

چند جمله ای ها و اتحادها

جمع و تفریق اعداد: برای جمع و تفریق دو عدد به علامت های آنها نگاه می کنیم اگر هر دو هم علامت بودند با هم جمع می کنیم و علامت مورد نظر آن را نیز قرار می دهیم و اگر مختلف علامت بودند از هم کم می کنیم و علامت عدد حاصل، علامت عدد بزرگتر است.

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } -2 - 3 =$$

$$\text{ب) } -2 + 3 =$$

$$\text{ج) } 4 - 2 =$$

$$\text{د) } -6 + 7 =$$

قرینه اعداد:

برای قرینه کردن یک عدد کافی سات یک علامت منفی پشتش بگذاریم یعنی قرینه کردن یک عدد عوض کردن علامت آن است «اگر مثبت بود منفی و اگر منفی بود مثبت»
نکته: «قرینه ی عدد صفر خود صفر است»

تقسیم و معکوس اعداد:

عمل تقسیم متقابل عمل ضرب است تقسیم a بر b که بصورت $\frac{a}{b}$ یا $a \div b$ نشان می دهند.

نکات:

۱- نمی توان عبارتی را بر صفر تقسیم کرد یعنی $\frac{a}{0}$ تعریف نشده است.

۲- هر عدد تقسیم بر یک می شود خود آن عدد مانند $(\frac{3}{1} = 3)$

۳- اگر عدد یک را بر عددی تقسیم کنیم معکوس آن عدد به دست می آید یعنی معکوس b می شود $\frac{1}{b}$

«صفر معکوس ندارد» و برای اینکه بفهمیم دو عبارت معکوس یکدیگرند کافی است آن ها را در هم ضرب کنیم اگر حاصل یک شد آن دو معکوس یکدیگرند.

۴- برای بررسی تساوی دو کسر کافی است از خاصیت طرفین وسطین استفاده کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{4} = 2$$

مثال: دو کسر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابرند زیرا:

مثال: اگر $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ باشد حاصل $\frac{2b-6}{2a-5}$ چقدر است؟

عبارتهای جبری:

عبارت جبری، عبارتی است که از چند تا عدد یا هر حرفی تشکیل شده و این عددها و حروفها با استفاده از عملیات ریاضی با هم رابطه دارند که در این عبارت ها حرفی ها نشان دهنده ی هر عدد دلخواه است که متغیر نامیده می شود به عنوان مثال هر یک از عبارتهای زیر یک عبارت جبری است:

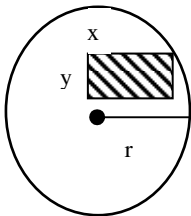
$$x + y + \frac{1}{2}, \sqrt{3}, a + b + x, \pi r^2 - xy, 2\pi r, a^2 - b^2$$

نکته:

نماد π عددی است که برابر $\frac{3}{14}$ می باشد و در عبارت های جبری نشان دهنده ی یک عدد ثابت است نه یک متغیر.

مثال: مقدار عبارت جبری زیر به اعضای $a=2$ و $b=1$ و $c=3$ حساب کنید.

مثال: در شکل روبرو از سطح دایره ای به شعاع r مستطیلی با طول x با عرض y برداشت شده است مساحت قسمت باقی مانده دایره را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.



یک جمله ای:

ساده ترین نوع عبارتهای جبری که از ضرب یک عدد در یک یا چند متغیر با توان های صحیح نا منفی «اعداد حسابی» درست شده اند یا بطور کلی یک جمله ای عبارتی است که این متغیرهایش جمع، تفریق و تقسیم نیست و متغیرها نمی توانند در مخرج کسر یا زیر رادیکال قرار بگیرند و توان منفی نیز نمی گیرند در یک جمله ای ها نمی توان هر متغیر درجه یک جمله ای است نسبت به آن متغیر و عددی که در متغیرها ضرب می شود ضریب عددی آن یک جمله ای گوئیم.

$$\text{ب) } \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}t$$

$$\text{ج) } 5x^3 - 4x^3$$

$$\text{د) } \frac{ax}{2} - \frac{xa}{3}$$

$$\text{ه) } a^2b + 2b^2a$$

$$\text{و) } 2xyz - 0/3xyz + 0/7xyz$$

$$\text{ز) } 4a^2 - 3a^2$$

$$\text{ح) } 2xy + 3xy - 5xy$$

$$\text{ط) } 2ab + 3a + 2b + 3ab - 2a =$$

نکته: یک جمله ای هایی که متشابه نیستند را نمی توان جمع یا تفریق کرد.

مثال: در مثال یک تعیین کنید در کدام مورد می توان جمع با تفریق انجام داد.

- برای اینکه دو یک جمله ای را در هم ضرب کنیم لازم نیست دو یک جمله ای متشابه باشند و برای این عمل کافی است ضرایب عدد را در هم ضرب کنیم و متغیرها را نیز جداگانه در هم ضرب کنیم.

مثال: عبارتهای زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\text{الف) } -3x^2 \times 5y^2$$

$$\text{ب) } 2xy \times 5x^2y^3$$

$$\text{ج) } 6x^2y \times y^2 \times \frac{1}{2}x^2y$$

$$\text{د) } \frac{ab}{2} \times \frac{ba}{3}$$

$$\text{ه) } (3x + 5y)x$$

$$\text{و) } \frac{6}{3}(x + y^2)$$

$$\text{ز) } \left(-\frac{1}{3}xy\right) \left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)$$

$$\text{ح) } 3y(2x - 4)$$

$$\text{ط) } (5a^2b)(-3a^2b^3) + (ab)^4$$

$$\text{ی) } 2(3a - 1) - 3(2a - 1) - 6a$$

چند جمله ای ها: اگر دو یا چند یک جمله ای غیر متشابه با هم جمع یا از هم تفریق کنیم یک چند

جمله ای بدست می آید.

تعریف: بزرگترین توان یک متغیر در یک چند جمله ای، درجه آن چند جمله ای نسبت به آن متغیر می گوییم.

نکته: برای استاندارد کردن یک چند جمله ای یک متغیره کافی است جملات چند جمله ای را از بزرگترین توان به کوچکترین توان نمایش دهیم.

مثال: تعیین کنید کدامیک از عبارتهای جبری زیر چند جمله است؟ درجه چند جمله ای را نسبت به هر یک از متغیرهایش تعیین و سپس چند جمله ای یک متغیره را استاندارد کنید.

الف) $4xy^2 + xyz - \sqrt{2} \delta^4 - 2$

ب) $\frac{x^3y^3}{4} = x^4y^4 + 7$

ج) $7x^2 + 2x^5 - 3x + 1$

د) $-3x^4 + x^3 - 2 + 2x$

- برای جمع یا تفریق چند جمله ای کافی است جمله های متشابه را با هم جمع یا از هم تفریق کنیم و برای ضرب دو چند جمله ای تک تک جملات یکی از چند جمله ای ها را در چند جمله ای دیگر ضرب می کنیم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف) $x(x + y + 1) =$

ب) $y + 4(x - y) =$

ج) $(a + b)(x + y) =$

د) $(a^2 + b + 1)(a + b) =$

هـ) $3X(x^2 + 7) + 9x(x - 3) =$

و) $(x^2y^3) \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 - (5x^2y^3)(x^4y^4) =$

ز) $(2x - 3)(x + 5) - 2(x^2 + 4x - 7) + x + 1$

مثال: اگر $A = x^3 + 2x - 1$ و $B = 2x + 5$ و $C = x^2 - x + 3$ باشد حاصل عبارت $2A - (B \times C)$

را ساده و سپس استاندارد کنید.

اتحادها و تجزیه: تساوی بین دو عبارت جبری که همیشه و اعضای همه ی عددها برقرار است را اتحاد

گوییم.

مثال: کدام یک از عبارات زیر اتحاد هستند؟

الف) $x + x = x^2$

ب) $x + x = 2x$

ج) $x + y^3 = y^3 + x$

د) $3x + y = x + y^3$

۱- اتحاد مربع: برای هر دو مقدار a و b داریم:

الف) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

ب) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

مثال: عبارت های زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

الف) $(a + b)^2 =$

ب) $(b - 1)^2 =$

ج) $(xy + 2) =$

د) $(x - d) =$

هـ) $(2x + 3y)^2 =$

و) $(3xy + 2x)^2 =$

۲- اتحاد مزدوج: برای هر دو مقدار a و b داریم: «مزدوج a+b برابر a-b و مزدوج a-b می شود a+b»

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد مزدوج بیابید.

الف) $(2 - x)(2 + x) =$

ب) $(x - 4)(x + 4) =$

ج) $(x + \frac{3}{2})(x - \frac{2}{2}) =$

د) $(a + 1)(a - 1) =$

هـ) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) =$

و) $(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) =$

۳- اتحاد یک جمله مشترک: برای سه مقدرا a, x, b داریم:

حاصل ضرب غیر مشترک + مشترک × (مجموع غیر مشترک ها) + (جمله مشترک)²

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد یک جمله مشترک بدست آورید.

$$\text{الف)} (x + 3)(x + 2) =$$

$$\text{ب)} (2x - 2)(2x - 3) =$$

$$\text{ج)} (3y - 2)(3y - 4) =$$

$$\text{د)} (4x + 1)(4x + a) =$$

$$\text{هـ)} (ax + 3)(ax - 5) =$$

۴- اتحاد مجموعه مکعب دو جمله ای: برای هر دو مقدار a و b داریم:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

۵- اتحاد مکعب دو جمله ای:

$$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال: با استفاده از اتحادها حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف)} (x + 3)(x^2 - 3x + 9) =$$

$$\text{ب)} (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9xy^2) =$$

$$\text{ج)} (x + 3)^3 =$$

$$\text{د)} x^3 + 3^3 =$$

$$\text{هـ)} 8x^3 + 2xy^3 =$$

$$\text{و)} (4x - 2y)^3 =$$

تجزیه: تجزیه یک چند جمله ای یعنی اینکه آن چند جمله ای را بصورت ضرب دو یا چند جمله ای دیگر

بنویسید که درجه ی آن ها کمتر باشد مانند فاکتورگیری که در فصل ۱ به آن پرداختیم.

نکته(تجزیه به کمک اتحادها): برای تجزیه به کمک اتحادها در حالت کلی حالت های زیر را داریم:

۱- عبارت مورد تجزیه دو جمله ای ای است:

الف) جمله ها توان ۲ دارد ← اتحاد مزدوج ب) جمله ها توان ۳ دارد ← اتحاد مرکب

۲- عبارت مورد تجزیه سه جمله ای است ← اتحاد یک جمله مشترک

۳- عبارت مورد تجزیه چهار جمله ای است. ← اتحاد مکعب دو جمله ای

مثال تشریحی: با استفاده از اتحادها عبارتهای زیر را تجزیه کنید.

حالت ۱-

الف) $x^2 - 81 =$

ب) $4x^2 - y^2 =$

ج) $a^3 + b^3 =$

د) $8x^3 - 1 =$

حالت ۲-

الف) $x^2 + 2xy + y^2 =$

ب) $9a^2 - 12ab + 4b^2 =$

ج) $x^2 - 6x + 8 =$

د) $2x^2 - x - 6 =$

هـ) $3x^2 + 26x - 9 =$

حالت ۳-

الف) $y^3 - 6y^2 + 12y - 8 =$

ب) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 =$

با تشکر از دبیر مربوطه: آقای حسام قاضی