



گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

ریاضی ۱

( فصل ۵ )

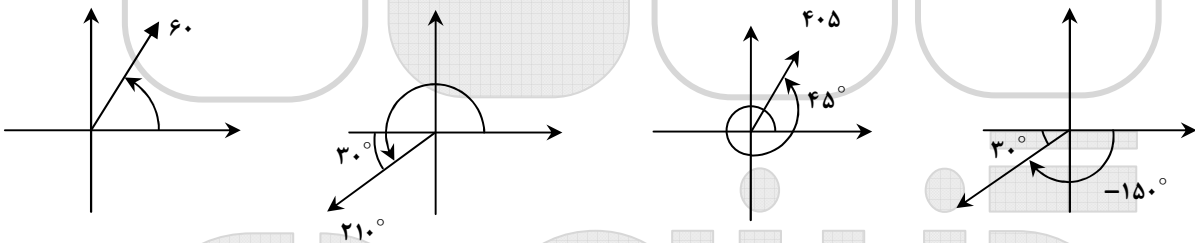
## مثلاثات

### زاویا و اندازه‌ی زاویا:

در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند، ایجاد می‌شود که یک نیم‌خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم‌خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد در نظر می‌گیریم. یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود. اگر تغییر مکان نیم‌خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

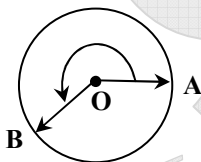
مثال: زاویه‌های  $۶۰^\circ$ ،  $۲۱۰^\circ$ ،  $۴۰۵^\circ$  و  $-۱۵۰^\circ$  را روی نمودار مشخص کنید؟

حل:



### واحد دیگری برای زاویه:

اگر متحرکی از نقطه‌ی  $A$  روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان  $B$  برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره‌خط  $OA$  حول  $O$  برحسب رادیان می‌نامند. اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می‌دهیم.



چون می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع  $R$  برابر  $۲\pi R$  است، لذا اگر ما کمانی از دایره به اندازه‌ی  $\theta$  را طی کنیم، مسافت طی شده توسط متحرک یا همان طول کمان برابر است با:  $L = R\theta$  (دقت کنید در این رابطه  $\theta$  حتماً باید با واحد رادیان بیان شود). حال اگر دایره مثلثاتی را در نظر بگیریم (دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ) محیط این دایره برابر  $۲\pi$  رادیان است، لذا می‌توان واحدهای درجه و رادیان را به صورت زیر بهم تبدیل نمود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{رادیان} \\ ۲\pi \\ x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{درجه} \\ ۳۶۰^\circ \\ ۱ \end{array} \rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳۶۰} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

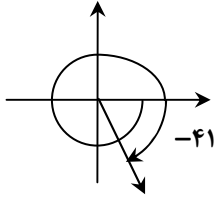
یعنی ۱ درجه برابر  $\frac{\pi}{۱۸۰}$  رادیان است در حالت کلی می‌توان گفت:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰} \rightarrow R = \frac{\pi}{۱۸۰} D$$

$\downarrow$  رادیان       $\downarrow$  درجه

مثال: زاویه ی ۷- رادیان را روی نمودار نشان دهید.

حل:

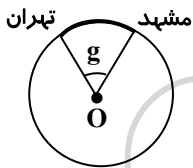


$$D = \frac{180}{\pi} R = \frac{180 \times -7}{3/1415} \approx -40.1$$

مثال: فرض کنیم فاصله ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. اگر شعاع زمین ۶۴۴۰ کیلومتر فرض شود، زاویه ای از مرکز زمین که یک ضلع آن منتهی به تهران و ضلع دیگر منتهی به مشهد شود، چقدر است؟

حل:

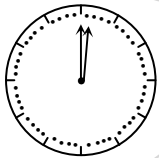
اگر فاصله ی تهران تا مشهد را کمان طی شده در نظر بگیریم، داریم:



$$R\theta = L \rightarrow 6440\theta = 1000 \rightarrow \theta = \frac{100}{644} = 0.155 \text{ rad}$$

مثال: چه مدت طول می کشد تا عقربه ی دقیقه شمار به اندازه ی  $2/5\pi$  رادیان دوران کند؟

حل: دقیقه شمار هر ۱ دقیقه  $1/6$  دایره یعنی  $\frac{\pi}{3}$  رادیان دوران می کند، لذا برای  $2/5\pi$



رادیان دوران  $\frac{2/5\pi}{\pi/3} = 75$  دقیقه زمان لازم است.

مثال: اگر چرخ و فلکی ۴۰ کابین داشته باشد و در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت روی کابین ۳ قرار داشته باشیم، پس از  $\frac{47\pi}{10}$  رادیان دوران در موقعیت کدام کابین قرار می گیریم؟

حل: چون چرخ و فلک دایره را به ۴۰ قسمت مساوی تقسیم کرده است، لذا فاصله ی هر ۲ کابین  $\frac{\pi}{20}$  است، یعنی پس از

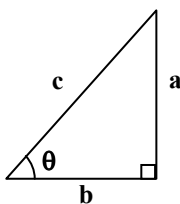
هر  $\frac{\pi}{20}$  رادیان دوران، ما در جایگاه کابین بعدی قرار می گیریم، لذا اگر بخواهیم  $\frac{47\pi}{10}$  دوران کنیم، در واقع به اندازه ی  $94 \times \frac{\pi}{20} = \frac{47\pi}{10}$

کابین جلو رفته ایم چون هر  $2\pi$  رادیان یکبار به جایی که هستیم برمی گردیم، پس باید فرض کنیم به اندازه ی ۱۴ کابین پیش رفته ایم.

چون  $\frac{47\pi}{10} = 4\pi + \frac{7\pi}{10}$  و  $\frac{7\pi}{10} = 14 \times \frac{\pi}{20}$  یعنی الان در جایی قرار داریم که کابین ۱۷ ام در ابتدای حرکت قرار داشت.

### سینوس و کسینوس یک زاویه:

نسبت ضلع مقابل یک زاویه به وتر را در مثلث قائم الزاویه سینوس آن زاویه می نامند. همچنین نسبت ضلع مجاور به یک زاویه به وتر را در مثلث قائم الزاویه کسینوس آن زاویه می نامند.



$$\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دامنه‌ی تابع  $f(x) = \text{Sin } x$  و  $f(x) = \text{Cos } x$  برابر  $\mathbb{R}$  است.

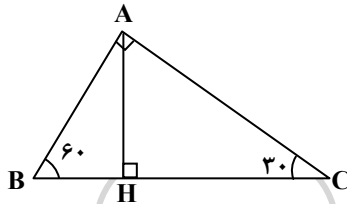
چون همواره  $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  است، لذا  $|\text{Sin } x| \leq 1$  و  $|\text{Cos } x| \leq 1$  پس:

$$-1 \leq \text{Sin } x \leq 1$$

$$-1 \leq \text{Cos } x \leq 1$$

مثال: اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا  $30^\circ$  باشد و ضلع نظیر این زاویه (ضلع غیروتر) ۱۲ باشد، طول ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه و اندازه‌ی قطعاتی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر ایجاد می‌کند را به دست آورید.

حل:



$$\text{Sin } 30^\circ = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = 12 \text{Sin } 30^\circ = 6$$

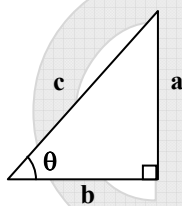
$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{CH}{AC} \rightarrow CH = 12 \text{Cos } 30^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Sin } 60^\circ = \frac{AH}{AB} \rightarrow AB = \frac{AH}{\text{Sin } 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{BH}{AB} \rightarrow BH = 4\sqrt{3} \text{Cos } 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

### تانژانت و کتانژانت یک زاویه:

بنابر تعریف تانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:



$$\tan x = \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

دامنه‌ی تابع تانژانت  $D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$  است.

نکته: در واقع می‌توان گفت شیب یک خط، تانژانت زاویه‌ی بین آن خط و جهت مثبت محور  $x$ ها است.

بنابر تعریف کتانژانت یک زاویه عبارتست از نسبت ضلع مجاور به ضلع مقابل در مثلث قائم‌الزاویه، به عبارت دیگر داریم:

$$\text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x} = \frac{b}{a}$$

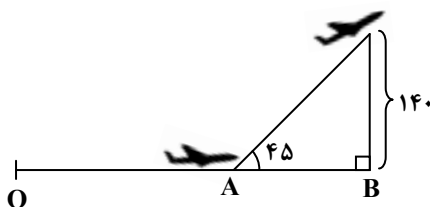
دامنه‌ی تابع کتانژانت  $D = \mathbb{R} - [k\pi \mid k \in \mathbb{Z}]$  است.

$$\text{tan } x \cdot \text{Cot } x = 1 \text{ یا } \text{tan } x = \frac{1}{\text{Cot } x} \text{ برای } x \neq \frac{k\pi}{2}$$

مثال: هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند، سپس با زاویه‌ی

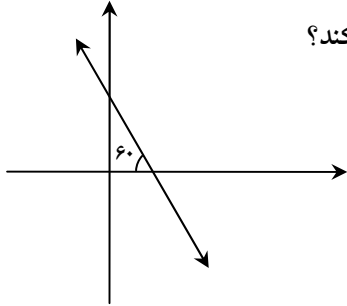
$45^\circ$  از زمین بلند می‌شود. وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟

حل:



$$\tan 45^\circ = \frac{140}{AB} \Rightarrow AB = \frac{140}{1} \Rightarrow AB = 140$$

$$OA = 300 \rightarrow OB = 300 + 140 = 440$$



مثال: خط مقابل از نقطه  $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$  می‌گذرد. این خط محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

حل: شیب تانژانت زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور  $x$ ‌ها است.

$$m = \tan \theta = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

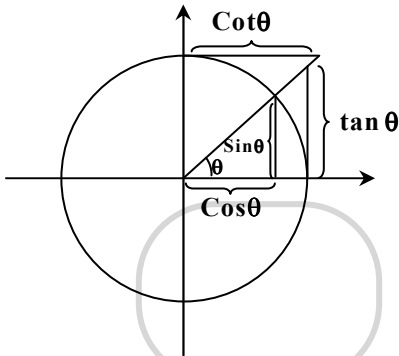
$$\rightarrow y - 2 = -\sqrt{3}(x - 1) \quad \text{معادله خط:}$$

$$\rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$$

### نمایش هندسی توابع مثلثاتی روی دایره ی مثلثاتی:

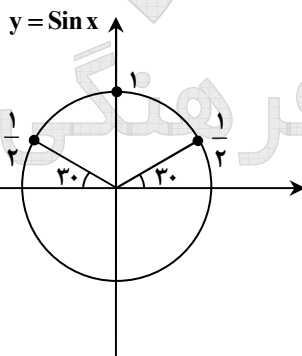
اگر دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبدأ (دایره ی مثلثاتی) را داشته باشیم، توابع

مثلثاتی را می‌توان روی این دایره نمایش داد.



### سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت زوایای مهم:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
Cot x	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



مثال: اگر  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$  باشد، محدوده‌ی تغییرات  $y = \text{Sin } x$  چقدر است؟

حل: با دقت در دایره ی مثلثاتی و تغییرات  $\text{Sin } x$  در ربع اول و

دوم ملاحظه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \leq \text{Sin } x \leq 1$$

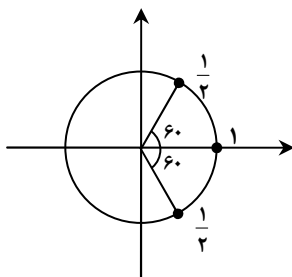
مثال: اگر  $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$  باشد،  $\text{Cos } 3x = \frac{m-1}{2}$  باشد، مقادیر  $x$  در کدام فاصله است؟

حل: با دقت در دایره ی مثلثاتی و ملاحظه ی تغییرات  $3x$  داریم:

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \leq \text{Cos } 3x \leq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \rightarrow 2 \leq m \leq 3$$



علامت توابع مثلثاتی در ربع‌های مختلف:

ربع اول	$\sin x > 0$ $\cos x > 0$ $\tan x > 0$ $\cot x > 0$
ربع دوم	$\sin x > 0$ $\cos x < 0$ $\tan x < 0$ $\cot x < 0$
ربع سوم	$\sin x < 0$ $\cos x > 0$ $\tan x < 0$ $\cot x < 0$
ربع چهارم	$\sin x < 0$ $\cos x < 0$ $\tan x > 0$ $\cot x > 0$

اتمادهای مثلثاتی مهم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1 \quad \theta \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \theta \neq k\pi$$

تذکر:  $\sin^2 \theta$  به معنای  $(\sin \theta)^2$  است و با مقدار  $\sin(\theta)^2$  متفاوت است.

مثال: اگر  $\tan x = \frac{1}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم باشد، مقدار  $\sin x$  کدام است؟

حل:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{10}$$

$$\rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

چون انتهای کمان در ناحیه سوم است، لذا  $\sin x < 0$  است، پس:  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

روابط توابع مثلثاتی در کمان‌های مثلثاتی مختلف با هم:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$ $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(k\pi + \theta) = \cot \theta$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta \rightarrow \sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$ $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta \rightarrow \cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$ $\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta \rightarrow \tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$ $\cot(2\pi + \theta) = \cot \theta \rightarrow \cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

مثال: از تساوی  $\frac{2 \sin(\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = 2$  مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟

حل:

$$\sin(\alpha \pm 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cos \alpha$$

$$\frac{2 \sin(\alpha - \pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \tan \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

مثال: ساده شده عبارت  $A = \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(\pi + x) + \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$  را به دست آورید.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\cos x + \cos x - \cos x - \cos x = -2\cos x$$

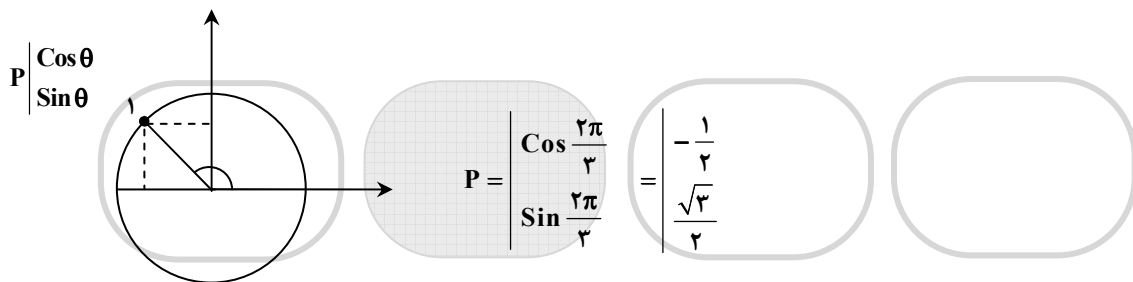
مثال: حاصل  $A = \sin 186^\circ + \cos 186^\circ$  چقدر است؟

حل:

$$186^\circ = 5 \times 36^\circ + 6^\circ \rightarrow \begin{cases} \sin(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(10\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

مثال: نقطه‌ی  $\left| \frac{2\pi}{3} \right|$  را به اندازه‌ی  $\frac{2\pi}{3}$  در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی حاصل کدام است؟

حل:



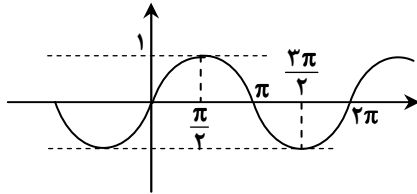
خریسه دو  
مؤسسه آموزشی فرهنگی



## توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکات متناوب در طبیعت با توابع مثلثاتی بیان می‌شوند.

توابع  $y = \sin x$  ,  $y = \cos x$  ,  $y = \tan x$  ,  $y = \cot x$  توابع مثلثاتی نام دارند و دامنه و برد و نمودارشان به صورت زیر است:  
(الف)



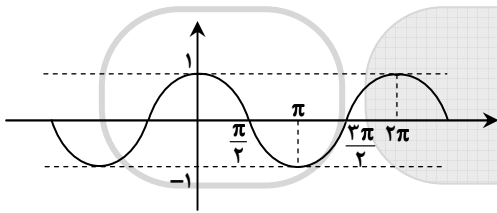
$$y = \sin x$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

چون  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  تابع  $y = \sin x$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

\* صفرهای (ریشه‌های) تابع  $y = \sin x$  در  $x = k\pi$  رخ می‌دهد.



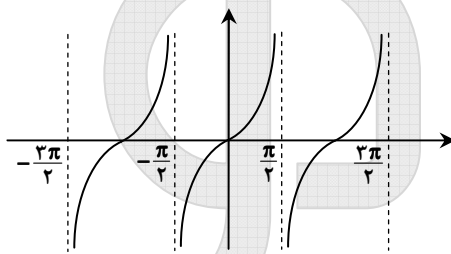
$$y = \cos x$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-1, 1]$$

چون  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  تابع  $y = \cos x$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $2\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \cos x$  در  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  رخ می‌دهد.



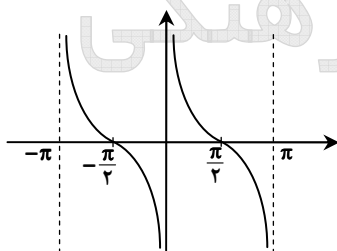
$$y = \tan x$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R = \mathbb{R}$$

چون  $\tan(x + \pi) = \tan x$  تابع  $y = \tan x$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \tan x$  در  $x = k\pi$  رخ می‌دهد.



$$y = \cot x$$

$$D = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

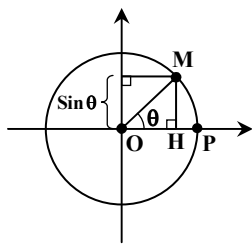
چون  $\cot(x + \pi) = \cot x$  تابع  $y = \cot x$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $\pi$  است.

\* صفرهای تابع  $y = \cot x$  در  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  رخ می‌دهد.

نکته: توابع  $y = A \sin(ax+b)$  و  $y = A \cos(ax+b)$  متناوب با دوره‌ی تناوب  $T = \frac{2\pi}{a}$  می‌باشند. دامنه‌ی این توابع  $\mathbb{R}$  و برد آنها

$-|A| \leq y \leq |A|$  است.

### ارتباط بین دایره‌ی مثلثاتی و تابع سینوس:

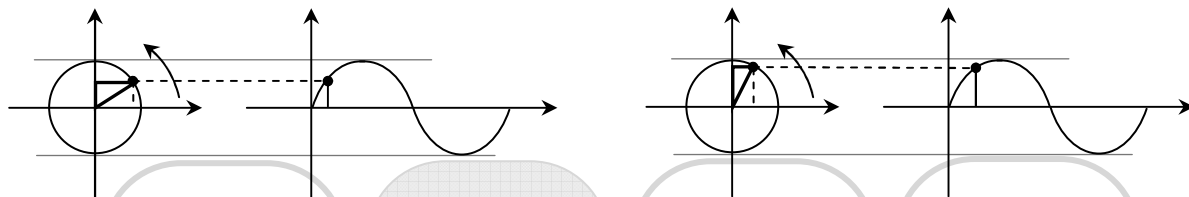


اگر نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی حرکت کند، مقدار  $y$  نقطه در هر لحظه، برابر مقدار

سینوس زاویه‌ای است که نقطه با مبدأ و محور  $x$ ‌ها می‌سازد. در واقع تصویر

متحرک  $M$  روی محور  $y$ ‌ها برابر با سینوس زاویه در هر لحظه است.

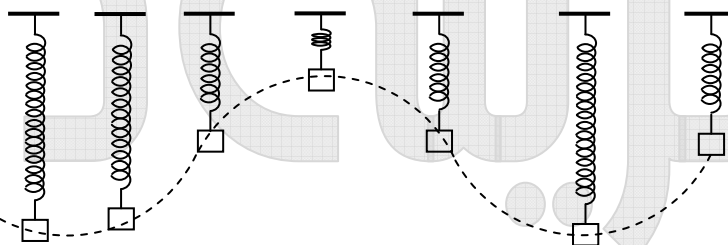
\* یعنی حرکت تصویر  $M$  روی محور  $y$ ‌ها با تابعی سینوس صورت می‌پذیرد.



برخی حرکات در طبیعت وقتی در قالب زمان مورد بررسی قرار می‌گیرند، نموداری سینوسی دارند، مثلاً فرض کنید وزنه را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حالت تعادل رسیده است. اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده شود و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک، وزنه حرکتی نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه حالت تعادل وزنه باشد و وزنه در  $t=0$  در حالت

تعادل باشد، ارتفاع وزنه در هر حالت برابر است با:  $y(t) = A \sin \omega t$

اگر از مقابل به آونگ نگاه کنیم، و حرکت را در زمان‌های مختلف تصویربرداری کنیم، چیزی شبیه حرکت تصویر نقطه‌ی روی محور  $y$ ‌ها در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌شود.



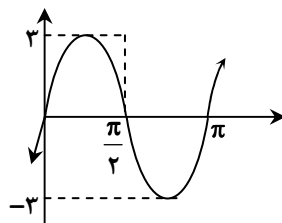
مثال: حداقل و حداکثر و دوره‌ی تناوب توابع زیر را به دست آورده و آن‌ها را رسم کنید.

حل:

$$y = 3 \sin 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

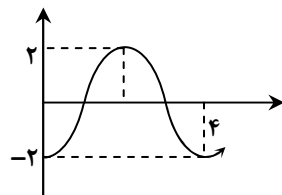
$$-3 \leq y \leq 3$$



$$y = -2 \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$-2 \leq y \leq 2$$



مثال: اگر  $y = \cos^2 x - 2\sin^2 x$  باشد، محدوده‌ی تغییرات  $y$  کدام است؟

حل:

$$y = \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) = 4\cos^2 x - 2$$

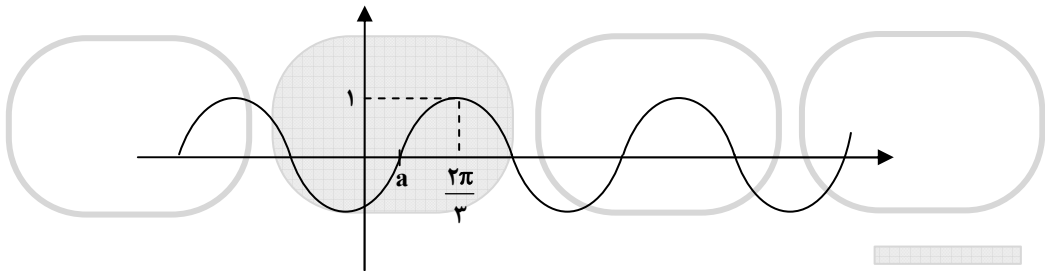
$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \rightarrow -2 \leq 4\cos^2 x - 2 \leq 2 \rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

مثال: اگر  $x = \frac{2\pi}{3}$  طول اولین نقطه‌ای با طول مثبت باشد که تابع  $y = \sin(x-a)$  در آن به مقدار حداکثر می‌رسد،  $a$  چقدر است؟

حل: در تابع  $y = \sin x$ ،  $x = \frac{\pi}{2}$  اولین نقطه‌ای است که  $y = \sin x$  در آن به اوج می‌رسد. لذا چون این نقطه به اندازه‌ی

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

به جلو حرکت کرده است، پس  $a = \frac{\pi}{6}$  می‌باشد.



مثال: کدام عبارت نادرست است؟

$$(1) \sin 37 > \cos 75$$

$$(3) \cos 125 < \cos 212$$

$$(2) \sin 160 > \cos 285$$

$$(4) \cos(-65) < \sin 55$$

حل:

گزینه ۱: چون  $\cos 75 = \sin 15$  و  $\sin x$  در فاصله‌ی  $[0, \frac{\pi}{2}]$  صعودی است، لذا:

$$\sin 37 > \cos 75 = \sin 15$$

گزینه ۲:

$$\left. \begin{array}{l} \sin 160 = \sin 20 \\ \cos 285 = \cos(-75) = \cos 75 = \sin 15 \end{array} \right\} \rightarrow \sin 20 > \sin 15$$

گزینه ۳:

$$\cos 125 = \cos(180 - 55) = -\cos 55$$

$$\cos 212 = \cos(180 + 32) = -\cos 32$$

تابع  $y = \cos x$  در فاصله‌ی  $[0, \pi]$  تابعی نزولی است، لذا:

$$\cos 32 > \cos 55 \rightarrow -\cos 32 < -\cos 55 \rightarrow \cos 212 < \cos 125$$

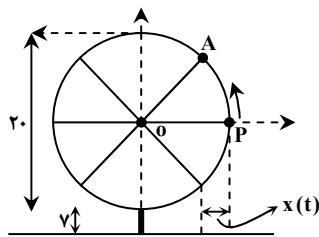
پس گزینه ۳ نادرست است.

گزینه ۴:

$$\cos(-65) = \cos 65 = \sin 25$$

$$\sin 55 > \sin 25 = \cos(-65)$$

مثال: فرض کنید چرخ و فلکی به قطر ۲۰ داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. فرض کنید پایین ترین نقطه‌ی چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه‌ی  $t=0$  با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.



الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

ب) اگر در لحظه‌ی  $t$  فاصله‌ی سایه این کابین روی زمین تا نقطه‌ی A را با  $x(t)$  نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

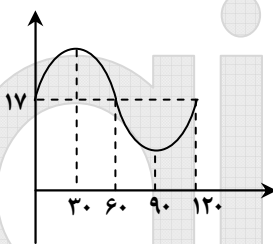
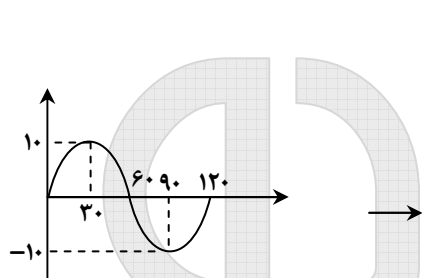
حل:

الف) اگر محورهای مختصات را بر مرکز دایره قرار دهیم در لحظه‌ی  $t=30$ ،  $y=10$  است و در لحظه‌ی  $t=60$ ،  $y=0$  و در لحظه‌ی  $t=90$ ،  $y=-10$  و در لحظه‌ی  $t=120$  مجدداً  $y=0$  می شود.

لذا چون معادله‌ی این حرکت نوسانی  $y = A \sin \omega t$  است، لذا با داده‌های فوق می توان  $\omega$  و  $A$  را یافت. چون ماکزیمم تابع در  $t=30$  رخ می دهد. پس باید:  $\omega \times 30 = \frac{\pi}{2}$  باشد، پس:  $\omega = \frac{\pi}{6}$  است. اما چون این مقدار ماکزیمم برابر ۱۰ است، لذا هنگامی که

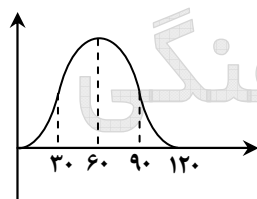
$$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

سینوس برابر یک است،  $y$  باید برابر ۱۰ باشد؛ پس:

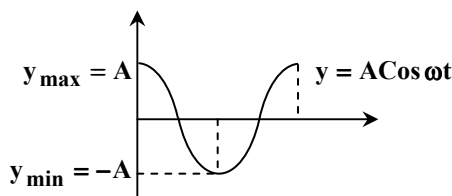


حال اگر محورهای مختصات را نسبت به زمین در نظر بگیریم، معادله‌ی حرکت نقطه‌ی P عبارت است از:  $y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 17$  چون در لحظه‌ی  $t=0$  فاصله‌ی نقطه‌ی P از زمین ۱۷ متر است.

ب) چون طول سایه هم نوسانی است و در لحظه‌ی  $t=0$  برابر  $x=0$  و در لحظه‌ی  $t=30$  برابر  $x=10$  و در لحظه‌ی  $t=60$  برابر  $x=20$  و در لحظه‌ی  $t=90$  برابر  $x=10$  و در لحظه‌ی  $t=120$  برابر  $x=0$  است.



چون این تابع با مقدار می نیمم آغاز و به مقدار ماکزیمم ختم می شود، از تابع  $\cos x$  استفاده می کنیم. منتها چون این تابع از می نیمم به ماکزیمم حرکت می کند، نمودار آن به صورت مقابل است:



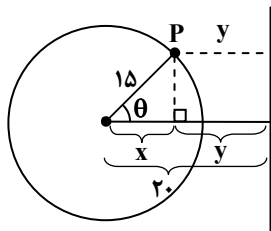
با دقت در نمودار  $y = A \cos \omega t$  و مقایسه‌ی آن با نمودار فوق درمی یابیم این تابع به صورت  $y = -A \cos \omega t + B$  است.

ابتدا  $\omega$  را می یابیم:

$$t=0 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow y = -A \cos(\omega \times 30) = -10 \Rightarrow \omega \times 30 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}, A=10$$

پس تابع با انتقال ۱۰ واحدی به بالا نهایتاً به صورت:  $y = -10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 10$  است.

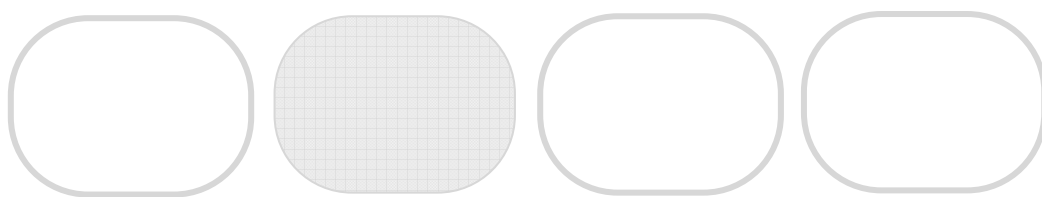
مثال: فاصله‌ی مرکز یک تاب گردان از میله‌های محافظ کنار آن ۲۰ متر و شعاع آن در هنگام گردش ۱۵ متر است. کدام معادله فاصله‌ی هر نقطه‌ی تاب در حال گردش را از میله‌ی محافظ به دست می‌دهد؟ ( $\theta$  زاویه‌ی بین نقطه‌ی روی تاب و خط فاصله‌ی مرکز دوران تا میله‌هاست).



حل: فاصله‌ی هر نقطه مانند P از میله‌ی فلزی برابر y می‌باشد که به زاویه‌ی  $\theta$  بستگی دارد. داریم:

$$\cos \theta = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \cos \theta \quad (*)$$

$$y = 20 - x = 20 - 15 \cos \theta \quad (*)$$



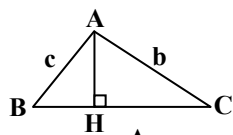
# خریشتو

## مؤسسه آموزشی فرهنگی

## کاربردهای از مثلثات

## قضیه کسینوس‌ها:

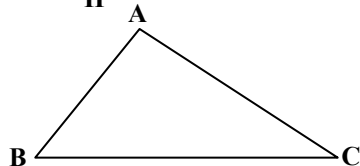
در هر مثلث داریم:



$$BC = BH + HC$$

$$\rightarrow a = c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C}$$

لذا در هر مثلث داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

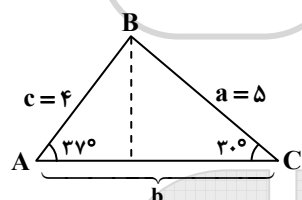
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

اثبات روابط فوق بر اساس قضیه فیثاغورس و رابطه‌ی فوق صورت گرفته و در کتاب درسی موجود است.

مثال: زمینی مثلث شکل برای ساخت یک فروشگاه زنجیره‌ای در نظر گرفته شده است. محیط این زمین کدام است؟

$$(\cos 37^\circ = 0/8 \text{ و } \cos 30^\circ = 0/86)$$

حل: از رابطه‌ی  $b = c \cos A + a \cos C$  داریم:

$$b = 4 \cos 37^\circ + 5 \cos 30^\circ = 4(0/8) + 5(0/86) = 3/2 + 4/2 = 7/2$$

بنابراین محیط مثلث برابر است با:

$$\text{محیط} = a + b + c = 5 + 7/2 + 4 = 16/2$$

مثال: اگر اضلاع مثلثی  $a = 3$  و  $b = 3\sqrt{3}$  و  $c = 6$  باشد، زاویه‌ی  $A$  چقدر است؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow 9 = 27 + 36 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 6 \cos A$$

$$\Rightarrow 36\sqrt{3} \cos A = 54 \rightarrow \cos A = \frac{54}{36\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A = \frac{\pi}{6}$$

مثال: اگر در مثلث غیر متساوی‌الساقینی رابطه‌ی  $a^3 - b^3 = c^2(a - b)$  برقرار باشد، زاویه‌ی  $C$  کدام است؟

حل:

$$(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = c^2(a - b) \xrightarrow{a \neq b} a^2 + b^2 + ab = c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

با مقایسه‌ی این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\rightarrow -2ab \cos \hat{C} = ab \rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 120^\circ$$

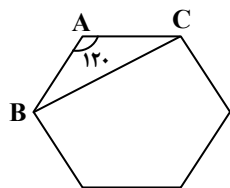
مثال: طول قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم را پیدا کنید که طول ضلع آن ۲ است.

حل: می‌دانیم هر زاویه‌ی شش‌ضلعی منتظم  $120^\circ$  است. لذا طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ$$

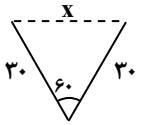
$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$$

$$\rightarrow BC^2 = 12 \rightarrow BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

نکته: هر زاویه داخلی  $n$  ضلعی منتظم از رابطه‌ی  $\frac{(n-2) \times 180}{n}$  به دست می‌آید.

مثال: متحرکی ابتدا ۳۰ متر حرکت کرده و سپس روی مسیری که با مسیر اول زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد به همان اندازه حرکت می‌کند. وقتی متحرک به انتهای مسیر دوم می‌رسد، فاصله‌ی وی از نقطه‌ی شروع چقدر است؟

حل: با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$x^2 = (30)^2 + (30)^2 - 2(30)(30) \times \frac{1}{2} = 900$$

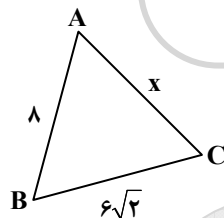
$$\Rightarrow x = \sqrt{900} = 30$$

البته این مثال را با روش هندسی نیز می‌توان حل کرد.

مثال: فاصله‌ی بین دو شهر A و B، ۸ کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C،  $6\sqrt{2}$  کیلومتر است. اگر این سه شهر را دایره‌دو روی نقشه با خط راست به هم وصل کنیم، زاویه‌ی A با دو شهر دیگر ۶۰ می‌شود. فاصله‌ی شهر A تا شهر C چند کیلومتر است؟

حل:

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$(6\sqrt{2})^2 = x^2 + 8^2 - 2(8)(x) \cos 60^\circ$$

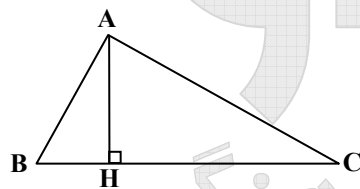
$$\Rightarrow (72) = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x - 8 = 0$$

حل معادله  $\Delta = (-8)^2 + 32 = 96$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \sqrt{24} = 4 + 2\sqrt{6} \\ x = 4 - \sqrt{24} = 4 - 2\sqrt{6} < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{ضلع با طول منفی نداریم پس غیرقابل قبول است}$$

### مساحت مثلث و قضیه‌ی سینوس‌ها:

در مثلث ABC مساحت مثلث برابر است با:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$AH = AB \times \sin B = AC \times \sin C \quad \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} AC \times BC \sin C$$

$$\rightarrow AB \sin B = AC \sin C \rightarrow \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

با نوشتن این رابطه با یکی دیگر از ارتفاع‌ها و اثباتی مشابه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\text{پس: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

قضیه‌ی فوق را قضیه‌ی سینوس‌ها می‌نامند.

نکته: مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a و b و زاویه‌ی بین θ عبارتست از:

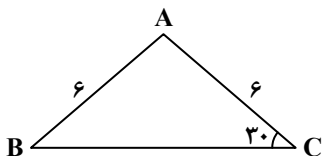
$$S = a b \sin \theta$$

مثال: اگر در مثلثی  $A = 30^\circ$  و  $B = 120^\circ$  و  $a = 8$  باشد، سه ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید.  
 حل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \Rightarrow 16 = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2c \Rightarrow c = 8, b = 8\sqrt{3}$$

حال مساحت را با هر کدام از دو ضلع به صورت دلخواه می توان نوشت:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} \sin 30^\circ = 16\sqrt{3}$$

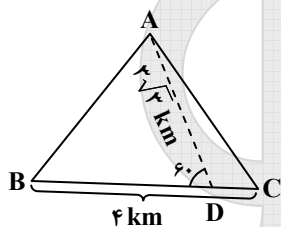


مثال: مؤسسه‌ای غرفه‌ی فروش محصولات خود را در زمینی به ابعاد مقابل برپا کرده است. مساحت این زمین کدام است؟

حل: مثلث ABC متساوی‌الساقین است، لذا  $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ ، بنابراین  $\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$  داریم:

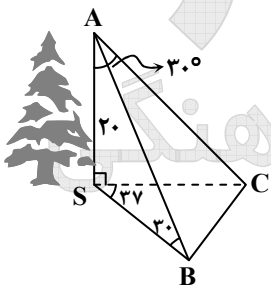
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 120^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

مثال: بانکی مثلثی شکل با پارتیشن‌بندی به طول  $3\sqrt{3}$  متر به دو قسمت برای استفاده‌ی کارمندان و ارباب رجوع تقسیم شده است. اگر بزرگ‌ترین ضلع بانک به طول ۴ متر بوده و زاویه‌ی مرز AD و یکی از نواحی جدید  $60^\circ$  باشد، مساحت بانک چند متر مربع است؟



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \times DB \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} AD \times DC \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} BD + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} DC = \frac{9}{4} (BD + DC) = \frac{9}{4} (BC) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$



مثال: رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است، اندازه بگیرد. او روبه‌روی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت  $30^\circ$  است. سپس رضا به سمت نقطه‌ی C حرکت می‌کند به گونه‌ای که SB و SC با یکدیگر زاویه‌ی  $37^\circ$  می‌سازند. اگر در این حالت رضا طول درخت را ۲۰ متر اندازه‌گیری کند، مساحت مثلث SBC چقدر است؟ (زاویه‌ی بین AS و AB،  $15^\circ$  است و داریم:

$$\sin 15^\circ = 0.26$$

حل:

$$\triangle ASC: \tan A = \frac{SC}{SA} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{SC}{20} \rightarrow SC = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

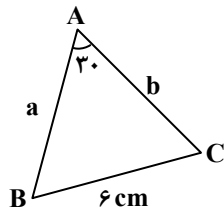
$$\triangle ASB: \frac{SB}{\sin 15^\circ} = \frac{AS}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\frac{1}{2}} \Rightarrow SB = 40 \times 0.26 = 10.4$$

لذا در مثلث SBC داریم:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} (SB \cdot SC \cdot \sin 37^\circ) = \frac{1}{2} \times 10.4 \times \frac{20}{\sqrt{3}} \times \frac{6}{10} = 36/7$$



مثال: در مثلث روبه‌رو اگر  $a = 6 \text{ cm}$  و  $\hat{A} = 30^\circ$  و  $\cos B = \frac{3}{5}$  باشد، طول ضلع  $b$  کدام است؟



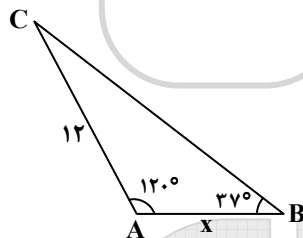
حل:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow[\text{پس } \hat{B} < 180^\circ]{\text{Sin } \hat{B} \text{ مثبت است}} \sin B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{4}{5}} \Rightarrow b = 12 \times \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

مثال: شکل کلی یک زمین گلف به صورت زیر است. مساحت این زمین چقدر است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$  و  $\sin 23^\circ = 0.4$ )

حل:



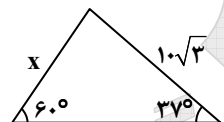
$$\hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 37^\circ)$$

$$\frac{12}{\sin 37^\circ} = \frac{x}{\sin 23^\circ} \Rightarrow x = \frac{12 \times 0.4}{0.6} = 8$$

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 120^\circ = 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

مثال: شمعی به طول ۱۵ سانتی‌متر را در حالی که خودکاری به طول  $10\sqrt{3}$  به نوک آن تکیه داده شده و شمع با زمین زاویه‌ی  $60^\circ$  می‌سازد، روشن می‌کنیم. مدتی پس از آب شدن شمع (بدون تغییر زاویه با زمین) خودکار بدون تغییر طول کمی روی زمین سُر خورده و زاویه‌ی آن با زمین به  $37^\circ$  کاهش می‌یابد. چند سانتی‌متر از شمع آب شده است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$ )

حل: ابتدا طول شمع را پس از کاهش از رابطه‌ی سینوس‌ها می‌یابیم:



$$\frac{10\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 37^\circ} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 0.6 = 12$$

بنابراین  $15 - 12 = 3$  سانتی‌متر از شمع آب شده است.

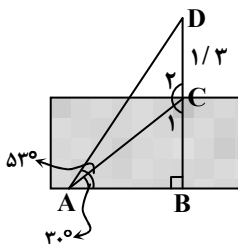
مثال: آنتنی روی زمین به صورت عمودی قرار گرفته است. اگر طول قسمت بیرون زمین آنتن،  $\frac{1}{3}$  متر باشد و قسمت انتهایی میله با نقطه‌ی A در داخل زمین زاویه‌ی  $53^\circ$  و قسمت ابتدایی بیرون زمین آنتن با آن نقطه زاویه‌ی  $30^\circ$  بسازد، طول آنتن

کدام است؟ ( $\sin 37^\circ = 0.6$  و  $\sin 23^\circ = 0.39$ )

حل: در مثلث ACD با توجه به قانون سینوس‌ها داریم:

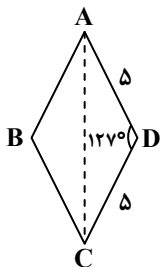
$$\frac{CD}{\sin(53^\circ - 30^\circ)} = \frac{AC}{\sin D} \Rightarrow \frac{1/3}{\sin 23^\circ} = \frac{AC}{\sin 37^\circ} \Rightarrow AC = \frac{1/3 \times 0.6}{0.39} = 2$$

$$BC = AC \cdot \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow BD = BC + CD = 1 + 1/3 = 2/3$$



مثال: مساحت لوزی‌ای با ضلع ۵ و یک زاویه ۱۲۷ چقدر است؟ ( $\cos 127^\circ \approx -\frac{3}{5}$ )

حل:

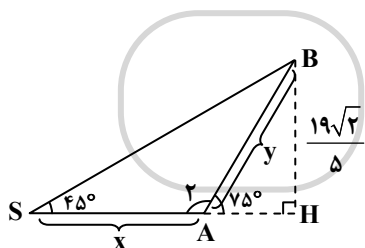


$$\sin^2 D + \cos^2 D = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 D = 1 - \cos^2 127^\circ = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow[\text{مثبت است}]{\text{در ریبج دوم Sin}} \sin D = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin D = 5 \times 5 \times \frac{4}{5} = 20$$

مثال: حمید و وحید در یک امتداد روی زمین دراز کشیده‌اند و به نوک یک کوه می‌نگرند. اگر یکی از آن‌ها قله‌ی کوه را در نقطه‌ی A با زاویه‌ی ۷۵ درجه و دیگری در نقطه‌ی S با زاویه‌ی ۴۵ درجه ببیند و ارتفاع کوه برابر  $\frac{3}{8}$  کیلومتر باشد، فاصله‌ی آن دو از هم چند کیلومتر است؟ ( $\sin 75^\circ \approx 0.95$ )



حل: در مثلث AHB داریم:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \sin 75^\circ = \frac{3/8}{y} \Rightarrow y = \frac{3/8}{0.95} \Rightarrow y = \frac{4 \times 0.95}{0.95} \Rightarrow y = 2$$

هم‌چنین داریم:

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

از قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2x \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین این دو نفر به فاصله‌ی  $2\sqrt{2}$  کیلومتر از هم قرار دارند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی