دبیرستان نمونه

پسران گنبد کاوس

اندازه گیری و کمیت

در محیط پیرامون ما برخی از ویژگی‌ها مانند زیبایی یا مهربانی قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. اما برای برخی از ویژگی‌ها مانند سنگینی و سبکی و یا بلندی و کوتاهی می‌توان یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان تعریف کرد و آن‌ها را اندازه‌گیری کرد.
ویژگی‌ای که بر اساس ارائه‌ی یک روش اندازه‌گیری مورد توافق همگان قابل اندازه‌گیری است **کمیت** نامیده می‌شود.

یکای (واحد) اندازه‌گیری

مقدار مشخصی از هر کمیت را به عنوان مقیاس اندازه‌گیری آن کمیت انتخاب می‌کنند که به آن یکا یا واحد اندازه‌گیری آن کمیت گفته می‌شود.
اندازه‌گیری هر کمیت به این صورت انجام می‌شود که مقدار آن کمیت چند برابر مقداری است که به عنوان یکا یا واحد اندازه‌گیری برای آن کمیت در نظر گرفته شده است.
برای آن که رقم‌های حاصل از اندازه‌گیری‌های مختلف یک کمیت با هم یکی باشند، دانشمندان توافق کرده‌اند که برای هر کمیت یکای معینی تعریف کنند.
یکای هر کمیت باید به گونه‌ای انتخاب شود که در شرایط فیزیکی تعیین شده تغییر نکند و همواره در دسترس باشد.
مجموعه یکاهای مورد توافق بین‌المللی را به اختصار یکاهای SI می‌نامند.
SI حروف اول واژه‌ی فرانسوی Systeme International به معنای دستگاه بین‌المللی است.

یکاهای اصلی و فرعی

آن دسته از کمیت‌هایی را که یکاهای آن‌ها به طور مستقل و بدون رابطه با سایر یکاهای دیگر تعریف می‌شود **کمیت اصلی** و یکاهای آن‌ها را **یکای اصلی** می‌نامند.
سایر کمیت‌ها را که یکاهای آن‌ها با کمک رابطه‌ی آن‌ها با کمیت‌های دیگر و با استفاده از یکاهای دیگر تعریف می‌شود **کمیت فرعی** و یکاهای آن‌ها را **یکای فرعی** می‌نامند.
طول ، جرم ، زمان ، دما و جریان الکتریکی از جمله کمیت‌های اصلی در SI هستند.

تعریف یکای طول در SI

یکای طول در SI متر نام دارد و آن را با نماد m نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استانداردی ساخته شده است که در موزه‌ی سور پاریس نگهداری می‌شود. این نمونه میله‌ای است از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم با دو علامت روی آن که فاصله‌ی بین آن‌ها در دمای صفر درجه‌ی سلسیوس به طور دقیق برابر طول توافق شده‌ی بین‌المللی برای یک متر است. در موسسه‌های استاندارد هر کشور نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد تهیه و نگهداری می‌شود.

تعریف یکای جرم در SI

یکای جرم در SI کیلوگرم نام دارد و آن را با نماد kg نشان می‌دهند. برای این یکا نمونه‌ی استانداردی به صورت استوانه‌ای از جنس آلیاژ پلاتین و ایریدیوم ساخته شده است که در موزه‌ی سور فرانسه نگهداری می‌شود. در موسسه‌های استاندارد همه‌ی کشورها نمونه‌هایی مشابه با این نمونه‌ی استاندارد را تهیه و نگهداری می‌کنند.

تعریف یکای جرم در SI

یکای زمان در SI ثانیه نام دارد و آن را با نماد s نشان می‌دهند. طبق تعریف اولیه و قدیمی یک ثانیه برابر $\frac{1}{86400}$ یک شبانه‌روز است.

یکای مناسب برای کمیت‌های خیلی بزرگ و خیلی کوچک

در SI پیشوندهایی برای یکاها تعریف کرده‌اند که با اضافه کردن آن‌ها به یکای هر کمیت می‌توان یکاهای بزرگ‌تر و کوچک‌تری را برای اندازه‌گیری مقدارهای خیلی بزرگ و خیلی کوچک به وجود آورد. این یکاها در جدول زیر آورده شده‌اند.

پیشوند	مضرب	نماد	پیشوند	مضرب	نماد
دسی	10^{-1}	d	دکا	10	da
سانتی	10^{-2}	c	هکتو	10^{2}	h
میلی	10^{-3}	m	کیلو	10^{3}	k
میکرو	10^{-6}	μ	مگا	10^{6}	M
نانو	10^{-9}	n	گیگا	10^{9}	G
پیکو	10^{-12}	p	ترا	10^{12}	T

نمادگذاری علمی

در اندازه‌گیری مقدارهای بسیار بزرگ و یا بسیار کوچک به اعدادی برخورد می‌کنیم که به علت تعداد زیاد صفر در سمت راست آن اعداد و یا تعداد زیاد صفر بعد از ممیز آن اعداد در نمایش و خواندن آن‌ها با مشکل مواجه می‌شویم و در نتیجه احتمال اشتباه افزایش پیدا می‌کند.
این اعداد را با استفاده از روشی که آن را نمادگذاری علمی می‌نامند نمایش می‌دهند.
در نمادگذاری علمی هر مقدار را به صورت حاصل ضرب عددی بین ۱ و ۱۰ و ضرب توان صحیحی از ۱۰ می‌نویسند.
مثال ۱ : جرم یک الکترون بر حسب کیلوگرم برابر ۰/۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۹۱۰۹ است که آن را به صورت $9/109 \times 10^{-32}$ نشان می‌دهند.
مثال ۲ : فاصله‌ی زمین تا خورشید بر حسب متر حدود ۱۵۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ است که آن را به صورت $1/5 \times 10^{11}$ نشان می‌دهند.

دقت اندازه‌گیری

کم‌ترین مقداری را که یک وسیله‌ی اندازه‌گیری می تواند اندازه بگیرد دقت اندازه‌گیری آن وسیله می‌نامند.
یک وسیله‌ی اندازه‌گیری نمی‌تواند مقداری را که کم‌تر از دقت اندازه‌گیری آن است اندازه‌گیری کند. بنابراین نتیجه‌ی اندازه‌گیری توسط یک وسیله‌ی اندازه‌گیری باید همواره مضرب درستی از دقت اندازه‌گیری آن وسیله باشد.
مثال ۱ : در اندازه‌گیری طول با خط‌کشی که بر حسب میلی‌متر درجه‌بندی شده است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب میلی‌متر بیان شود باید حتما عدد صحیح باشد.
مثال ۲ : در اندازه‌گیری جرم با ترازویی که کم‌ترین درجه‌بندی آن برابر ۲۵۰ گرم است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب گرم بیان شود باید حتما بر ۲۵۰ بخش‌پذیر باشد.
مثال ۳ : در اندازه‌گیری حجم مایع با پیمانه‌ای که حجم آن برابر ۵ سی‌سی است، اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برحسب سی‌سی بیان شود باید حتما بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

تبدیل یکای طول :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک طول را که برحسب میکرومتر بیان شده است برحسب هکتومتر بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک میلی‌متر چند هکتومتر است.

$1\ mm = ?\ hm$

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1\ mm = 10^{-3}\ m \\ 1\ hm = 10^{2}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{1\ mm}{1\ hm} = \frac{10^{-3}\ m}{10^{2}\ m} = 10^{-5} \Rightarrow 1\ mm = 10^{-5}\ hm$$

(۲) روش دوم :

$$1\ mm = x\ hm \Rightarrow 1 \times 10^{-3} m = x \times 10^{2} m \Rightarrow 10^{-3} = x \times 10^{2} \Rightarrow x = 10^{-5}$$

تبدیل یکای مساحت :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک مساحت را که برحسب کیلومترمربع بیان شده است برحسب دسی‌مترمربع بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک کیلومترمربع چند دسی‌مترمربع است.

$$1\ km^2 = ?\ dm^2$$

توجه کنید که منظور از مساحت یک کیلومترمربع $(1\ km^2)$ مساحت یک مربع به ضلع یک کیلومتر است که این مساحت برابر $1\ km \times 1\ km = 1000\ m \times 1000\ m = 10^6\ m^2$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از km^2 دقیقاً $(km)^2$ است و نباید آن را $k(m^2)$ و یا $10^3 m^2$ فرض کرد.

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1\ km = 10^{3}\ m \\ 1\ dm = 10^{-1}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{1\ km}{1\ dm} = \frac{10^{3}\ m}{10^{-1}\ m} = 10^{4} \Rightarrow \left(\frac{1\ km}{1\ dm}\right)^2 = 10^{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1\ km^2}{1\ dm^2} = 10^{8} \Rightarrow 1\ km^2 = 10^{8}\ dm^2$$

(۲) روش دوم :

$$1\ km^2 = x\ dm^2 \Rightarrow 1 \times (10^{3} m)^2 = x \times (10^{-1} m)^2 \Rightarrow 10^{6}\ m^2 = x \times 10^{-2}\ m^2$$

$$\Rightarrow 10^{6} = x \times 10^{-2} \Rightarrow x = 10^{8}$$

تبدیل یکای حجم :

فرض کنید می‌خواهیم مقدار یک حجم را که برحسب دکامترمکعب بیان شده است برحسب گیگامترمکعب بیان کنیم. برای این کار باید ببینیم هر یک دکامترمکعب چند گیگامترمکعب است.

$$1\ dam^3 = ?\ Gm^3$$

توجه کنید که منظور از حجم یک دکامترمکعب $(1\ dam^3)$ حجم یک مکعب به ضلع یک دکامتر است که این حجم برابر $1\ dam \times 1\ dam \times 1\ dam = 10\ m \times 10\ m \times 10\ m = 10^3\ m^3$ به دست می‌آید.

به عبارت دیگر منظور از dam^3 دقیقاً $(dam)^3$ است و نباید آن را $da(m^3)$ و یا $10\ m^3$ فرض کرد.

(۱) روش اول :

$$\begin{cases} 1\ dam = 10\ m \\ 1\ Gm = 10^{9}\ m \end{cases} \Rightarrow \frac{1\ dam}{1\ Gm} = \frac{10\ m}{10^{9}\ m} = 10^{-8} \Rightarrow \left(\frac{1\ dam}{1\ Gm}\right)^3 = 10^{-24}$$

$$\Rightarrow \frac{1\ dam^3}{1\ Gm^3} = 10^{-24} \Rightarrow 1\ dam^3 = 10^{-24}\ Gm^3$$

(۲) روش دوم :

$$1\ dam^3 = x\ Gm^3 \Rightarrow 1 \times (10\ m)^3 = x \times \left(10^{9} m\right)^3 \Rightarrow 10^{3}\ m^3 = x \times 10^{27}\ m^3$$

$$\Rightarrow 10^{3} = x \times 10^{27} \Rightarrow x = 10^{-24}$$

کمیت‌های فیزیکی

کمیت‌های نرده‌ای : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد با یکای معین کافی است.
کمیت‌هایی مثل طول ، مساحت ، حجم ، جرم ، زمان ، چگالی و دما نرده‌ای هستند.

کمیت‌های برداری : کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آن‌ها بیان یک عدد با یکای معین کافی نیست و باید راستا و سوی این کمیت‌ها مشخص شود.
کمیت‌هایی مثل جابه‌جایی ، سرعت و نیروی برداری هستند.

بردارهای برابر

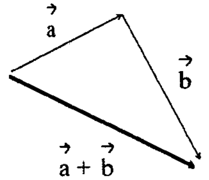
دو بردار در صورتی با هم برابرند که دارای اندازه ، راستا و سوی یکسانی باشند.

بردارهای قرینه

دو بردار در صورتی قرینه‌ی یک‌دیگرند که دارای اندازه و راستا یکسانی باشند و سوی آن‌ها متفاوت است.

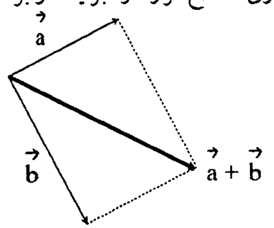
جمع دو بردار با استفاده از روش مثلث

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردار $\vec{b}$ را روی انتهای بردار $\vec{a}$ قرار می‌دهیم. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار $\vec{a}$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec{b}$ قرار دارد برآیند دو بردار است.

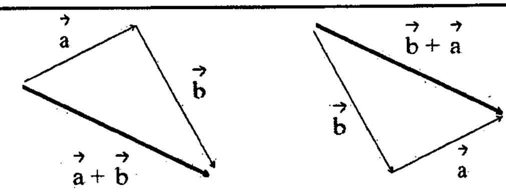


جمع دو بردار با استفاده از روش متوازی‌الاضلاع

در این روش برای محاسبه‌ی $\vec{a} + \vec{b}$ ، مطابق شکل زیر ابتدای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را روی هم قرار می‌دهیم. متوازی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم که بردارها دو ضلع مجاور آن را تشکیل می‌دهند. برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردارها و انتهای آن روی راس مقابل متوازی‌الاضلاع قرار دارد برآیند دو بردار است.



نمایش خاصیت جابه‌جایی جمع برداری (با استفاده از روش مثلث)



$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$

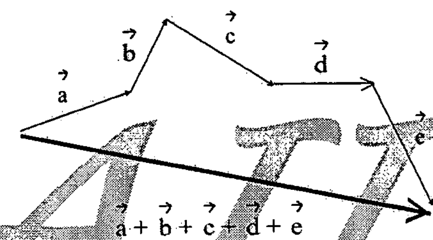
نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار

برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec X$ از نماد $|\vec X|$ یا X استفاده می‌شود.

توجه : برای نمایش بزرگی (اندازه‌ی) بردار $\vec X+\vec Y$ باید از نماد $|\vec X+\vec Y|$ استفاده کنیم و نمی‌توانیم از نماد X + Y استفاده کنیم. زیرا نماد X + Y به معنای مجموع بزرگی‌های (اندازه‌های) بردارهای $\vec X$ و $\vec Y$ است و به عبارت دیگر X + Y برابر $|\vec X|+|\vec Y|$ است.

جمع چند بردار

برای جمع کردن چند بردار مانند بردارهای $\vec a$، $\vec b$، $\vec c$، $\vec d$ و $\vec e$ می‌توانیم به این ترتیب عمل کنیم که مطابق شکل زیر از انتهای بردار اول، برداری مساوی بردار دوم و از انتهای بردار دوم، برداری مساوی بردار سوم و همین‌طور تا آخر . . . رسم می‌کنیم. مطابق شکل زیر برداری که ابتدای آن روی ابتدای بردار اول و انتهای آن روی انتهای بردار آخر قرار دارد برآیند بردارها است.



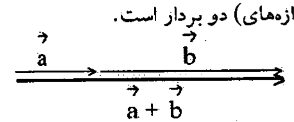
بردارهای هم‌راستا و هم‌سو :

اگر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$|\vec a+\vec b|=|\vec a|+|\vec b|$ یا $|\vec a+\vec b|=a+b$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

در این حالت جمع دو بردار هم‌سو است.



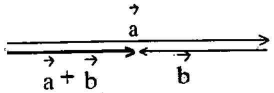
بردارهای هم‌راستا و ناهم‌سو :

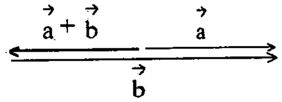
اگر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ هم‌راستا و ناهم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$|\vec a+\vec b|=\big||\vec a|-|\vec b|\big|$ یا $|\vec a+\vec b|=|a-b|$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار هم‌راستا و ناهم‌سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

در این حالت جمع دو بردار با برداری که بزرگی‌اش بزرگ‌تر است، هم‌سو خواهد بود.



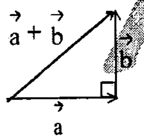


$|\vec a+\vec b|=a-b$ $\qquad$ $|\vec a+\vec b|=b-a$

بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار داریم :

$|\vec a+\vec b|=\sqrt{|\vec a|^2+|\vec b|^2}$ یا $|\vec a+\vec b|=\sqrt{a^2+b^2}$



ضرب عدد در بردار

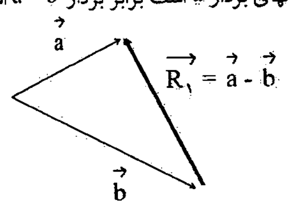
ضرب عدد مثبت در بردار : وقتی برداری را در عدد مثبتی ضرب می‌کنیم، راستا و سوی آن تغییر نمی‌کند و تنها بزرگی بردار در آن عدد ضرب می‌شود.

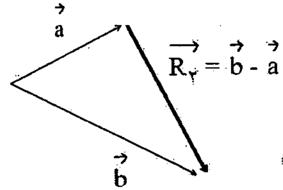
ضرب عدد منفی در بردار : وقتی برداری را در عدد منفی ضرب می‌کنیم، راستای آن تغییر نمی‌کند و سوی آن عکس می‌شود و بزرگی بردار در قدرمطلق آن عدد ضرب می‌شود.

تفریق دو بردار

برای به دست آوردن تفریق دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ مطابق شکل‌های زیر ابتدای بردارها را روی هم قرار می‌دهیم.

برداری که ابتدای آن روی انتهای بردار $\vec b$ و انتهای آن روی انتهای بردار $\vec a$ است برابر بردار $\vec a-\vec b$ است.





روش مثلث برای جمع دو بردار $\Leftarrow$ $\begin{cases}\vec b+\vec R_1=\vec a\Rightarrow\vec R_1=\vec a- \\ \vec a+\vec R_2=\vec b\Rightarrow\vec R_2=\vec b-\end{cases}$

با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود تفریق دو بردار خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی : $(\vec a-\vec b\neq\vec b-\vec a)$.

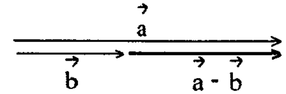
هم‌چنین با توجه به شکل‌های بالا نتیجه گرفته می‌شود بردارهای $\vec a-\vec b$ و $\vec b-\vec a$ قرینه‌اند و $|\vec a-\vec b|=|\vec b-\vec a|$.

بردارهای هم‌راستا و هم‌سو :

اگر بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ هم‌راستا و هم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right|$ یا $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |a - b|$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و هم‌سو برابر قدرمطلق تفریق بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

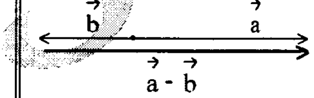


بردارهای هم‌راستا و ناهم‌سو :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا و ناهم‌سو باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ یا $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = a + b$

یعنی بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار هم‌راستا و ناهم‌سو برابر جمع بزرگی‌های (اندازه‌های) دو بردار است.

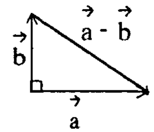


$|\vec{a} - \vec{b}| = a + b$

بردارهای عمود بر هم :

اگر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، برای بزرگی (اندازه‌ی) تفریق دو بردار داریم :

$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$ یا $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



بیشینه و کمینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار

برآیند دو بردار وقتی بیش‌ترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و هم‌سو باشند. بنابراین بیشینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $a + b$ است.

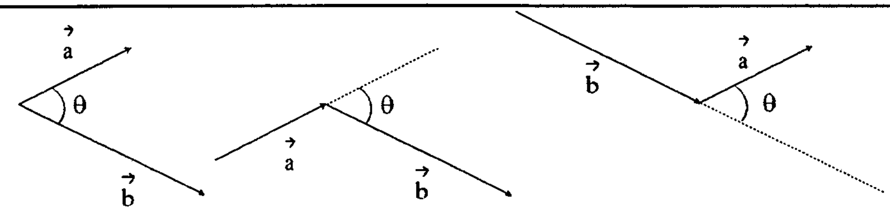
هم‌چنین برآیند دو بردار وقتی کم‌ترین بزرگی (اندازه) را دارد که بردارها هم‌راستا و ناهم‌سو باشند. بنابراین کمینه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $|a - b|$ است.

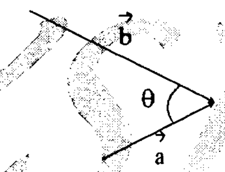
یعنی برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همواره داریم :

$|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b$

زاویه‌ی دو بردار

زاویه‌ی بین دو بردار هنگامی معلوم می‌شود که ابتدای دو بردار روی هم قرار بگیرند. در شکل‌های زیر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده است.





بزرگی اندازه‌ی برآیند دو بردار در حالت کلی

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

بزرگی اندازه‌ی تفریق دو بردار در حالت کلی

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

بزرگی اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه

بزرگی برآیند دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است و اندازه‌ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} \Rightarrow R = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 + 2aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow R = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

بزرگی اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه

بزرگی تفریق دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ که زاویه‌ی بین آن‌ها θ است و اندازه‌ی یکسان a دارند، به صورت زیر به دست می‌آید.

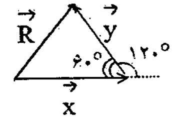
$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2aa\cos\theta}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos\theta} = a\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = a\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r = 2a\sin\frac{\theta}{2}$$

نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۹۰ درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۱۲۰ درجه است برابر a (هم‌اندازه با بردارها) است.

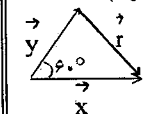


نکته: اندازه‌ی برآیند دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۶۰ درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۹۰ درجه است برابر $\sqrt{2}a$ است.

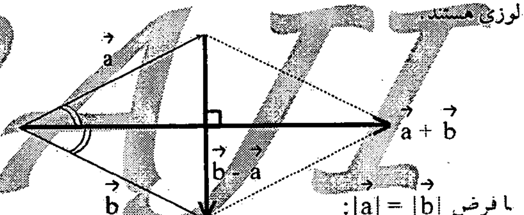
نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۱۲۰ درجه است برابر $\sqrt{3}a$ است.

نکته: اندازه‌ی تفریق دو بردار هم‌اندازه با a که زاویه‌ی بین آنها ۶۰ درجه است برابر a (هم‌اندازه با بردارها) است.



خواص جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه

با توجه به شکل زیر جمع بردارهای هم‌اندازه در راستای نیم‌ساز بردارها قرار می‌گیرد. و جمع و تفریق بردارهای هم‌اندازه بر هم عمود هستند. زیرا متوازی‌الاضلاعی که بردارها با یکدیگر می‌سازند لوزی است و قطرهای لوزی بر هم عمود و نیم‌ساز زاویه‌های لوزی هستند.

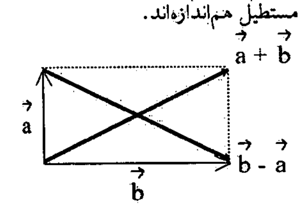


با فرض $|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

خواص جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم

با توجه به شکل زیر جمع و تفریق بردارهای عمود بر هم، هم‌اندازه هستند. زیرا متوازی‌الاضلاعی که بردارها تشکیل می‌دهند مستطیل است و قطرهای مستطیل هم‌اندازه‌اند.

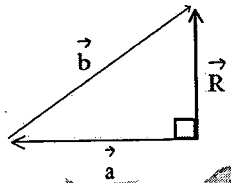
با فرض $\vec{a} \perp \vec{b}$:



عمود بودن برآیند بردارها بر یکی از بردارها

اگر برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{R}$ فرض کنیم و $\vec{R}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :

$\vec{R} \perp \vec{a}$:

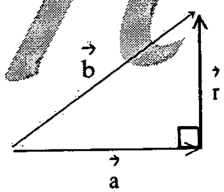


$$\Rightarrow R = \sqrt{b^2 - a^2}$$

عمود بودن تفریق بردارها بر یکی از بردارها

اگر تفریق دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را $\vec{r}$ فرض کنیم و $\vec{r}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود باشد، با توجه به شکل زیر داریم :

$\vec{r} \perp \vec{a}$:



$$\Rightarrow r = \sqrt{b^2 - a^2}$$

۲- دلیل اینکه لازم نیست برای همه کمیتهای فیزیکی یکای مستقلی تعریف کنیم، کدام است؟

۱) ارزش و اهمیت کمیت‌ها با هم فرق می‌کنند.
۲) بعضی از کمیت‌ها فقط جنبهٔ ذهنی دارند.
۳) قانون‌های فیزیکی کمیت‌ها را به هم مربوط می‌کنند.
۴) اندازه‌های فوق‌العاده کوچک برای بعضی از کمیت‌ها وجود دارند .

گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است. از آنجاکه کمیت‌های مختلف به کمک قانون های فیزیکی با هم ارتباط دارند، لازم نیست برای تمام کمیت‌های فیزیکی یکای مستقل تعریف کنیم.

۳- وقتی می‌گوییم $\Delta W = ۰/۰۸j$ این اعلام نتیجه چندرقم معنی دار دارد؟

۱) یک رقم ۲) دو رقم ۳) سه رقم ۴) چهار رقم

گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۴- با متری که تقسیم بندی آن ۱۰cm است. طول پاره خطی اندازه‌گیری شده است. کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند نتیجه‌ی این اندازه‌ی گیری باشد؟

۱) ۵۲ سانتیمتر ۲) ۴۹ سانتیمتر ۳) ۵۰ سانتیمتر ۴) ۵۰/۵ سانتیمتر

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۵- طول جسمی را با یک خطکش که بر حسب میلیمتر مدرج شده است، اندازه‌گیری کرده‌ایم، کدام گزینه درست بیان شده است؟

۱) ۲۱ سانتیمتر ۲) ۲۱/۱۵ سانتیمتر ۳) ۲۰/۹ سانتیمتر ۴) ۲۰۹/۵ میلیمتر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در گزینه‌های ۱و۲و۴ دقت دستگاه در نظر گرفته نشده است.

۶- کدام اندازه نتیجه اندازه‌گیری با یک پیمانه ۴ سانتی‌متر مکعبی باشد؟

۱) $۸Cm^۳$ ۲) $۱۰Cm^۳$ ۳) $۱۲Cm^۳$ ۴) $۲۰Cm^۳$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نتیجه‌ی اندازه‌گیری با یک پیمانه‌ی ۴ سانتی‌متر مکعبی باید مضرب صحیحی از ۴ باشد، فقط گزینه‌ی ۲ این شرط را ندارد.

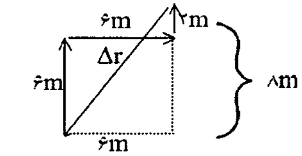
۷- در یک رابطه‌ی فیزیکی بین کمیتهای برداری $\vec{C}$ و $\vec{D}$ و کمیت نرده‌ای m رابطه‌ی $\vec{C} = \frac{\vec{D}}{m}$ برقرار است در اینصورت کدام گزینه درست است.

۱) $\vec{C} + \vec{D} = \left(\frac{m+۱}{m}\right)\vec{D}$ ۲) $\vec{C} - \vec{D} = \left(\frac{m-۱}{m}\right)\vec{D}$
۳) $\vec{D} = m\vec{C}$ ۴) هر سه گزینه الزاماً درست است.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در رابطه‌ی قانون دوم $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ نمی‌توان شتاب و نیرو را با هم جمع کرد اما $\vec{F} = m\vec{a}$ درست است.

۸- شخصی ابتدا ۶ متر به طرف شمال و سپس ۶ متر به طرف شرق و در نهایت ۲ متر دیگر به طرف شمال حرکت می‌کند. بزرگی و جهت بردار جابه‌جایی او کدام است؟

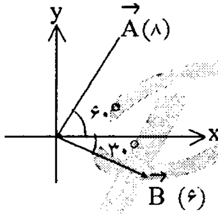
۱) ۱۰m، شمال شرقی ۲) ۱۴m، شمال ۳) ۱۰m، شمال ۴) ۱۴m، شمال شرقی



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\Delta r = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰m$

۹- در بردار A و B مطابق شکل داده‌اند اگر $\vec{B} + \vec{H} = \vec{A} - \vec{H}$ باشد، بزرگی بردار $\vec{H}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۳/۵



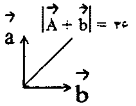
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\vec{B} + \vec{H} = \vec{A} - \vec{H} \Rightarrow ۲\vec{H} = \vec{A} - \vec{B} \Rightarrow \vec{H} = \frac{۱}{۲}(\vec{A} - \vec{B})$

چون A و B بر هم عمودند: $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰ \Rightarrow |\vec{H}| = \frac{۱۰}{۲} = ۵m$

۱۰- برآیند دو بردار عمود بر هم $\vec{a}$, $\vec{b}$ ، ۳۶ واحد است. اگر $a = \frac{۳}{۴}b$ باشد، طول بردار a چند واحد است؟

۱) ۲۸/۸ ۲) ۲۱/۶ ۳) ۹ ۴) ۲۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$۳۶ = \sqrt{a^۲ + b^۲} \Rightarrow ۳۶ = \sqrt{\frac{۹}{۱۶}b^۲ + b^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}b^۲} \Rightarrow ۳۶ = \frac{۵}{۴}b$$

$b = \frac{۱۴۴}{۵} = ۲۸/۸$ واحد $a = \frac{۳}{۴} \times ۲۸/۸ = ۲۱/۶$

۱۱- $\left(\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right)$ از جنس کدام کمیت فیزیکی است؟

۱) میدان الکتریکی ۲) انرژی ۳) میدان مغناطیسی ۴) سرعت

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سرعت نور $C = \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

۱۲- برآیند دو بردار ۸ و ۶ واحدی کدامیک از گزینه‌های زیر **نمی‌تواند** باشد؟

۱) ۱۴ واحد ۲) ۱۰ واحد ۳) ۱ واحد ۴) ۲ واحد

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی برآیند دو بردار نمی‌تواند از اندازه‌ی مجموع اندازه‌های دو بردار بیشتر و از تفاضل اندازه‌ی دو بردار کمتر باشد.

۱۳- در یک اندازه‌گیری طول جسمی بر حسب متر $۸/۲۲ \times ۱۰^۲$ گزارش شده است به ترتیب رقم غیر قطعی و دقت اندازه‌گیری بر حسب میلی‌متر کدام است؟

۱) ۰ ، ۱۰ ۲) ۲ ، ۱۰ ۳) ۲ ، $۱۰^۳$ ۴) ۰ ، $۱۰^۳$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توان‌دهی در تعداد ارقام با معنا و رقم غیر قطعی تأثیری ندارد ولی برای محاسبه دقت

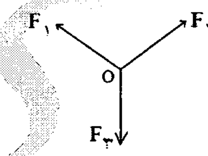
اندازه‌گیری بایستی مرتبه رقم غیر قطعی را در توان‌دهی نیز ضرب کنیم: $\text{دقت} = 0/01 \times 10^{2}\,m = 10^{3}\,mm$

۱۴- دقت یک ترازو یک گرم است. کدام یک از مقادیر داده شده می‌تواند حاصل اندازه گیری با این ترازو باشد؟

۱) ۲/۵ گرم ۲) ۰/۲۵ گرم ۳) ۲/۰ گرم ۴) ۲۵ گرم

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
تنها گزینه ۴ دارای دقت $1g$ می‌باشد.

۱۵- در شکل مقابل برآیند نیروهای وارد بر نقطه‌ی O صفر است. اگر F_2 به اندازه‌ی $10N$ در همان جهت افزایش یابد، برآیند نیروهای وارد بر نقطه‌ی O چند نیوتن می‌شود؟



۱) ۵
۲) ۲/۵
۳) ۱۵
۴) ۱۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه برآیند چند بردار صفر شود، حاصل‌جمع تمام بردارهای دیگر غیر از یکی برابر قرینه‌ی آن بردار است، یعنی:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{o} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=-\vec{e}$$

با استفاده از این نکته می‌توانیم بگوییم:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{o} \Rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_3=-\vec{F}_2$$

یعنی برآیند $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_3$ قرینه‌ی بردار $\vec{F}_2$ است. پس اگر F_2 به اندازه‌ی $10N$ افزایش یابد، بردار برآیند کل همان $10N$ خواهد بود.

۱۶- دو بردار هم اندازه با یکدیگر زاویه‌ی 74° ساخته‌اند. نسبت بزرگی برآیند آنها به بزرگی تفاضل آنها کدام است؟

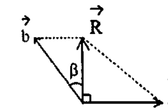
۱) ۱ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۰/۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بزرگی برآیند و تفاضل دو بردار هم اندازه که با هم زاویه‌ی α می‌سازند. به ترتیب از روابط $R = 2a\,Cos\frac{\alpha}{2}$ و $R' = 2a\,Sin\frac{\alpha}{2}$ بدست می‌آید. $\frac{R}{R'} = Cotg\frac{\alpha}{2} = Cotg\,37 = \frac{0/8}{0/6} = \frac{3}{4}$

۱۷- برآیند دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ عمود و $\sqrt{3}$ برابر $\vec{a}$ می‌باشد. زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$tg\beta = \frac{a}{R} = \frac{a}{\sqrt{3}a} \Rightarrow \beta = 30^{\circ}$$

$$\Rightarrow \text{زاویه دو بردار } \hat{\alpha} = 90 + 30 = 120^{\circ}$$

۱۸- در کدام زاویه، دو بردار بیشترین مقدار تفاضل را دارند؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) صفر

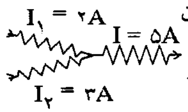
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۱۹- گزینه **نادرست** را مشخص کنید؟

۱) کمیت‌هایی که برای مشخص کردن آنها برحسب یکای معین ، تنها یک عدد کفایت می‌کندرا کمیت نرده‌ای می‌گویند.

۲) کمیت‌هایی که دارای بزرگی و جهت هستند برداری‌اند.
۳) کمیت‌هایی که یکاهای آنها بطور مستقل و بدون رابطه با یکاهای دیگر تعریف شده‌اند را کمیت‌های اصلی گویند.
۴) یکاهای کمیتهای فرعی با استفاده از یکاهای اصلی تعیین می‌گردد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید توجه داشت که تعریف دقیق کمیت‌های برداری این است: کمیتهایی که بزرگی و جهت دارند، و از قاعده‌ی جمع برداری پیروی می‌کند. به عنوان مثال جریان الکتریکی دارای جهت و اندازه است اما از جمع برداری پیروی نمی‌کند. یا می‌گویند زمان به جلو می‌روددر صورتی که بردار نیست.



۲۰- شخصی طول پاره‌خطی را با خطکش میلی‌متری اندازه گرفته و این طول ۱۲ میلی‌متر است. اگر شخص نتیجه را ۱۲/۰ میلی‌متر گزارش کند:

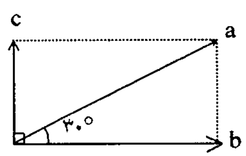
۱) بیان او صحیح است ۲) دقت گزارش بیشتر از مقدار واقعی است
۳) بیان او بصورت کلّی بی اساس است ۴) دقت گزارش کمتر از مقدار واقعی است

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دقت خطکش کمترین درجه‌بندی روی آن یعنی میلی متر است در صورتیکه گزارش شخص دقتی برابر دهم میلی‌متر دارد که بیشتر از دقت خطکش است.

۲۱- اگر $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ ، وقتی c, b, a را از یک نقطه رسم می‌کنیم، b و c بر هم عمودند و a با b زاویه‌ی 30° می‌سازد. کدام گزینه صحیح است؟ (می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو زاویه‌ی 30° نصف وتر است.)

۱) $3a = b\sqrt{2}$ ۲) $3b = a\sqrt{2}$ ۳) $2b = a\sqrt{3}$ ۴) $2a = b\sqrt{3}$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.(قضیه‌ی فیثاغورس)



$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ c = \frac{a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2b = \sqrt{3}$$

۲۲- بیشینه برآیند دو نیروی F_1 و F_2 برابر $50N$ و کمینه مقدار آنها $30N$ است. بزرگی F_1 و F_2 کدام گزینه است؟

۱) $40N$ ، $30N$ ۲) $40N$ ، $10N$ ۳) $30N$ ، $20N$ ۴) $35N$ ، $15N$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} F_1 + F_2 = 50N \\ F_1 - F_2 = 30N \end{array}\right\} F_1 = 40N \text{ و } F_2 = 10N$$

۲۳- نسبت بزرگی برآیند دو بردار عمود بر هم به بزرگی تفاضل آن‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر زاویه دو بردار 90° باشد (چهار ضلعی مستطیل) برآیند هم اندازه با تفاضل می‌باشد.

$$R = R' = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \frac{R}{R'} = 1$$

۲۴- دو کمیت برداری $\vec{A}$ و $\vec{A'}$ و کمیت نرده‌ای $\alpha > 0$ مفروض‌اند به طوریکه $\vec{A'} = \alpha\vec{A}$ در این صورت کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $A' + A = (\alpha + 1)\,A$ ۲) $A' - A = (\alpha - 1)A$

۳) $A = \frac{A'}{\alpha}$ ۴) هر سه گزینه صحیح است.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. دو کمیت برداری را در صورتی می‌توان جمع یا تفریق نمود که حتماً از یک جنس باشند در صورتی که در مورد A و A' این شرط معلوم نیست. اگر α کمیتی بدون بعد بود، مثلاً یک عدد بود هر سه گزینه الزاماً صحیح بودند. مثلاً: $F = ma$ و $a = \frac{F}{m}$ اما $F \pm a$ تعریف نمی‌شود زیرا دو کمیت هم‌جنس نیستند.

۲۵- اگر A و B دو کمیت برداری و m یک کمیت نرده‌ای مثبت باشد و $\vec{B} = m\vec{A}$ باشد. کدام یک از موارد زیر الزاماً درست است؟

۱) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A}(m + ۱)$ ۲) $\vec{B} - \vec{A} = \vec{A}(m - ۱)$

۳) $\vec{A} = \frac{\vec{B}}{m}$ ۴) هر سه گزینه الزاماً درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ممکن است که m یک کمیت نرده‌ای مثبت دارای بعد باشد و در نتیجه بعد $m\vec{A}$ با بعد $\vec{B}$ یکسان نباشد در نتیجه جمع و تفریق A و B امکان‌پذیر نباشد ولی حتی در این صورت ضرب و تقسیم آنها الزاماً بلامانع است.

به مثال زیر توجه کنید: m را زمان (t) و $\vec{A}$ را سرعت (V) در نظر بگیرید. $m\vec{A} = Vt = x\ ,\ [x] \neq [V]$

۲۶- جرم جسمی را توسط ترازویی که دقت آن یک صدم کیلوگرم است اندازه گیری کرده‌ایم. کدام گزینه نتیجهٔ اندازه‌گیری را درست بیان می‌کند؟

۱) ۲/۱ کیلوگرم ۲) ۲۱۰۰ گرم ۳) ۲×۱۰^{-۳} تن ۴) $۲/۰۱ \times ۱۰^{-۳}$ تن

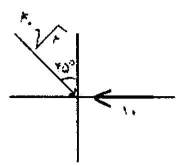
گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۲۷- کدام‌یک از اعداد زیر طول یک میز را با دقت بیشتری نشان می‌دهد؟

۱) ۲۵۳۲ میلی متر ۲) ۲/۵۳۲۰ متر ۳) ۲۵۳/۲ سانتی متر ۴) ۲۵/۳۲ دسی متر

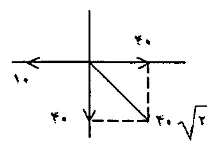
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دقت اندازه‌گیری از روی واحد آن و با در نظر گرفتن ارزش مکانی اولین رقم سمت راست عدد گزارش معلوم شده، معلوم می‌شود. در گزینه‌ی ۱ دقت از مرتبه‌ی میلی متر است. در گزینه‌ی ۲ دقت از مرتبه‌ی $۱۰^{-۴}$ متر یعنی دهم میلی متر است. در گزینه‌ی ۳ دقت از مرتبه‌ی دهم سانتی متر یعنی میلی متر است. گزینه‌ی ۴ دقت از مرتبه‌ی صدم دسی متر یعنی میلی متر است. پس دقیق‌ترین مورد گزینه‌ی ۲ است.

۲۸- در شکل مقابل، اندازه مجموع دو بردار کدام گزینه‌ی زیر است؟



۱) ۳۰ ۲) ۳۴۰

۳) ۷۰ ۴) ۵۰

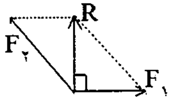


گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. $R = \sqrt{(۴۰ - ۱۰)^۲ + ۴۰^۲} = ۵۰$

۲۹- برآیند دو نیروی $F_۱$ و $F_۲$ بر $F_۱$ عمود و $\sqrt{۲}$ برابر آن می‌باشد. نسبت $\frac{F_۲}{F_۱}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



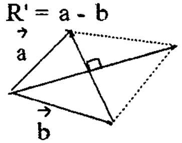
$$R^۲ + F_۱^۲ = F_۲^۲ \Rightarrow \left(\sqrt{۲}F_۱\right)^۲ + F_۱^۲ = F_۲^۲ \Rightarrow ۳F_۱^۲ = F_۲^۲ \Rightarrow \frac{F_۲}{F_۱} = \sqrt{۳}$$

۳۰- برآیند دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر «تفاضل آنها» عمود است. در این صورت نسبت $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) نامشخص ۴) ۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تنها در صورتی «برآیند دو بردار تفاضل همان دو بردار است عمود خواهد بود» که دو بردار، هم‌اندازه باشند بنابراین:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \left|\frac{\vec{a}}{\vec{b}}\right| = ۱$$



راه دوم: تفاضل و برآیند دو بردار اقطار متوازی‌الاضلاع مرسوم با آن‌ها است. وقتی دو قطر بر هم عمودند شکل لوزی است....

۳۱- برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بر محور y عمود است. اگر $\vec{A} = \vec{i} - ۲\vec{j}$ و بردار $\vec{B}$ با جهت مثبت محور x زاویه‌ی $۴۵°$ بسازد، بردار $\vec{B}$ کدام است؟

۱) $۲\vec{i} + ۲\vec{j}$ ۲) $\vec{i} + \vec{j}$ ۳) $-۲\vec{i} - ۲\vec{j}$ ۴) $\vec{i} + ۲\vec{j}$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

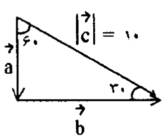
$\vec{B} = x\vec{i} + y\vec{j}\ \ ,\ \ x = y \Rightarrow \vec{B} = x\vec{i} + x\vec{j}$

برآیند دو بردار تنها مؤلفه‌ی x دارد. $x - ۲ = ۰$

$\Rightarrow x = +۲ \Rightarrow \vec{B} = ۲\vec{i} + ۲\vec{j}$

۳۲- اندازه مجموع دو بردار عمود بر هم ۱۰ واحد است و یکی از بردارها با مجموع دو بردار زاویه‌ی $۶۰°$ می‌سازد. طول بردار کوچکتر چقدر است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) ۱۰ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $a = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ = ۵$: (ضلع مقابل به $۳۰°$)

۳۳- اگر اندازه‌ی مجموع دو بردار بااندازه‌ی تفاضل آنها برابر باشد، زاویه‌ی بین آن دو بردار چند درجه است؟

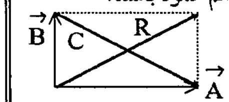
۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید دو بردار بر هم عمود باشد.

۳۴- زاویه‌ی بین دو بردار چند درجه باشد، تا اندازه‌ی بردار برآیند با اندازه‌ی تفاضل آنها برابر باشد؟

۱) صفر درجه ۲) $۱۸۰°$ ۳) $۴۵°$ ۴) $۹۰°$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در مستطیل و مربع قطرها با هم برابرند، پس باید دو بردار بر هم عمود باشند.



۳۵- فاصله‌ی بین دو نقطه را، با دقت ۱ mm، ۲۵۰۰ mm اندازه گرفته‌ایم. نمادگذاری علمی درست این اندازه کدام است؟

۱) $۲/۵۰۰ \times ۱۰^{۳} mm$ ۲) $۲/۵۰ \times ۱۰^{۳} mm$ ۳) $۲/۵ \times ۱۰^{۳} mm$ ۴) هر سه مورد

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. توضیح گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳:

۱) $۲/۵۰۰ \times ۱۰^{۳} mm \Rightarrow$ دقت $= ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۳} mm = ۱mm$

مرتبه ی $۱۰^{-۳}$

۲) $۲/۵۰ \times ۱۰^{۳} mm \Rightarrow$ دقت $= ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۳} mm = ۱۰mm$

مرتبه ی $۱۰^{-۲}$

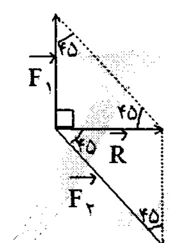
۳) $۲/۵ \times ۱۰^{۳} mm \Rightarrow$ دقت $= ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۳} mm = ۱۰۰mm$

مرتبه ی $۱۰^{-۱}$

با توجه به این که در صورت سوال، بر دقت ۱ mm تاکید شده، جواب صحیح گزینه ی ۱ است.

۳۶- هرگاه برآیند دو نیروی $\vec F_۱$ و $\vec F_۲$ نیرویی عمود بر $\vec F_۱$ و با آن هم‌اندازه باشد، زاویه‌ی بین دو بردار $\vec F_۱$ و $\vec F_۲$ چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۳۵



گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۳۷- کدام یک از یکاهای داده شده یکای اصلی نمی‌باشد ؟

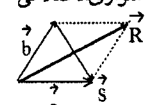
۱) کیلوگرم ۲) ثانیه ۳) ژول ۴) متر

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۸- اندازه‌ی برآیند دو بردار متقاطع برابر اندازه‌ی تفاضل دو بردار است. اگر اندازه‌ی دو بردار ۶ و ۸ واحد باشد، اندازه‌ی تفاضل دو بردار کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

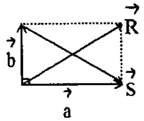
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. همان‌طور که از رسم شکل پیدا است بردار برآیند و تفاضل دو قطر، متوازی‌الاضلاعی هستند که بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ اضلاع آن هستند.



$\vec R = \vec a + \vec b$

$\vec S = \vec a - \vec b$

اگر اندازه‌ی دو قطر با هم برابر شود، این شکل به یک مستطیل تبدیل می‌شود که در آن دو قطر با هم مساوی‌اند.



$|R| = |S|$

بنابراین نتیجه می‌گیریم اگر اندازه‌ی برآیند دو بردار با اندازه‌ی تفاضل آنها برابر باشد، دو بردار بر هم عموداند.

$|R| = |S| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} = \sqrt{۶^{۲} + ۸^{۲}} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

راه حل دیگر:

اندازه برآیند دو بردار متقاطع با زاویه بین نامشخص $|\vec R| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + ۲ab\cos\alpha} \xrightarrow[\cos ۹۰ = ۰]{\alpha = ۹۰} |\vec R| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$

اندازه تفاضل دو بردار متقاطع با زاویه بین نامشخص $|\vec S| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\alpha} \xrightarrow[\cos ۹۰ = ۰]{\alpha = ۹۰} |\vec S| = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$

$\Rightarrow \alpha = ۹۰ , |R| = |S|$

نکته‌ی درسی: اگر دو بردار بر هم عمود باشند، اندازه‌ی بردار برآیند با اندازه‌ی بردار تفاضل برابر است.

۳۹- برآیند دو بردار $\vec A = ۳\vec i + ۴\vec j$ و $\vec B = ۴\vec j - ۱۱\vec i$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۴۵ - ۴) ۱۳۵ -

گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

$\vec A + \vec B = -۸\vec i + ۸\vec j \Rightarrow tg\,\theta = \frac{۸}{-۸} = -۱ \Rightarrow \theta = ۱۳۵$

بردار برآیند در ربع دوم است.

۴۰- کدام یک از مقادیر زیر **نمی‌تواند** حاصل اندازه‌گیری توسط یک خط کش میلی‌متری باشد؟

۱) ۲۷mm ۲) ۵/۶cm ۳) ۱/۷mm ۴) ۱۰mm

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. کمترین مقداری که یک خط کش میلی‌متری می‌تواند اندازه‌گیری کند، یک میلی‌متر است و با این خط کش نمی‌توان ۰/۷mm را اندازه‌گیری کرد و در حالت کلی هر وسیله‌ی اندازه‌گیری، مقادیر کوچکتر از دقت خود را نمی‌تواند اندازه‌گیری کند.

۴۱- توان فرستنده یک خفاش ۰/۰۰۰۳۶۰ وات اندازه گیری شده است. دقت اندازه‌گیری برحسب میکرووات کدام است؟

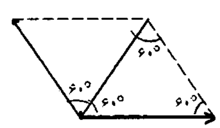
۱) $۱۰^{-۶}$ ۲) $۱۰^{-۳}$ ۳) ۱ ۴) $۱۰^{-۱۲}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دقت اندازه‌گیری = مرتبه‌ی اولین رقم سمت راست ⇐ دقت : $۱۰^{-۶}W = ۱۰^{-۶} \times ۱۰^{۶}\mu W = ۱\mu W$

۴۲- اندازه‌ی مجموع دو بردار هم‌طول با اندازه هر یک از دو بردار برابر است. زاویه بین دو بردار چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

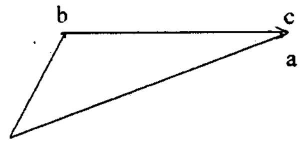


گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۳- اگر $\vec a = \vec b + \vec c$، $a = ۷ , b = ۳$ باشد، c چه قدر می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۱۳ ۴) ۲۰

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث، هر ضلع، از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از تفاضل همان دو ضلع

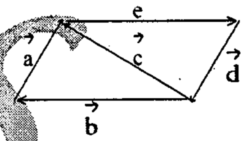


بزرگ‌تر است. پس: $|a - b| \le c \le a + b$

حالت‌های تساوی در $|a - b| \le c \le a + b$ ، مربوط به وضعیتی است که $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم‌امتداد باشند. c می‌تواند ۵ باشد:

$a = 7, b = 3$ و $|a - b| \le c \le a + b \Rightarrow 4 \le c \le 10$

۴۴- در شکل مقابل، اندازه‌ی تمامی بردارها یکسان و برابر ۳ واحد است، اندازه‌ی بردار $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{d} - 2\vec{e}$ کدام است؟



۱) $3\sqrt{3}$ ۲) ۳

۳) صفر ۴) $\sqrt{3}$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دقت شود که با توجه به شکل، $\vec{d} = -\vec{a}$ و $\vec{e} = -\vec{b}$ است.

$$\vec{A} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{d} - 2\vec{e} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\vec{A} = (2\vec{a} - \vec{a}) + (-\vec{b} + 2\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

رابطه‌ی اخیر به کمک جمع برداری بدست آمده است.

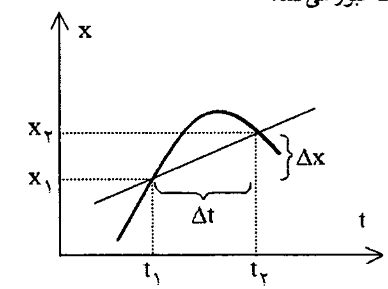
$$|\vec{A}| = |2\vec{a} - \vec{b} + \vec{d} - 2\vec{e}| = |\vec{c}| = 3$$

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ سرعت متوسط در بازه ی زمانی t_1 تا t_2

سرعت متوسط یک کمیت برداری است که با بردار جابه‌جایی هم‌جهت (هم‌راستا و هم‌سو) است.
یکای سرعت متوسط در SI ، متر بر ثانیه (m/s) است.

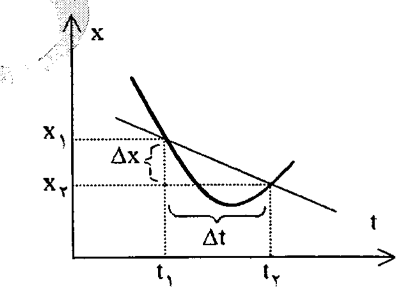
تعیین سرعت متوسط به کمک نمودار مکان - زمان

با توجه به رابطه‌ی $\overline{V} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ برای سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 و شکل‌های (۱) و (۲)، سرعت متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر شیب خط راستی است که از دو لحظه‌ی t_1 و t_2 از منحنی نمودار مکان - زمان متحرک عبور می‌کند.



شکل (۱)

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$



شکل (۲)

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} < 0$

سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط در یک بازه‌ی زمانی خیلی کوچک به سرعت لحظه‌ای در لحظه‌های آن بازه‌ی زمانی نزدیک است و هر چه قدر این بازه‌ی زمانی کوچک‌تر انتخاب شود، مقدار سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در لحظه‌های آن بازه‌ی زمانی نزدیک‌تر می‌شود.
بنابراین برای محاسبه‌ی سرعت در لحظه‌ی دل‌خواه t_0 می‌توان یک بازه‌ی زمانی بسیار کوچک Δt را در نظر گرفت که لحظه‌ی t_0 را شامل می‌شود و سرعت متوسط را در بازه‌ی زمانی Δt حساب کرد و داریم :

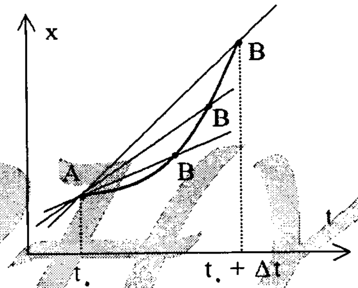
سرعت در لحظه t_0 ≈ سرعت متوسط در بازه زمانی Δt $\Rightarrow V(t_0) \approx \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$

در این روش هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر انتخاب شود، سرعت لحظه‌ای دقیق‌تر محاسبه می‌شود.
یکای سرعت لحظه‌ای در SI ، متر بر ثانیه (m/s) است.

تعیین سرعت لحظه‌ای به کمک نمودار مکان - زمان

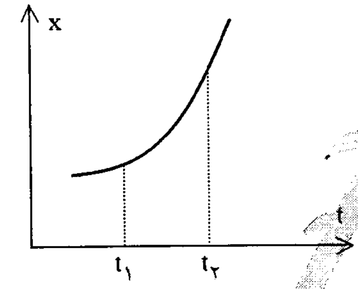
در نمودار شکل زیر برای محاسبه‌ی سرعت متوسط در لحظه‌ی t_0 بازه‌ی زمانی کوچک Δt که لحظه‌ی t_0 ابتدای آن است در نظر گرفته شده است. سرعت در لحظه‌ی t_0 تقریبا برابر سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی کوچک Δt و در نتیجه تقریبا برابر شیب خطی است که از نقاط A و B عبور می‌کند.
هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر شود، سرعت در لحظه‌ی t_0 به سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی Δt و در نتیجه شیب خطی که از نقاط A و B عبور می‌کند نزدیک‌تر می‌شود.
هم‌چنین هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر شود، نقطه‌ی B به نقطه‌ی A نزدیک شده و خطی که از نقاط A و B

عبور می‌کند به خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A نزدیک‌تر می‌شود.
بنابراین سرعت در لحظه‌ی t_0 برابر شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی t_0 است.

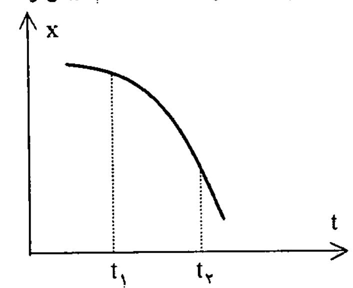


مقایسه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) سرعت در لحظه‌های مختلف به کمک نمودار مکان - زمان

در نمودار شکل (۱) شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌های t_1 و t_2 مثبت است و شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی t_2 از شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است. بنابراین بزرگی سرعت متحرک در لحظه‌ی t_2 از بزرگی سرعت متحرک در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است.
در نمودار شکل (۲) شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌های t_1 و t_2 منفی است و شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی t_2 از شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی t_1 منفی‌تر است. بنابراین بزرگی سرعت متحرک در لحظه‌ی t_2 از بزرگی سرعت متحرک در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است.



شکل (۱)



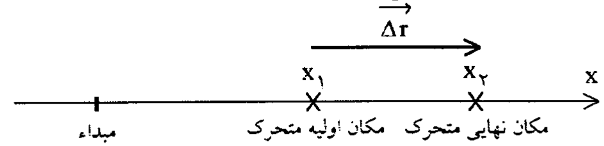
شکل (۲)

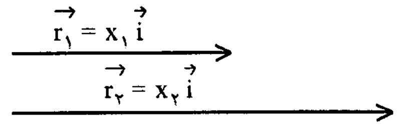
برای مقایسه‌ی بزرگی سرعت در لحظه‌های مختلف حرکت باید قدرمطلق شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان را در لحظه‌های مختلف با یک‌دیگر مقایسه کنیم.

اگر منحنی نمودار مکان - زمان خط راست باشد :

اگر منحنی نمودار مکان - زمان یک حرکت مطابق شکل‌های زیر خط راست باشد، شیب خط مماس بر آن در لحظه‌های مختلف ثابت و در نتیجه سرعت متحرک در لحظه‌های مختلف ثابت است. بنابراین حرکت متحرک نه تندشونده است و نه کندشونده.

نمایش مکان و جابه‌جایی (تغییر مکان) در حرکت بر روی خط راست



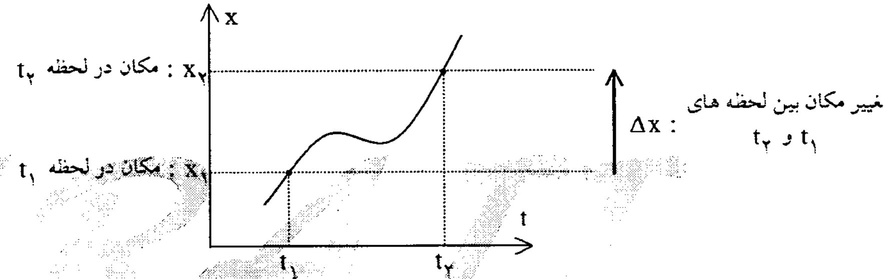


$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x \vec{i}$$

در حرکت بر روی خط راست اگر مبداء مختصات بر راستای حرکت انتخاب شود و راستای حرکت به عنوان محور مختصات در نظر گرفته شود، بردارهای مکان و جابه‌جایی (تغییر مکان) همواره در یک راستا (راستای حرکت) قرار می‌گیرند. بنابراین در حرکت بر روی خط راست می‌توان مکان متحرک را با عدد x و جابه‌جایی متحرک را با عدد Δx مشخص کرد.

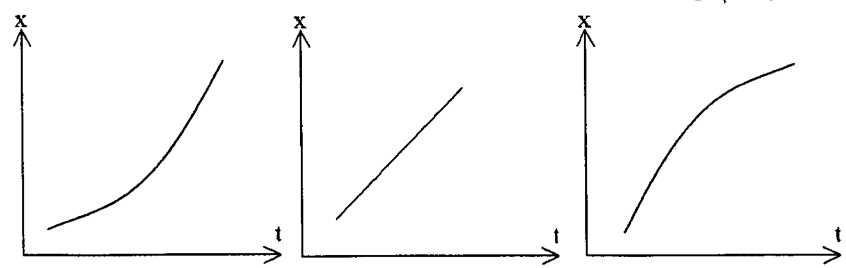
نمودار مکان - زمان

برای توصیف حرکت یک جسم در حرکت بر روی خط راست می‌توان از نموداری که مکان جسم را بر حسب زمان نشان می‌دهد استفاده کرد.

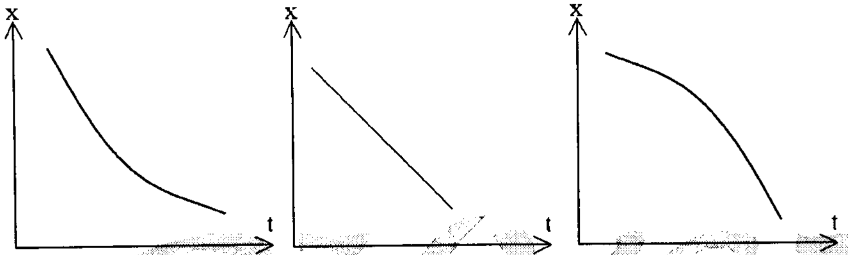


تشخیص جهت حرکت با کمک نمودار مکان - زمان

اگر منحنی نمودار مکان - زمان مطابق شکل (۱) دارای شیب مثبت و صعودی باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت انجام می‌شود و اگر منحنی نمودار مکان - زمان مطابق شکل (۲) دارای شیب منفی و نزولی باشد، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی انجام می‌شود.



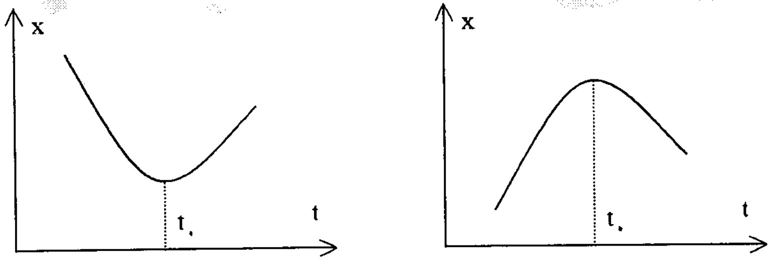
شکل (۱) - الف　　شکل (۱) - ب　　شکل (۱) - ج



شکل (۲) - الف　　شکل (۲) - ب　　شکل (۲) - ج

تشخیص لحظه‌ی تغییر جهت حرکت با کمک نمودار مکان - زمان

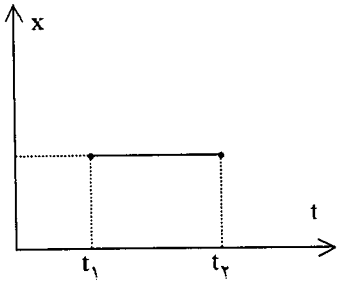
اگر شیب منحنی نمودار مکان - زمان مطابق شکل‌های (۱) و (۲) از مثبت به منفی و یا از منفی به مثبت تبدیل شود، جهت حرکت متحرک در لحظه‌ی تغییر علامت شیب نمودار (که در این شکل‌ها لحظه‌ی t_0 است) تغییر می‌کند.



شکل (۱)　　شکل (۲)

توقف و سکون در نمودار مکان - زمان

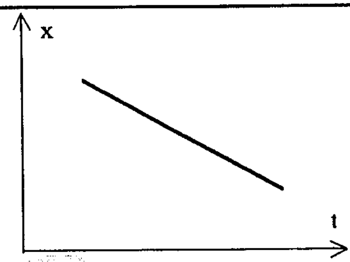
اگر منحنی نمودار مکان - زمان مطابق شکل زیر یک خط راست موازی محور زمان باشد، معنی آن این است که در مکان متحرک در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 ثابت بوده است و متحرک در این بازه‌ی زمانی ساکن است.

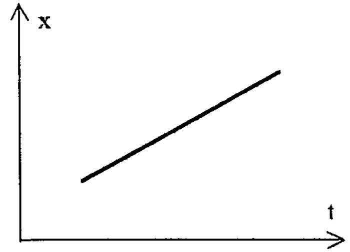


سرعت متوسط

متوسط جابه‌جایی متحرک در واحد زمان را سرعت متوسط متحرک می‌گوییم. برای محاسبه‌ی سرعت متوسط متحرک در هر بازه‌ی زمانی، جابه‌جایی متحرک را در آن بازه‌ی زمانی به مدت زمان آن بازه‌ی زمانی تقسیم می‌کنیم.

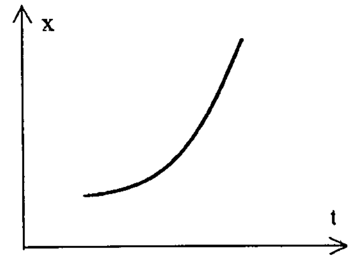
فرض می‌کنیم متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب در مکان‌های x_1 و x_2 قرار دارد. اگر سرعت متوسط متحرک را با نماد $\overline{V}$ نشان دهیم داریم :





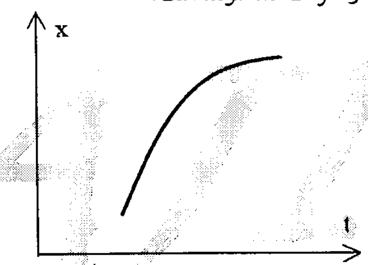
اگر منحنی نمودار مکان - زمان یک منحنی صعودی باشد که از بالا مقعر (کاو) دیده می‌شود :

در این صورت شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان که مثبت است در حال افزایش است و در نتیجه بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و حرکت تند شونده است.



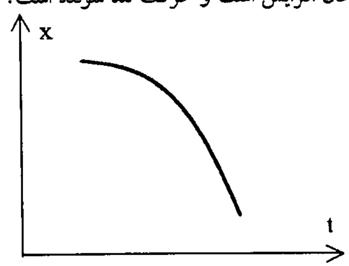
اگر منحنی نمودار مکان - زمان یک منحنی صعودی باشد که از بالا محدب (کوژ) دیده می‌شود :

در این صورت شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان که مثبت است در حال کاهش است و در نتیجه بزرگی سرعت متحرک در حال کاهش است و حرکت کند شونده است.



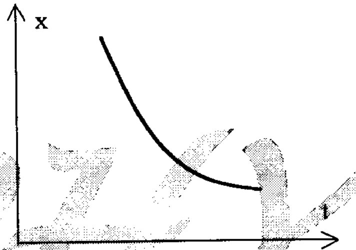
اگر منحنی نمودار مکان - زمان یک منحنی نزولی باشد که از بالا محدب (کوژ) دیده می‌شود :

در این صورت شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان که منفی است در حال کاهش (منفی‌تر شدن) است و در نتیجه بزرگی سرعت متحرک در حال افزایش است و حرکت تند شونده است.



اگر منحنی نمودار مکان - زمان یک منحنی نزولی باشد که از بالا مقعر (کاو) دیده می‌شود :

در این صورت شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان که منفی است در حال افزایش (نزدیک شدن به صفر) است و در نتیجه بزرگی سرعت متحرک در حال کاهش است و حرکت کند شونده است.



حرکت یکنواخت بر خط راست

حرکت یکنواخت بر خط راست حرکتی است که در آن سرعت لحظه‌ای متحرک در تمام لحظه‌ها یکسان است. هم‌چنین حرکت یکنواخت بر خط راست حرکتی است که در آن سرعت متوسط متحرک در تمام بازه‌های زمانی دل‌خواه یکسان و برابر سرعت لحظه‌ای متحرک است.

$\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $\overline{V}=V \Rightarrow V=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = V\Delta t$

اگر متحرک حرکت خود را در لحظه‌ی t_0 و از مکان x_0 آغاز کرده باشد، و هم‌چنین در لحظه‌ی دل‌خواه t در مکان x قرار داشته باشد، داریم :

$\Delta x = x - x_0$ و $\Delta t = t - t_0 \Rightarrow V=\frac{x-x_0}{t-t_0} \Rightarrow x-x_0=V(t-t_0)$

$\Rightarrow x = V(t-t_0)+x_0$

اگر لحظه‌ی شروع حرکت متحرک صفر (مبداء زمان) فرض شود:$(t_0=0)$

$\Rightarrow x = Vt + x_0$

رابطه‌های $x=Vt+x_0$ و $x=V(t-t_0)+x_0$ رابطه‌ی مکان - زمان حرکت یکنواخت بر خط راست هستند.

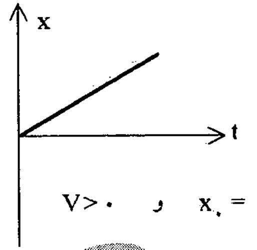
نکته ۱ : در حرکت یکنواخت بر خط راست جابه‌جایی متحرک متناسب با مدت زمان حرکت است $(\Delta x \propto \Delta t)$.

نکته ۲ : برای دو متحرک که به طور یکنواخت بر خط راست حرکت می‌کنند، **در یک مدت زمان مشخص** جابه‌جایی هر متحرک با سرعت آن متناسب است $\left(\frac{\Delta x_1}{V_1}=\frac{\Delta x_2}{V_2}\right)$.

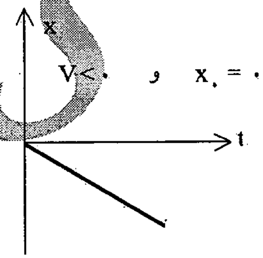
نمودار مکان - زمان حرکت یکنواخت بر خط راست

در این حرکت چون سرعت ثابت است، باید شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در تمام لحظه‌ها ثابت باشد. به همین سبب نمودار مکان - زمان این حرکت یک خط راست است که شیب آن برابر سرعت متحرک است.
هم‌چنین با توجه به رابطه‌ی مکان - زمان این حرکت ($x=V(t-t_0)+x_0$ یا $x=Vt+x_0$) که در آن مکان بر حسب زمان یک رابطه‌ی درجه یک است، نمودار مکان - زمان این حرکت خط راست است.

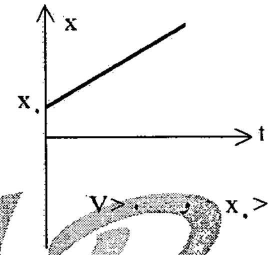
(۱) حرکت از مبداء مکان در جهت مثبت :



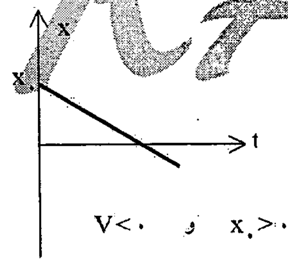
(۲) حرکت از مبداء مکان در جهت منفی :



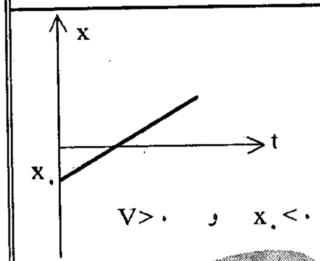
(۳) حرکت از مکان اولیه‌ی مثبت در جهت مثبت :



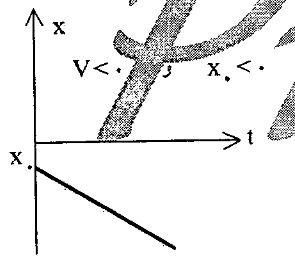
(۴) حرکت از مکان اولیه‌ی مثبت در جهت منفی :



(۵) حرکت از مکان اولیه‌ی منفی در جهت مثبت :



(۶) حرکت از مکان اولیه‌ی منفی در جهت منفی :



(۱) متحرک در مدت زمان‌های T_1 ، T_2 ، . . . و T_n به ترتیب با سرعت‌های V_1 ، V_2 ، . . . و V_n در امتداد یک مسیر مستقیم و در یک جهت جابه‌جا شده است.

$$\overline{V} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n} = \frac{V_1 \Delta t_1 + V_2 \Delta t_2 + \ldots + V_n \Delta t_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n}$$

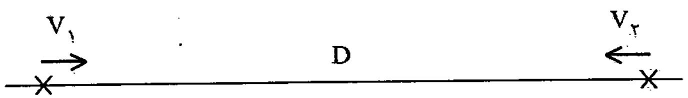
$$\Rightarrow \overline{V} = \frac{V_1 T_1 + V_2 T_2 + \ldots + V_n T_n}{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}$$

(۲) متحرک مسافت‌های d_1 ، d_2 ، . . . و d_n به ترتیب با سرعت‌های V_1 ، V_2 ، . . . و V_n در امتداد یک مسیر مستقیم و در یک جهت جابه‌جا شده است.

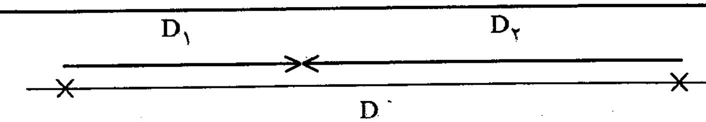
$$\overline{V} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}{\frac{\Delta x_1}{V_1} + \frac{\Delta x_2}{V_2} + \ldots + \frac{\Delta x_n}{V_n}}$$

$$\Rightarrow \overline{V} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}{\frac{d_1}{V_1} + \frac{d_2}{V_2} + \ldots + \frac{d_n}{V_n}}$$

(۱) متحرک‌ها با سرعت‌های V_1 و V_2 به طرف یک‌دیگر حرکت می‌کنند و فاصله‌ی اولیه‌ی آن‌ها D است.



مطابق شکل زیر متحرک‌ها در لحظه‌ای به یک‌دیگر می‌رسند که مجموع مسافت‌های طی شده توسط آن‌ها برابر D شود.



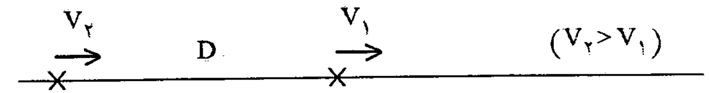
اگر مسافت طی شده توسط متحرک‌ها D_1 و D_2 فرض شود داریم :

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = D \\ D_1 = V_1\,\Delta t \\ D_2 = V_2\,\Delta t \end{cases} \Rightarrow V_1\,\Delta t + V_2\,\Delta t = D \Rightarrow (V_1 + V_2)\Delta t = D$$

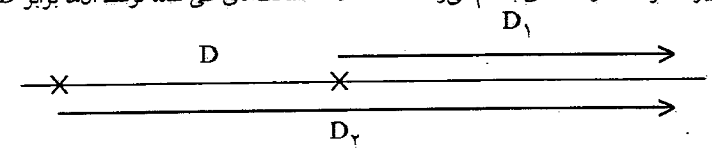
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{D}{V_1 + V_2} \quad \text{و} \quad D_1 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}D \quad \text{و} \quad D_2 = \frac{V_2}{V_1 + V_2}D$$

متحرک‌ها پس از مدت زمان Δt و پس از طی مسافت‌های D_1 و D_2 به یک‌دیگر می‌رسند.

(۲) متحرک‌ها با سرعت‌های V_1 و V_2 در یک جهت حرکت می‌کنند و فاصله‌ی اولیه‌ی آن‌ها D است.



مطابق شکل زیر متحرک‌ها در لحظه‌ای به هم می‌رسند که اختلاف مسافت‌های طی شده توسط آن‌ها برابر D شود.



اگر مسافت طی شده توسط متحرک‌ها D_1 و D_2 فرض شود داریم :

$$\begin{cases} D_2 - D_1 = D \\ D_1 = V_1\,\Delta t \\ D_2 = V_2\,\Delta t \end{cases} \Rightarrow V_2\,\Delta t - V_1\,\Delta t = D \Rightarrow (V_2 - V_1)\Delta t = D$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{D}{V_2 - V_1} \quad \text{و} \quad D_1 = \frac{V_1}{V_2 - V_1}D \quad \text{و} \quad D_2 = \frac{V_2}{V_2 - V_1}D$$

متحرک‌ها پس از مدت زمان Δt و پس از طی مسافت‌های D_1 و D_2 به یک‌دیگر می‌رسند.

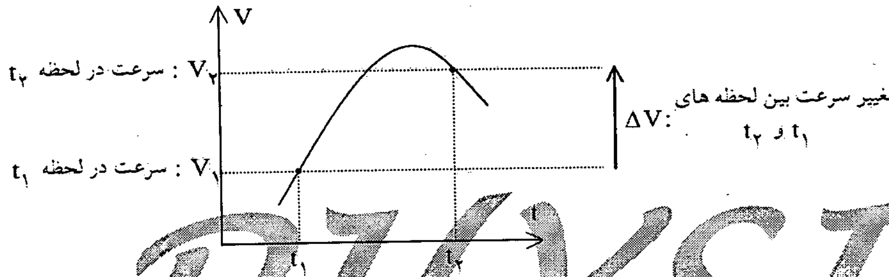
(۱) در حالت خاص اگر متحرک در جهت حرکت سیستم حرکت کند (قایق در جهت آب رودخانه حرکت کند) اندازه‌ی سرعت متحرک (قایق) نسبت به ناظر ساکن برابر $V + V_0$ به دست می‌آید.

(۲) در حالت خاص اگر متحرک در خلاف جهت حرکت سیستم حرکت کند (قایق در خلاف جهت آب رودخانه حرکت کند) اندازه‌ی سرعت متحرک (قایق) نسبت به ناظر ساکن برابر $|V - V_0|$ به دست می‌آید.
اگر $V > V_0$ باشد، جهت سرعت متحرک (قایق) نسبت به ناظر ساکن در جهت سرعت آن نسبت به سیستم (رودخانه) است و اگر $V < V_0$ باشد، جهت سرعت متحرک (قایق) نسبت به ناظر ساکن در خلاف جهت سرعت آن نسبت به سیستم (رودخانه) است

نمودار سرعت - زمان

برای توصیف حرکت یک جسم در حرکت بر روی خط راست می‌توان از نموداری که سرعت جسم را بر حسب زمان

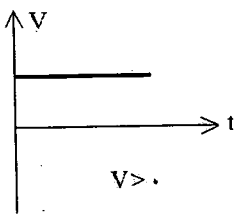
نشان می‌دهد استفاده کرد.



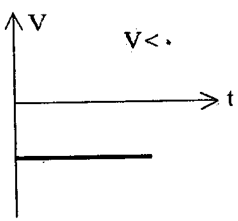
نمودار سرعت - زمان حرکت یکنواخت بر خط راست

در این حرکت سرعت ثابت است و در نتیجه نمودار سرعت - زمان این حرکت یک خط راست است که موازی محور زمان است.

(۱) حرکت یکنواخت در جهت مثبت :

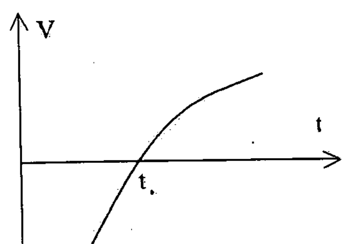


(۲) حرکت یکنواخت در جهت منفی :



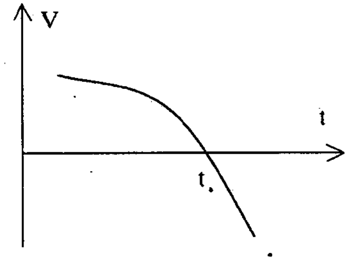
تشخیص جهت حرکت با کمک نمودار سرعت - زمان

اگر منحنی نمودار سرعت - زمان مطابق شکل در لحظه‌های بزرگ‌تر از t_0، بالای محور زمان باشد سرعت مثبت است و جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت انجام می‌شود و اگر منحنی نمودار سرعت - زمان مطابق شکل در لحظه‌های کوچک‌تر از t_0، زیر محور زمان باشد سرعت منفی است و جابه‌جایی در جهت منفی انجام می‌شود.

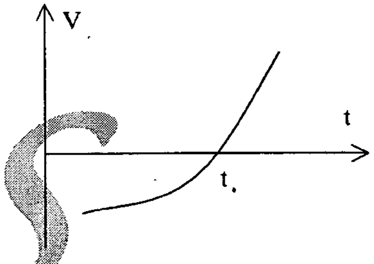


تشخیص لحظه‌ی تغییر جهت حرکت با کمک نمودار سرعت - زمان

اگر منحنی نمودار سرعت - زمان مطابق شکل‌های (۱) و (۲) محور زمان را قطع کند، در لحظه‌ی تقاطع منحنی با محور زمان علامت سرعت از مثبت به منفی و یا از منفی به مثبت تبدیل شده است و در نتیجه جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

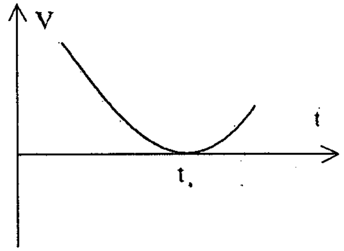


شکل (۱)

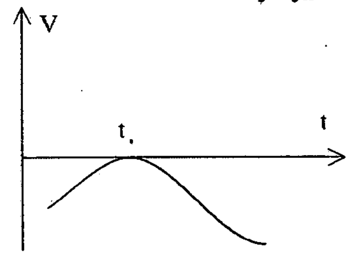


شکل (۲)

توجه کنید که اگر منحنی مطابق شکل‌های (۳) و (۴) محور زمان را قطع کند، سرعت متحرک در لحظه‌ی t_0 صفر شده است، اما علامت سرعت تغییر نکرده است و جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است.



شکل (۳)



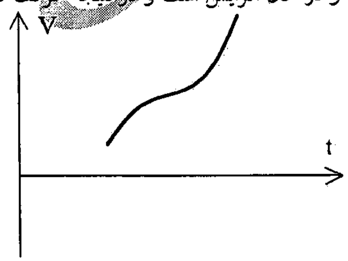
شکل (۴)

اگر منحنی نمودار سرعت - زمان خط راستی موازی محور زمان باشد :

اگر منحنی نمودار سرعت - زمان یک خط راست موازی محور زمان باشد، سرعت متحرک در لحظه‌های مختلف ثابت است. بنابراین حرکت متحرک نه تندشونده است و نه کندشونده.

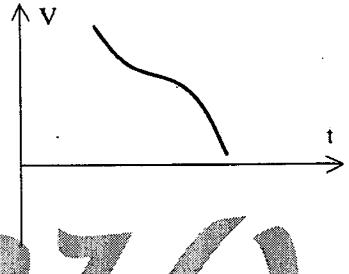
اگر منحنی نمودار سرعت - زمان یک منحنی صعودی و بالای محور زمان باشد :

در این صورت سرعت متحرک مثبت و در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تند شونده است.



اگر منحنی نمودار سرعت - زمان یک منحنی نزولی و بالای محور زمان باشد :

در این صورت سرعت متحرک مثبت و در حال کاهش است و در نتیجه حرکت کند شونده است.

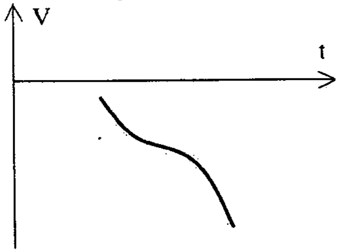


اگر منحنی نمودار سرعت - زمان یک منحنی صعودی و زیر محور زمان باشد :

در این صورت سرعت متحرک منفی و اندازه‌ی آن در حال کاهش است و در نتیجه حرکت کند شونده است.

اگر منحنی نمودار سرعت - زمان یک منحنی نزولی و زیر محور زمان باشد :

در این صورت سرعت متحرک منفی و اندازه‌ی آن در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تند شونده است.



نکته: بطور کلی در نمودار سرعت - زمان، هرگاه منحنی از محور زمان دور شود، حرکت تند شونده است و هرگاه به محور زمان نزدیک شود، حرکت کند شونده است.

شتاب متوسط

متوسط تغییر سرعت متحرک در واحد زمان را شتاب متوسط متحرک می‌گوییم. برای محاسبه‌ی شتاب متوسط متحرک در هر بازه‌ی زمانی، تغییر سرعت متحرک را در آن بازه‌ی زمانی به مدت زمان آن بازه‌ی زمانی تقسیم می‌کنیم.

فرض می‌کنیم متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب سرعت‌های V_1 و V_2 دارد. اگر شتاب متوسط متحرک را با نماد $\bar{a}$ نشان دهیم داریم :

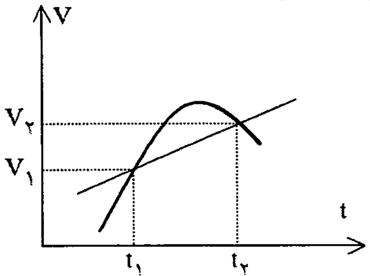
شتاب متوسط در بازه ی زمانی t_1 تا t_2 $$\bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}$$

شتاب متوسط یک کمیت برداری است که با بردار تغییر سرعت متحرک هم‌جهت (هم‌راستا و هم‌سو) است.

یکای شتاب متوسط در SI، متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) است.

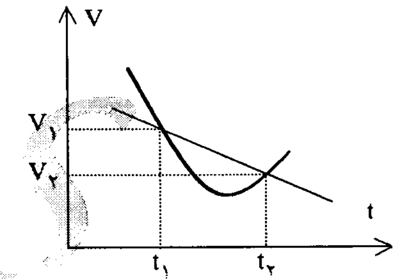
تعیین شتاب متوسط به کمک نمودار سرعت - زمان

با توجه به رابطه‌ی $\bar{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ برای شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 و شکل‌های (۱) و (۲)، شتاب متوسط بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 برابر شیب خط راستی است که از دو لحظه‌ی t_1 و t_2 از منحنی نمودار سرعت - زمان متحرک عبور می‌کند.



شکل (۱)

$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} > 0$



شکل (۲)

$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} < 0$

شتاب لحظه‌ای

شتاب متوسط در یک بازه‌ی زمانی خیلی کوچک به شتاب لحظه‌ای لحظه‌های آن بازه‌ی زمانی نزدیک است و هر چه قدر این بازه‌ی زمانی کوچک‌تر انتخاب شود، مقدار شتاب متوسط به شتاب لحظه‌ای لحظه‌های آن بازه‌ی زمانی نزدیک‌تر می‌شود.

بنابراین برای محاسبه‌ی شتاب در لحظه‌ی دل‌خواه t_0 می‌توان یک بازه‌ی زمانی بسیار کوچک Δt را در نظر گرفت که لحظه‌ی t_0 را شامل می‌شود و شتاب متوسط را در بازه‌ی زمانی Δt حساب کرد و داریم :

شتاب در لحظه t_0 ≈ شتاب متوسط در بازه زمانی Δt $\Rightarrow a(t_0) \approx \frac{V(t_0 + \Delta t) - V(t_0)}{\Delta t}$

در این روش هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر انتخاب شود، شتاب لحظه‌ای دقیق‌تر محاسبه می‌شود.

یکای شتاب لحظه‌ای در SI، متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) است.

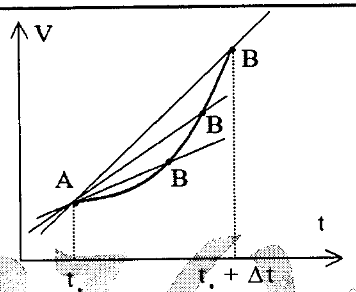
تعیین شتاب لحظه‌ای به کمک نمودار سرعت - زمان

در نمودار شکل زیر برای محاسبه‌ی شتاب متوسط در لحظه‌ی t_0 بازه‌ی زمانی کوچک Δt که لحظه‌ی t_0 ابتدای آن است در نظر گرفته شده است. شتاب در لحظه‌ی t_0 تقریبا برابر شتاب متوسط در بازه‌ی زمانی کوچک Δt و در نتیجه تقریبا برابر شیب خطی است که از نقاط A و B عبور می‌کند.

هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر شود، شتاب در لحظه‌ی t_0 به شتاب متوسط در بازه‌ی زمانی Δt و در نتیجه شیب خطی که از نقاط A و B عبور می‌کند نزدیک‌تر می‌شود.

هم‌چنین هر چه قدر بازه‌ی زمانی Δt کوچک‌تر شود، نقطه‌ی B به نقطه‌ی A نزدیک‌تر شده و خطی که از نقاط A و B عبور می‌کند به خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی A نزدیک‌تر می‌شود.

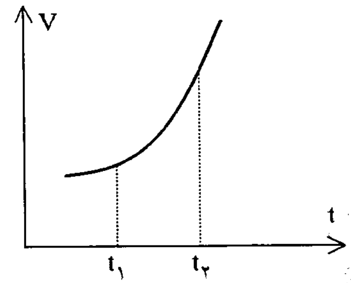
بنابراین شتاب در لحظه‌ی t_0 برابر شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌ی t_0 است.



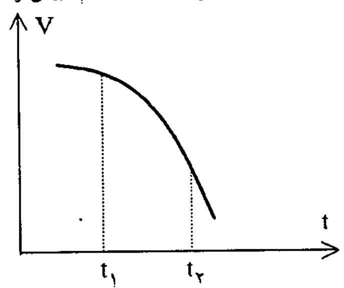
مقایسه‌ی بزرگی (اندازه‌ی) شتاب در لحظه‌های مختلف به کمک نمودار سرعت - زمان

در نمودار شکل (۱) شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌های t_1 و t_2 مثبت است و شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌ی t_2 از شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است. بنابراین بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌ی t_2 از بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است.

در نمودار شکل (۲) شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌های t_1 و t_2 منفی است و شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌ی t_2 از شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در لحظه‌ی t_1 منفی‌تر است. بنابراین بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌ی t_2 از بزرگی شتاب متحرک در لحظه‌ی t_1 بیش‌تر است.



شکل (۱)



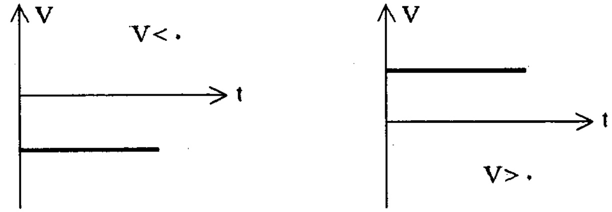
شکل (۲)

برای مقایسه‌ی بزرگی شتاب در لحظه‌های مختلف حرکت باید قدرمطلق شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان را در لحظه‌های مختلف با یک‌دیگر مقایسه کنیم.

شتاب درحرکت یکنواخت بر خط راست

در حرکت یکنواخت بر خط راست سرعت ثابت است و با توجه به رابطه‌ی $\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ شتاب متوسط در هر بازه‌ی زمانی و در نتیجه شتاب لحظه‌ای در تمام لحظه‌ها صفر است.

هم‌چنین نمودار سرعت - زمان حرکت یکنواخت بر خط راست مطابق صورت شکل‌های زیر یک خط راست موازی محور زمان است و شیب این خط که برابر شتاب متحرک است صفر می‌باشد.



حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

حرکت بر خط راست با شتاب ثابت، حرکتی است که در آن شتاب لحظه‌ای متحرک در تمام لحظه‌ها یکسان است. هم‌چنین حرکت بر خط راست با شتاب ثابت حرکتی است که در آن شتاب متوسط متحرک در تمام بازه‌های زمانی دل‌خواه یکسان و برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است.

$\bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ و $\bar{a}=a \Rightarrow a=\frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V=a\Delta t$

اگر متحرک حرکت خود را در لحظه‌ی صفر و با سرعت اولیه‌ی V_0 آغاز کرده باشد، و هم‌چنین در لحظه‌ی دل‌خواه t سرعت متحرک برابر V باشد، داریم :

$\Delta V = V - V_0$ و $\Delta t = t - 0 = t \Rightarrow a = \frac{V - V_0}{t} \Rightarrow V - V_0 = at$

$\Rightarrow V = at + V_0$

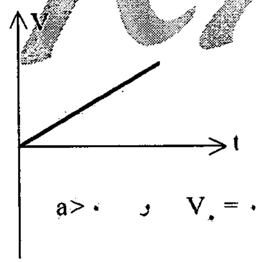
رابطه‌ی $V = at + V_0$ رابطه‌ی سرعت - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت هستند.

نکته : در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت تغییر سرعت متناسب با مدت زمان حرکت است ($\Delta V \propto \Delta t$).

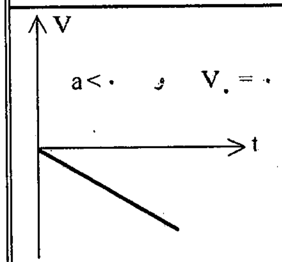
نمودار سرعت - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

در این حرکت چون شتاب ثابت است، باید شیب خط مماس بر منحنی نمودار سرعت - زمان در تمام لحظه‌ها ثابت باشد. به همین سبب نمودار سرعت - زمان این حرکت یک خط راست است که شیب آن برابر شتاب متحرک است. هم‌چنین با توجه به رابطه‌ی سرعت - زمان این حرکت ($V = at + V_0$) که در آن سرعت بر حسب زمان یک رابطه‌ی درجه یک است، نمودار سرعت - زمان این حرکت خط راست است.

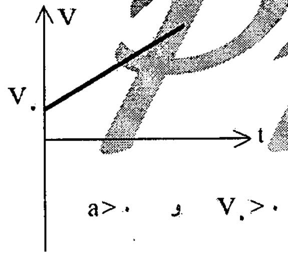
(۱) حرکت از حال سکون با شتاب مثبت :



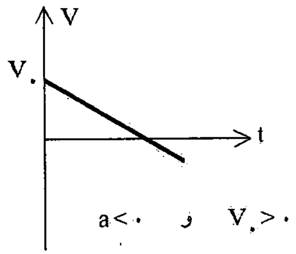
(۲) حرکت از حال سکون با شتاب منفی :



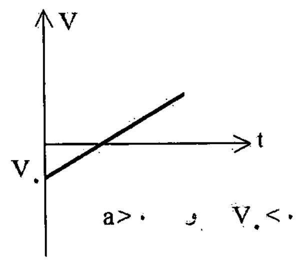
(۳) حرکت با سرعت اولیه‌ی مثبت و شتاب مثبت :



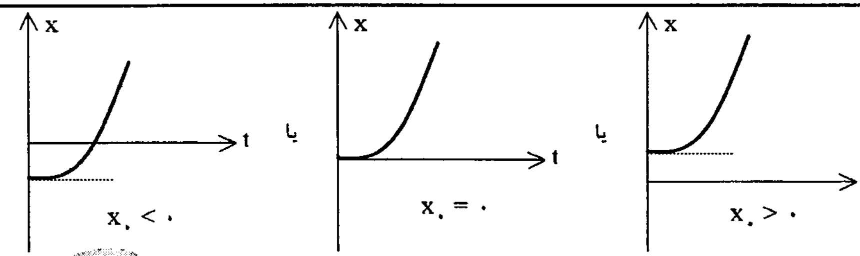
(۴) حرکت با سرعت اولیه‌ی مثبت و شتاب منفی :



(۵) حرکت با سرعت اولیه‌ی منفی و شتاب مثبت :

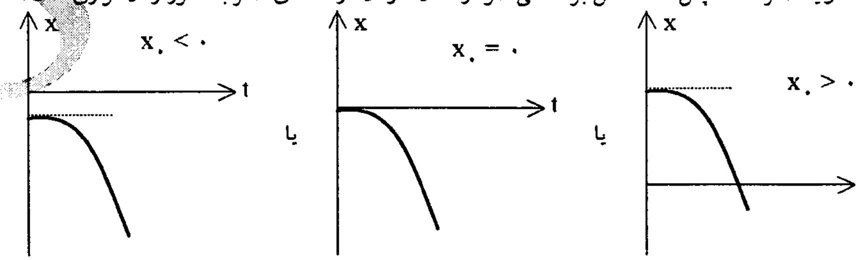


(۶) حرکت با سرعت اولیه‌ی منفی با شتاب منفی :

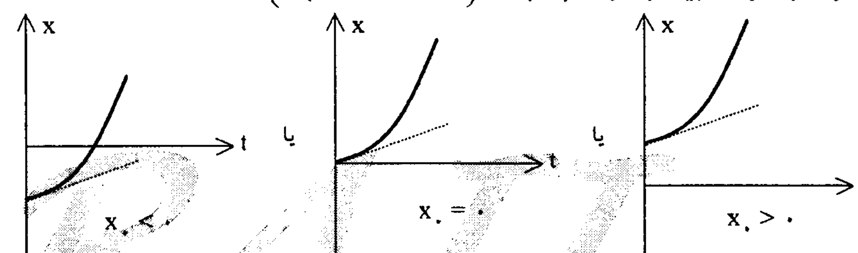


(۲) حرکت از حال سکون با شتاب منفی : $(V_0 = 0 \quad و \quad a < 0)$

سرعت اولیه صفر است، پس خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی صفر با محور زمان موازی است.

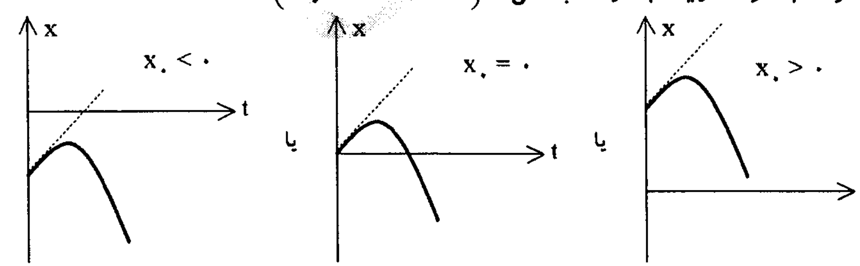


(۳) حرکت با سرعت اولیه مثبت و شتاب مثبت : $(V_0 > 0 \quad و \quad a > 0)$



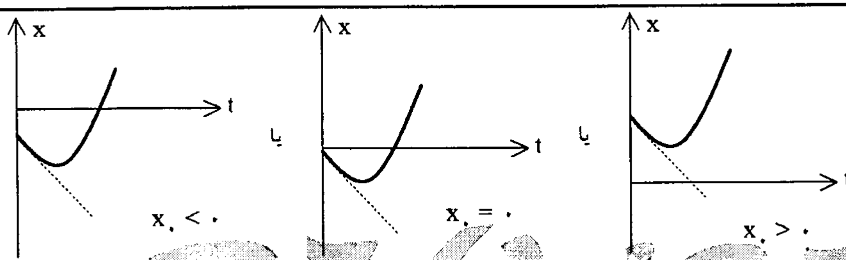
شیب خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی صفر که بیانگر سرعت اولیه است، مثبت است.

(۴) حرکت با سرعت اولیه مثبت و شتاب منفی : $(V_0 > 0 \quad و \quad a < 0)$



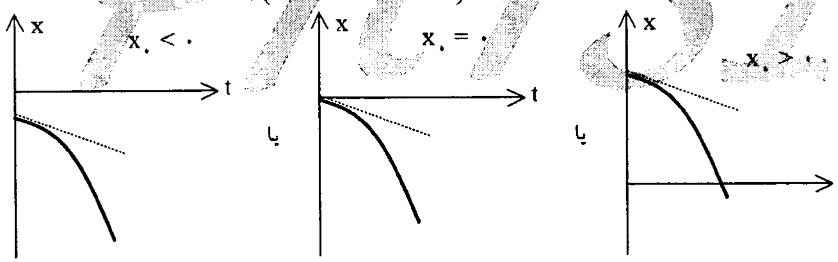
شیب خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی صفر که بیانگر سرعت اولیه است، مثبت است.

(۵) حرکت با سرعت اولیه منفی و شتاب مثبت : $(V_0 < 0 \quad و \quad a > 0)$



شیب خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی صفر که بیانگر سرعت اولیه است،منفی است.

(۶) حرکت با سرعت اولیه منفی و شتاب منفی : $(V_0 < 0 \quad و \quad a < 0)$



شیب خط مماس بر منحنی در لحظه‌ی صفر که بیانگر سرعت اولیه است، منفی است.

جابه‌جایی در ثانیه‌ی n ام حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

فرض می‌کنیم یک متحرک با سرعت اولیه‌ی V_0 و شتاب ثابت a بر خط راست جابه‌جا می‌شود.

با توجه به رابطه‌ی مکان - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت $\left(x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0\right)$ داریم :

$$\begin{cases} t = n-1 \text{ مکان در لحظه } : x(n-1) = \frac{1}{2}a(n-1)^2 + V_0(n-1) + x_0 \\ t = n \text{ مکان در لحظه } : x(n) = \frac{1}{2}an^2 + V_0 n + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(n) - x(n-1) = \left(\frac{1}{2}an^2 + V_0 n + x_0\right) - \left(\frac{1}{2}a(n-1)^2 + V_0(n-1) + x_0\right)$$

$$\Rightarrow x(n) - x(n-1) = \frac{1}{2}a\left(n^2 - (n-1)^2\right) + V_0(n-(n-1)) = \frac{2n-1}{2}a + V_0$$

جابه‌جایی در ثانیه‌ی n ام $\Delta x = \frac{2n-1}{2}a + V_0$

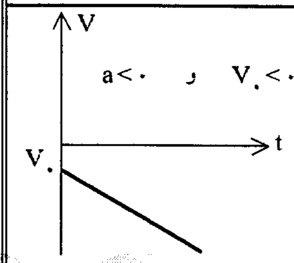
تعیین تندشونده و کندشونده بودن حرکت با کمک علامت سرعت و شتاب

اگر در یک لحظه سرعت و شتاب یک متحرک هم علامت باشند $(aV > 0)$، شتاب متحرک هم جهت با سرعت آن است و باعث افزایش اندازه‌ی سرعت می‌شود و در نتیجه در این لحظه حرکت تندشونده است.

اگر در یک لحظه سرعت و شتاب یک متحرک غیر هم علامت باشند $(aV < 0)$، شتاب متحرک در خلاف جهت سرعت آن است و باعث کاهش اندازه‌ی سرعت می‌شود و در نتیجه در این لحظه حرکت کندشونده است.

اگر در یک لحظه سرعت یا شتاب یک متحرک صفر باشد $(aV = 0)$، در این لحظه حرکت نه تندشونده است و نه کندشونده.

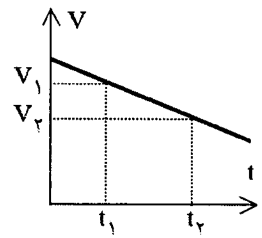
زمان توقف :

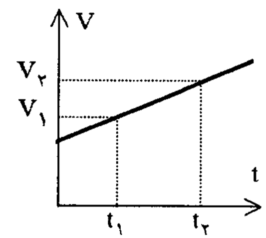


سرعت متوسط در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

می‌توان نشان داد که در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه برابر میانگین (نصف مجموع) سرعت‌های آن دو لحظه است.

سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 $\overline{V} = \frac{V_2 + V_1}{2}$





محاسبه‌ی جابه‌جایی در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت با کمک سرعت متوسط

فرض می‌کنیم سرعت یک متحرک که بر خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند، در لحظه‌های t_1 و t_2 به ترتیب برابر V_1 و V_2 است.

سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 $\overline{V} = \frac{V_2 + V_1}{2}$

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \overline{V}\,\Delta t \Rightarrow \Delta x = \overline{V}(t_2 - t_1)$

$\Rightarrow$ جابه‌جایی بین لحظه‌های t_1 و t_2 $\Delta x = \frac{V_2 + V_1}{2}(t_2 - t_1)$

اگر سرعت اولیه‌ی متحرک (سرعت متحرک در لحظه‌ی صفر) برابر V_0 و سرعت آن در لحظه‌ی t برابر V باشد :

$\Rightarrow$ جابه‌جایی بین لحظه‌های صفر و t $\Delta x = \frac{V + V_0}{2}t$

به رابطه‌ی $\Delta x = \frac{V + V_0}{2}t$ در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت، رابطه مستقل از شتاب می‌گویند.

معادله حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

فرض می‌کنیم سرعت اولیه‌ی یک متحرک که با شتاب ثابت a حرکت می‌کند (سرعت متحرک در لحظه‌ی صفر) برابر V_0 و سرعت آن در لحظه‌ی t برابر V باشد.

$V = at + V_0$ و جابه‌جایی بین لحظه‌های صفر و t $\Delta x = \frac{V + V_0}{2}t$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{at + V_0 + V_0}{2}t = \frac{at + 2V_0}{2}t$

جابه‌جایی بین لحظه‌های صفر و t $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$

رابطه‌ی $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$ رابطه‌ی جابه‌جایی - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت است.

اگر مکان اولیه‌ی متحرک (مکان متحرک در لحظه‌ی صفر) x_0 باشد :

$\Rightarrow \Delta x = x - x_0$

$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t$

مکان متحرک در لحظه‌ی t $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$

رابطه‌ی $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$ **رابطه‌ی مکان - زمان** حرکت بر خط راست با شتاب ثابت است.

رابطه‌ی مستقل از زمان در حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

فرض می‌کنیم سرعت اولیه‌ی یک متحرک که با شتاب ثابت a حرکت می‌کند (سرعت متحرک در لحظه‌ی صفر) برابر V_0 و سرعت آن در لحظه‌ی t برابر V باشد.

جابه‌جایی بین لحظه‌های صفر و t $\Delta x = \frac{V + V_0}{2}t$

$V = at + V_0 \Rightarrow t = \frac{V - V_0}{a}$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{V + V_0}{2} \times \frac{V - V_0}{a} = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}$

$\Rightarrow V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$

به رابطه‌ی $V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$ **رابطه‌ی مستقل از زمان** حرکت بر خط راست با شتاب ثابت می‌گوییم.

نمودار مکان - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت

با توجه به رابطه‌ی مکان - زمان حرکت بر خط راست با شتاب ثابت $\left(x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0\right)$ که در آن مکان بر حسب زمان یک رابطه‌ی درجه دو است، نمودار مکان - زمان این حرکت به شکل سهمی است.

(۱) حرکت از حال سکون با شتاب مثبت : ($V_0 = 0$ و $a > 0$)

سرعت اولیه صفر است. پس خط مماس بر منحنی نمودار مکان - زمان در لحظه‌ی صفر با محور زمان موازی است.

فرض می‌کنیم متحرک در لحظه‌ی $t = T$ متوقف می‌شود (سرعت آن صفر می‌شود).

$$\begin{cases} V = at + V_0 \\ t = T \text{ و } V = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = aT + V_0 \Rightarrow T = -\frac{V_0}{a} = \left|\frac{V_0}{a}\right|$$

متحرک پس از مدت زمان $\left|\frac{V_0}{a}\right|$ متوقف می‌شود.

مسافت ایست :

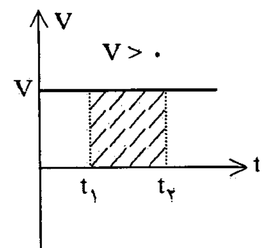
فرض می‌کنیم متحرک پس از طی مسافت $|\Delta x| = D$ متوقف می‌شود (سرعت آن صفر می‌شود).

$$\begin{cases} V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \\ |\Delta x| = D \text{ و } V = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{V_0^2}{2a} \Rightarrow D = \left|\frac{V_0^2}{2a}\right|$$

متحرک پس از طی مسافت $\left|\frac{V_0^2}{2a}\right|$ متوقف می‌شود.

در حرکت یکنواخت :

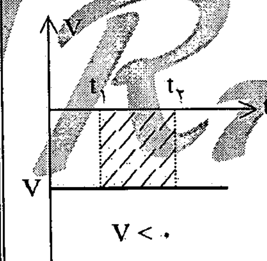
اگر سرعت متحرک مثبت باشد :



مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= V(t_2 - t_1)$

جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= V(t_2 - t_1) > 0$

اگر سرعت متحرک منفی باشد :



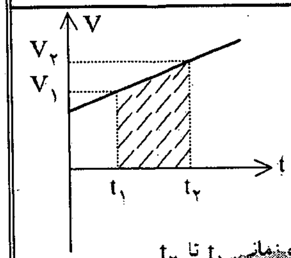
مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= |V|(t_2 - t_1)$

جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= V(t_2 - t_1) < 0$

مساحت سطح محصور بین منحنی نمودار و محور زمان برابر اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک است و جهت جابه جایی در بالای محور زمان مثبت و در پایین محور زمان منفی است.

در حرکت با شتاب ثابت :

اگر سرعت متحرک همواره مثبت باشد :

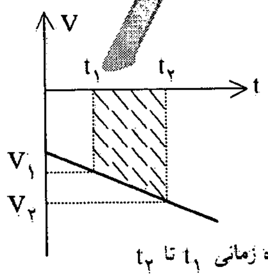


$V_1 > 0$
$V_2 > 0$

مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= \frac{V_2 + V_1}{2}(t_2 - t_1)$

جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= \frac{V_2 + V_1}{2}(t_2 - t_1) > 0$

اگر سرعت متحرک همواره منفی باشد :



$V_1 < 0$
$V_2 < 0$

مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= \frac{|V_2 + V_1|}{2}(t_2 - t_1)$

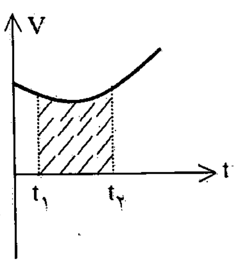
جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= \frac{V_2 + V_1}{2}(t_2 - t_1) < 0$

مساحت سطح محصور بین منحنی نمودار و محور زمان برابر اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک است و جهت جابه جایی در بالای محور زمان مثبت و در پایین محور زمان منفی است.

در حالت کلی :

مساحت سطح محصور بین منحنی نمودار و محور زمان برابر اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک است و جهت جابه جایی در بالای محور زمان مثبت و در پایین محور زمان منفی است.

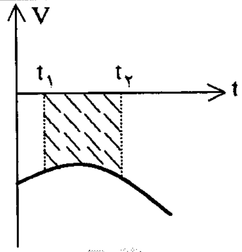
اگر سرعت متحرک همواره مثبت باشد :



مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= A$

جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2 $= +A$

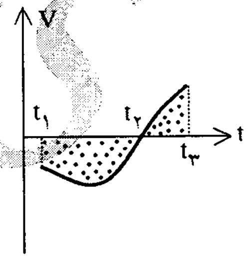
اگر سرعت متحرک همواره منفی باشد :



A = مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2

$-A$ = جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_2

اگر سرعت متحرک لحظاتی مثبت و لحظاتی منفی باشد :



A_1 = مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_1 تا t_2

A_2 = مساحت بین منحنی و محور زمان در بازه زمانی t_2 تا t_3

$-A_1 + A_2$ = جابه جایی در بازه زمانی t_1 تا t_3

سقوط آزاد

اگر یک جسم در طی حرکت تنها تحت اثر نیروی وزن خود باشد، به حرکت آن سقوط آزاد گفته می‌شود. در یک مکان مشخص حرکت سقوط آزاد تمام اجسام با شتاب ثابت و یکسانی انجام می‌شود. اندازه‌ی شتاب سقوط اجسام را با g نشان می‌دهند. مقدار آن در سطح زمین نزدیک به $g = 9/8\ m/s^2$ است که برای سهولت در محاسبه معمولا $g = 10\ m/s^2$ فرض می‌شود و جهت آن در راستای عمود بر سطح زمین و به سمت زمین است.

رها کردن :

اگر جسم از بالای سطح زمین رها شود، بدون سرعت اولیه در امتداد قائم سقوط می‌کند. در این حالت معمولاً جهت مثبت به سمت پایین اختیار می‌شود و در نتیجه شتاب حرکت برابر $a = +g$ است.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \\ V = at + V_0 \\ V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \end{cases} \text{ و } a = +g \text{ و } V_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}at^2 + y_0 \\ V = gt \\ V^2 = 2g\Delta y \end{cases}$$

در این شرایط حرکت جسم تندشونده است.

پرتاب قائم به سمت پایین :

در این حالت معمولاً جهت مثبت به سمت پایین اختیار می‌شود و در نتیجه شتاب حرکت برابر $a = +g$ است.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \\ V = at + V_0 \\ V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \end{cases} \text{ و } a = +g \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + y_0 \\ V = gt + V_0 \\ V^2 - V_0^2 = 2g\Delta y \end{cases}$$

در این شرایط حرکت جسم تندشونده است.

پرتاب قائم به سمت بالا :

در این حالت معمولاً جهت مثبت به سمت بالا اختیار می‌شود و در نتیجه شتاب حرکت برابر $a = -g$ است.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \\ V = at + V_0 \\ V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \end{cases} \text{ و } a = -g \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + y_0 \\ V = -gt + V_0 \\ V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y \end{cases}$$

در این شرایط حرکت جسم کندشونده است و جسم پس از مدتی حرکت در راستای قائم در نقطه‌ی اوج حرکتش برای یک آن متوقف می‌شود و سپس در راستای قائم به صورت تندشونده به سمت پایین حرکت می‌کند.

زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج :

فرض می‌کنیم جسم در لحظه‌ی $t = T$ به نقطه‌ی اوج می‌رسد.

$$\begin{cases} V = -gt + V_0 \\ t = T \text{ و } V = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = -gT + V_0 \Rightarrow T = \frac{V_0}{g}$$

جسم پس از مدت زمان $T = \frac{V_0}{g}$ بعد از لحظه‌ی پرتاب به نقطه‌ی اوج می‌رسد.

ارتفاع نقطه‌ی اوج :

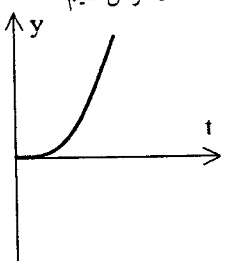
فرض می‌کنیم جسم پس از جابه‌جایی $\Delta y = H$ به نقطه‌ی اوج می‌رسد.

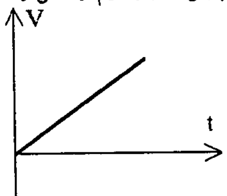
$$\begin{cases} V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y \\ \Delta y = H \text{ و } V = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - V_0^2 = -2gH \Rightarrow H = \frac{V_0^2}{2g}$$

جسم در ارتفاع $H = \frac{V_0^2}{2g}$ نسبت به سطح پرتاب به نقطه‌ی اوج می‌رسد.

رها کردن :

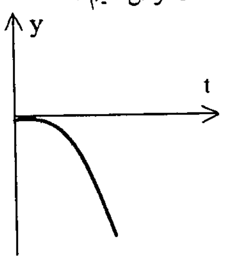
اگر جهت مثبت را رو به پایین اختیار کنیم و محل رها شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :

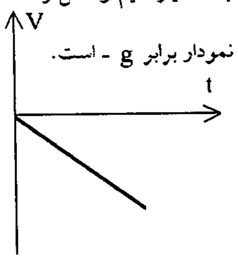




شیب نمودار برابر g است.

اگر جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنیم و محل رها شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :

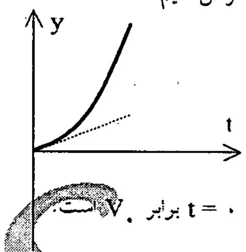




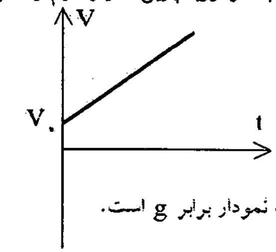
شیب نمودار برابر g - است.

پرتاب قائم به سمت پایین :

اگر جهت مثبت را رو به پایین اختیار کنیم و محل پرتاب شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :

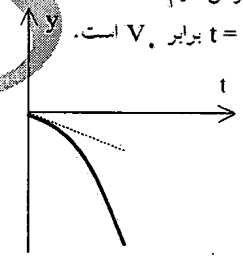


شیب خط مماس بر نمودار در $t = 0$ برابر V_0 است.



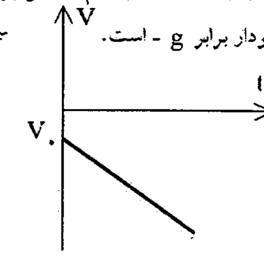
شیب نمودار برابر g است.

اگر جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنیم و محل پرتاب شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :



شیب خط مماس بر نمودار در $t = 0$ برابر V_0 است.

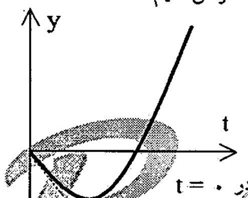
$(V_0 < 0)$



شیب نمودار برابر g - است.

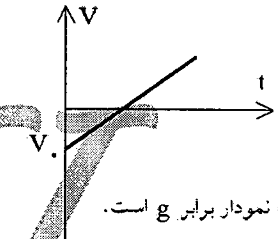
پرتاب قائم به سمت بالا :

اگر جهت مثبت را رو به پایین اختیار کنیم و محل پرتاب شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :



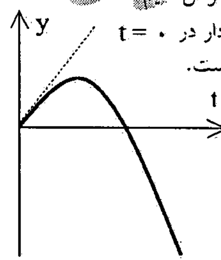
شیب خط مماس بر نمودار در $t = 0$ برابر V_0 است.

$(V_0 < 0)$

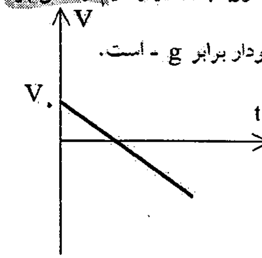


شیب نمودار برابر g است.

اگر جهت مثبت را رو به بالا اختیار کنیم و محل پرتاب شدن جسم را مبداء مکان فرض کنیم :

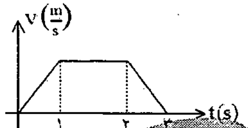


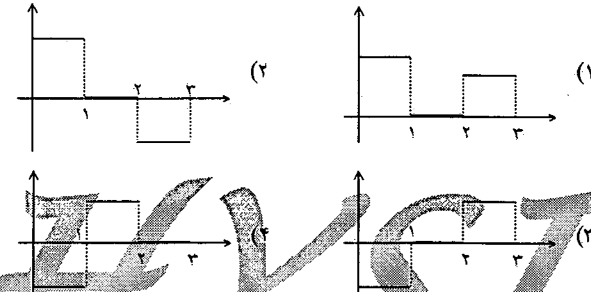
شیب خط مماس بر نمودار در $t = 0$ برابر V_0 است.



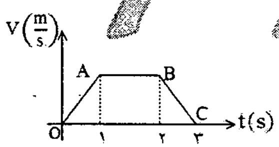
شیب نمودار برابر g - است.

۱- نمودار سرعت-زمان متحرکی به‌صورت روبه‌رو است. نمودار شتاب-زمان آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟

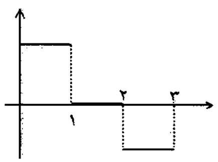




گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طبق نمودار سرعت-زمان رسم شده داریم:



حرکت جسم در قسمت OA، شتاب‌دار تندشونده $(a > 0)$، حرکت جسم در قسمت AB، یکنواخت $(a = 0)$، حرکت جسم در قسمت BC شتاب‌دار کندشونده $(a < 0)$ است.



۲- قطاری به طول ۲۰۰m با سرعت ثابت $72\frac{km}{h}$ روی یک ریل مستقیم در حرکت است. از لحظه ای که ابتدای قطار به تونلی به طول ۴۰۰m میرسد، چند ثانیه طول می کشد تا قطار کاملاً از تونل عبور کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۷/۵ ۴) ۳۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. قطار باید مسافتی برابر جمع طول خود و طول تونل را طی کند.

$72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{s}$

$\Delta x = Vt \Rightarrow 200 + 400 = 20t \Rightarrow t = 30s$

۳- گلوله‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر در شرایط خلاء رها می‌شود. سرعت متوسط آن در کل مدت حرکت چند m/s است؟ $(g = 10 m/s^2)$

۱) ۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) داده‌های مساله کافی نیست.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$y = \frac{1}{2}gt^2 + \cancel{V_0 t} \Rightarrow 80 = 5t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4s \Rightarrow \bar{V} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{80}{4} = 20 m/s$

۴- اتومبیلی روی یک جاده مستقیم، ۱۰۰ کیلومتر با سرعت $50\frac{km}{h}$ و سپس ۳ ساعت با سرعت $100\frac{km}{h}$ در همان جهت حرکت می‌کند. سرعت متوسط آن در کل این حرکت چند کیلومتر بر ساعت است؟

۱) ۷۵ ۲) ۸۰ ۳) ۷۰ ۴) ۶۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100 + 3 \times 100}{\frac{100}{50} + 3} = \frac{400}{5} = 80 \ \frac{Km}{h}$

۵- جسمی که از بالای ساختمانی رها شده است با سرعت ۵۰m/s به زمین می‌رسد. جسم ۳ ثانیه قبل از برخورد با زمین در چه ارتفاعی قرار داشته است؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

سرعت ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین $V = -gt + V_0 \Rightarrow -50 = -10 \times 3 + V_0 \Rightarrow V_0 = -20 \ m/s$

$V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow 50^2 - 20^2 = -20\Delta y \Rightarrow \Delta y = 105 \ m$

۶- اتومبیلی که با سرعت ۳۰m/s در حال حرکت است، اتومبیل دیگری را که با سرعت ۲۰m/s در همان جهت حرکت می‌کند. در فاصله‌ی ۵۰ متری جلوی خود می‌بیند. حداقل اندازه‌ی شتاب ترمز چقدر باشد تا برخوردی صورت **نگیرد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از مفهوم حرکت نسبی استفاده می‌کنیم. اگر اتومبیل جلویی ساکن فرض شود:

نسبی $V_0 = 30 - 20 = 10 m/s$

$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 10^2 = 2a \times 50 \Rightarrow a = -1 m/s^2 \rightarrow |a| = 1\frac{m}{s^2}$

۷- متحرکی روی خط راست و از حال سکون با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ به حرکت درمی‌آید و پس از ۳ ثانیه حرکت شتابدار بقیه مسیر را با سرعت ثابت ادامه می‌دهد. سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه نخست حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۵/۵ ۲) ۴/۲ ۳) ۵ ۴) ۳/۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$t = 0 \rightarrow t = 3$

$\Delta x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 9 = 9 (m)$

$V = 3 \times 2 + 0 = 6 \left(\frac{m}{s}\right)$

$t = 3 \rightarrow 5$

$\Delta x_2 = 6 \times 2 = 12 (m)$

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9 + 12}{5} = \frac{21}{5} = 4/2 \frac{m}{s}$

۸- اتومبیلی با شتاب ثابت ترمز می‌کند و در مدت ۳ ثانیه با طی کردن مسافت ۳۰ متر می‌ایستد. سرعت آن قبل از ترمز کردن چند متر بر ثانیه بوده است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۰

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$\Delta x = \frac{V + V_0}{2} . \Delta t \Rightarrow 30 = \frac{0 + V_0}{2} \times 3 \Rightarrow V_0 = 20 (m/s)$

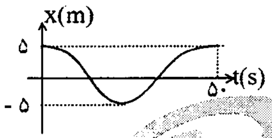
۹- متحرکی از حال سکون و با شتاب ثابت به حرکت درمی‌آید. اگر در ۱۰ ثانیه اول حرکت ۱۰۰ متر طی کند اندازه شتاب آن چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. x_0 را می‌توان صفر فرض کرد.

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0 \qquad 100 = \frac{1}{2}a \times 100 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s}$

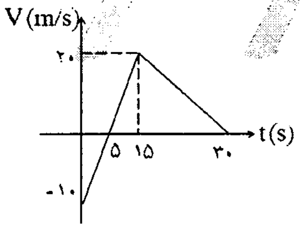
۱۰- نمودار مکان- زمان متحرکی مطابق شکل است. به ترتیب مسافت طی شده و سرعت متوسط جسم در ۵۰ ثانیه‌ی اول حرکت چقدر است؟ (از راست به چپ)



۱) ۲۰ و صفر ۲) صفر و ۲۰
۳) ۴۰ و ۴۰ ۴) صفر و صفر

گزینه ۱ پاسخ صحیح است زیرا: $d = 5 + 5 + 5 + 5 = 20 m \ , \ \Delta x = 5 - 5 = 0 \Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$

۱۱- نمودار سرعت - زمان شکل مقابل مربوط به یک حرکت بر خط راست است. سرعت متوسط متحرک در ۳۰ ثانیه حرکت چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۹/۱ ۲) ۱/۵
۳) ۷/۵ ۴) ۵

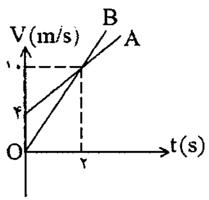
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

مساحت زیر نمودار سرعت - زمان $= \Delta x$

$\Delta x = \frac{-10 \times 5}{2} + \frac{20 \times 25}{2} = -25 + 250 = 225 \ m$

$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{225}{30} = 7/5 \ m/s$

۱۲- نمودار سرعت زمان دو متحرک A و B که در مبداء زمان در یک نقطه قرار دارند رسم شده است پس از چند ثانیه از آغاز حرکت این دو متحرک دوباره به هم می‌رسند؟



۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $a_A = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10 - 4}{2} = 3 m/s^2 \quad a_B = \frac{10}{2} = 5 m/s^2$

شرط اینکه به هم برسند: $\Delta x_A = \Delta x_B$

$\left(\frac{1}{2} \times at^2 + V_0 t\right)_A = \left(\frac{1}{2} at^2 + V_0 t\right)_B$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 3t^2 + 4t = \frac{5}{2}t^2 + 0 \Rightarrow \frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t - 4) = 0 \Rightarrow$ جواب مساله: $t = 4s$ ، در مبدا زمان: $t = 0$

علت نادرستی گزینه‌ی ۱ : در لحظه‌ی $t = 2s$ سرعت‌ها برابرند ولی دلیلی برای اینکه در کنار هم باشند نداریم.

۱۳- اتومبیلی فاصله‌ی میان تهران تا کرج را با سرعت متوسط V طی نموده است. کدام یک از موارد زیر درست است؟

۱) اتومبیل حتماً با سرعت ثابت V حرکت کرده است.

۲) اتومبیل هیچگاه در بین راه توقف نکرده است.