فصل سوم

توان رسانی و ریشه گیری

توان طبیعی: اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد دایم : a پایهn توان $a^{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{a \times a \times a \ldots a}}{\mathrm{n}}$ پایه عددی است که در خودش ضرب می شود و توان تعداد دفعاتی است که پایه در عمل ضرب نوشته می شود.

مثل: حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

A) $٪۳ \times ٪۳ \times ٪۳ =$ B) $\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} =$

C) $\frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} =$ D) (a+b)(a+b)=

E) -۲×-۲×-۲ =

نکته قواعد توان رسانی: اگر a یک عدد حقیقی و n وm یک عدد طبیعی باشند داریم:

A) $a^{۱} = a$

B) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

C) $a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

D) $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

E) $a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

F) $(a^n)^m = a^{n \times m}$

پس در حالت کلی هنگامی که دو عدد توان دار که پایه هاشان با هم مساویست ضرب شود پایه را می نویسیم و توان ها را با هم جمع می کنیم (توضیح قانون ۲ مانند $۳^{۹} = ۳^{۴} \times ۳^{۵}$) در حالت تقسیم نیز پایه رامی نویسیم و توان ها را از هم کم می کنیم(توضیح قانون ۳ مانند $۳^{۱} = ۳^{۵-۴} = ۳^{۴} \div ۳^{۵}$) و در حالتی که دو عدد توان دار که توان هایشان برابر است در هم ضرب (یا بر هم تقسیم) می کنیم فقط کافیست پایه ها را در هم ضرب (یا بر هم تقسیم) کنیم و به توان ها کاری نداریم.(توضیح قانون ۴و۵ مانند $۱۵^{۴} = ۵^{۴} \times ۳^{۴}$ و $۲^{۳} = ۳^{۳} \div ۶^{۳}$)

مثال حاصل عبارت های زیر به صورت یک عبارت توان دار بنویسید.

A) $۲^{۶} + ۲^{۷} =$ B) $۳^{۲} \times ۳^{۴} \times ۳ =$ C) $a^{۵} \div a^{۳} =$

D) $۳^{۳+۲} \div ۲^{۳} =$ E) $۴^{۳} \times ۵^{۳} =$ F) $(\frac{۱}{۲})^{۴} \times ۵^{۴} =$

G) $۶^{۳} \div ۲^{۳} =$ H) $۲^{۷} \div \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۷} =$ I) $(۳^{۲})^{۵} =$

J) $(۴^{۲})^{۳} =$ K) $(۲^{۴})^{۳} =$

نکته از قواعد توان رسانی فقط زمانی که بین پایه ها عامل ضرب یا تقسیم باشد استفاده می کنیم که نتیجه می شود

$$a^n - b^n \neq (a-b)^n \quad , a^n + b^n \neq (a+b)^n$$

$$, a^m - a^n \neq a^{m-n} \quad , a^m + a^n \neq a^{m-n}$$

نکته می دانیم که $(a^{m})^{n}$ با $a^{m^{n}}$ فرق دارد (ترتیب عملیات)

مثال مشخص کنید هر یک از عبارت های زیر درست است یا نادرست

A) $۴^{۲} + ۳^{۲} = (۴+۳)^{۲}$ B) $۴^{۳} - ۳^{۳} = (۴-۳)^{۳}$ F) $۲^{(۲^{۳})} = ۲^{۲^{۳}}$

C) $۴^{۴} - ۳^{۳} = ۴^{۴-۳}$ D) $۳^{۵} + ۳^{۲} = ۳^{۵+۲}$ E) $(۵^{۲})^{۳} = ۵^{۲^{۳}}$

توان صفر و توان منفی

هر عدد غیر صفر به توان صفر می شود ۱ یعنی : $a^{۰} = ۱ \ (a \neq ۰)$

نکته: صفر به توان صفر($۰^{۰}$) تعریف نشده است.

اگر a یک عدد حقیقی مخالف صفر و n یک عدد طبیعی باشد آن گاه $a^{-n} = \left(\frac{۱}{a}\right)^{n}$

مثال: هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عبارت با توان منفی بنویسید.

A) $۰/۰۰۰۱ =$ B) $\frac{۱}{۴۵} =$ C) $\frac{۱}{a^{۳}} =$

مثال: هر یک از عبارات زیر را به صورت یک عبارت با توان مثبت بنویسید.

A)$۳^{-۵} =$ B) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۴} =$ C) $a^{-۲} \times b^{-۲} =$

نکته: حال با گفتن توان صفر و توان منفی قواعد توان رسانی گفته شده برای توان های صحیح نیز بر قرار است.

مثال: به کمک قواعد توان رسانی حاصل عبارت های زیر را بیابید سپس ساده کنید.

A) $\frac{a^۳\times a^۲\times b}{a^۴\times a\times b^۲} =$ B) $۳^۴ \times ۳^۳ \times ۲^۲ \times ۱۲^۴ =$ C) $(۳^{-۲}) \times (۳^۳)^{-۲} \times ۹^{-۶} =$

D) $\frac{۱۲^۳\times ۷۷^۲}{۳۳^۲\times ۱۴^۲} =$ E)$۳^{-۱} + ۴^{-۲} =$ F) $\frac{۳^۴+۳^۴+۳^۴}{۳^۵} =$

G)$\frac{y^{-۲}x^۳}{(x^{-۲}y)^{-۳}x^{-۲}} =$ H)$\frac{۱۲^{-۸}\times(۰/۵)^{-۸}}{۶^{-۸}} =$ I) $\frac{(۲^۳+۲^۳+۲^۳)\times ۳^۲}{۶^۳} =$

مقایسه اعداد توان دار:

۱- پایه های مساوی

الف:اگر پایه عددی بزرگتر از یک باشد توان بزرگتر نشان دهنده ی عدد توان دار بزرگتر است.

$$۲^۴ < ۲^۵ < ۲^۶ < ۲^۷ < ۲^۸ \text{و}$$

ب: اگر پایه عددی بین صفر و یک باشد توان بزرگتر نشان دهنده ی عدد توان دار کوچک تر است.

$$... \text{و}\, ۰/۵^۸ < ۰/۵^۷ < ۰/۵^۶ \text{و} ...$$

۲- توان های مساوی

در این حالت هر عدد توان داری که پایه ای بزرگتر دارد عدد توان دار بزرگتر است.

$$۰/۴^{۴} < ۰/۵^{۴} < ۱^{۴} < ۲^{۴} < ۳^{۴}$$

مثال: در هر مورد اعداد از کوچک به بزرگ مرتب کنید

A) $۵^{۱}, ۵^{۵}, ۵^{۳}, ۵^{۴}$

B) $\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}, \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}, \left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}$

C) $۲^{۳}, ۳^{۳}, ۰/۵^{۳}$

نکته برای مقایسه ی اعداد توان دار کافی است یا پایه ها را مساوی و یا توان ها مساوی کنیم که در این صورت یکی از حالات بالاست و می توان اعداد با هم مقایسه کرد.

مثال اعداد زیر را با هم مقایسه کنید.

$۲۵^{۶}$ و $۸۱^{۳}$ و $۶۴^{۴}$

نماد علمی:

نماد علمی خواندن و نوشتن عدد های خیلی بزرگ و خیلی کوچک را ساده می کند برای نوشتن نماد علمی یک عدد کافی است عدد را به صورت حاصل ضرب یک عدد اعشاری که قسمت صحیح آن یک رقمی و مخالف صفر در توان صحیحی از ۱۰ می نویسیم مانند: $۰/۰۰۱۰۲ = ۱/۰۲ \times ۱۰^{-۳}$ و $۱۲۰۰۰۰ = ۱/۲ \times ۱۰^{۵}$

مثال نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

a) $۶۰۴۰۰۰۰۰۰ =$ B) $۰/۰۰۰۰۰۰۵۰۱ =$ C) $۵۳/۹ \times ۱۰^{۷} =$ D) $۰/۱۲۳۴۵۶ =$

E) $۰/۰۵۲۱ \times ۱۰^{۲} =$ F) $۲۳۴۵۶۷ =$ G) $\frac{۴۲۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۷}}{۲۱} =$ H) $۰/۰۰۰۰۲۵ \times ۴۹۰۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۴} =$

مثال نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید

$A) ۲/۳۳ \times ۱۰^{۵} =$

B) $۱/۰۰۵۳۱\times ۱۰^{-۴} =$

C) $۴۵/۲ \times ۱۰^{۶} \times ۱۰^{-۵} =$

ریشه گیری

برای یک عدد حقیقی مثبت مانند b $\pm\sqrt{b}$ را ریشه دوم b گوییم و می دانیم که $\sqrt{b}$ خود همواره مثبت است به عنوان مثال ریشه ی دوم اعدادی مانند ۹و۱۶و۲۵ به ترتیب $(\pm\sqrt{۹} = \pm۳)$و$(\pm\sqrt{۱۶} = \pm۴)$و$(\pm\sqrt{۲۵} = \pm۵)$و ریشه دوم صفر همان صفر است$(\sqrt{۰} = ۰)$

نکته: رادیکال های با فرجه زوج عبارت منفی نمی پذیرند و حاصل رادیکال ها با فرجه زوج همواره نا منفی است(یعنی صفر یا مثبت است)

مثال ریشه های دوم اعداد زیر را بدست آورید

A) $۳۶ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

B) $\frac{۱}{۴۹} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

C) $b^{۴} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

D) $۱۰^{۴} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

E) $-۲۵ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

F) $۰/۱۶ \xrightarrow{\text{ریشه دوم}}$

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را بررسی کنید.

A) $\sqrt{۹} = ۳$ B) $\sqrt{۹} = -۳$ C) $\sqrt{-۸۱} = -۹$ D) $\sqrt{-۸۱} = ۹$

ریشه سوم

ریشه سوم یک عدد دلخواه مانند b را $\sqrt[۳]{b}$ است

نکته همه ی اعداد ریشه ی سوم دارند در حالی که فقط اعداد مثبت ریشه ی دوم دارند ریشه سوم اعداد یکی است ولی تعداد ریشه های دوم اعداد دو تا است.

مثال ریشه سوم عبارت های زیر را بدست آورید.

A) $۲۷ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}}$ B) $-\frac{۱}{۸} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}}$

C) $۰/۰۰۸ \xrightarrow{\text{ریشه سوم}}$ D) $۶۴b^{۳} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}}$ E) $a^{۳} \xrightarrow{\text{ریشه سوم}}$

نکته: رادیکال با فرجه سوم هر عدد با خود آن عدد هم علامت است.

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

A) $\sqrt[۳]{-۸} =$ B) $\sqrt[۳]{۶۴} =$ C) $\sqrt[۳]{-۱۲۵} =$

D) $\left(\sqrt[۳]{b}\right)^{۳} =$ E) $\left(\sqrt[۳]{۲^{۶}}\right)^{۳} =$

ضرب و تقسیم و جمع و تفریق رادیکال ها

برای این که دو رادیکال با فرجه برابر را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم عبارت های زیر رادیکال ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم می کنیم و اگر رادیکال ها ضرایب نیز داشته باشند ضریب هایشان را نیز جداگانه در هم ضرب یا بر هم تقسیم می کنیم و برای جمع یا تفریق عبارت های رادیکالی کافی است ضرایب رادیکال هایی که یکسان اند را با هم جمع یا از هم کم کنیم. (برای ضرب و تقسیم هم داخل رادیکالها در هم ضرب می شوند و هم ضریب ها ولی در جمع فقط ضریب ها جمع و تفریق می شوند)

نکته برای ضرب و تقسیم رادیکال ها یک شرط داریم و آن برابر بودن فرجه هاست یعنی دو رادیکالی که می خواهند درهم ضرب یا بر هم تقسیم شوند فرجه هایشان باید با هم برابر باشند و برای جمع یا تفریق علاوه بر برابر بودن فرجه ها، زیر رادیکال ها نیز باید یکسان باشدکه در این صورت ضرایب فقط با هم جمع یا تفریق میشوند

نکته برای ساده کردن عبارت های رادیکالی با فرجه ی دو یا فرجه سه کافی است ابتدا عبارات زیر رادیکال را به کمک تجزیه به عامل های اول ساده کنیم و عبارت زیر رادیکال را به صورت مربع کامل (توانی از دو) برای فرجه دو و مکعب کامل(توانی از سه) برای فرجه سه تبدیل کنیم

مثال حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

A) $\sqrt{۲۷} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۷۱}$

B) $۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۶}$

C) $\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۲۷}} =$

D) $\sqrt{۰/۲} \times \sqrt{۰/۸} =$

E) $۲\sqrt{۷} - ۳\sqrt{۷} = ۱\sqrt{۷}$

F) $۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۴} + ۲\sqrt{۴} = ۲\sqrt{۵} + ۵\sqrt{۴}$

G) $۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۲} + \frac{۵\sqrt{۲}}{۳} =$

مثال عبارت های زیر را ساده کنید.

A) $\sqrt{۳۰۰}=$

B) $\sqrt[۳]{-۱۶}=$

C) $\sqrt[۲]{۱۵۰}=$

D) $\sqrt[۳]{۵۴}=$

E) $\sqrt[۳]{۵۴b^{۴}c^{۶}}=$

F) $\sqrt{۱۶۲b^{۵}c^{۴}}=$

G) $-۲\sqrt{۵} + \sqrt{۲۰} + ۳\sqrt{۱۲۵} - ۳\sqrt{۵}=$

H) $\sqrt{\frac{۱۲}{۳}} \times \frac{۴۵\sqrt{۳}}{\sqrt{۲۷}} - ۱۱\sqrt{۲}=$

مثال حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۲۸}+\sqrt{۶}+\sqrt{۸۴۷}}{\sqrt{۳۴۳}-۳\sqrt{۷}}$ را بدست آورید.

گویا کردن مخرج کسرها:

برای گویا کردن مخرج کسرهایی که رادیکالی هستند کافی است صورت و مخرج را در عبارت رادیکالی مخرج به تعداد یک واحد کمتر از فرجه رادیکال ضرب کنیم و حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسیم

مثال مخرج عبارت های زیر را گویا کنید.

A) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}=$

B) $\frac{۲}{۳\sqrt{۵}}=$

C) $\sqrt[۳]{\frac{۱۱}{۶}} =$

D) $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴a}} =$

E) $\frac{۱}{\sqrt{bc}} =$

F) $\frac{۵}{\sqrt[۳]{۲۵}}=$

G) $\frac{۳\sqrt[۲]{۲}}{\sqrt[۳]{۵}} =$

H) $\frac{۳}{۲\sqrt{۱۱}} =$

فعالیت:

الف) درستی تساوی زیر را بررسی کنید

$$\sqrt{\frac{۲ \times ۳۸^{۳} + ۳ \times ۵۷^{۳}}{۲^{۴} + ۳^{۴}}} = ۱۹$$

ب) مقدار عبارت $\frac{\sqrt{۳\sqrt{۸\sqrt{۴}}}}{\sqrt{۲\sqrt{۱۲\sqrt{۹}}}}$ را بدست آورید.

با تشکر از دبیر مربوطه :آقای حسام قاضی