqrt{5}+1} = x^{\sqrt{5}-1} = 32$ مقدار x را بدست آورید

با تشکر از دبیر مربوطه: آقای حسام قاضی