



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی

پایه می، هشتم

(ویرتیه ی مدارس استعداد های درخشان استان اصفهان)



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پروران جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و دهان پایه‌ی هشتم

شناسنامه جزوه:

ریاضی تکمیلی

پایه‌ی هشتم

(وشره‌ی مدارس استعداددهای درخشان استان اصفهان)

دسته‌بندی مطالب توسط:

گروه ریاضی دبیرستان شهید آره‌ای (۱) اصفهان (دوره‌ی اول)

تنظیم توسط:

حمید شیخ‌الاسلامی

معاون فناوری دبیرستان شهید آره‌ای (۱) اصفهان (دوره‌ی اول)

آبان ماه ۱۳۹۳

جهت دریافت فایل جزوه به آدرس www.mrse1.ir بخش نشریه الکترونیکی مراجعه فرمایید.



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حضرت آیت الله خامنه‌ای در دیدار با نخبگان و برگزیدگان علمی:

تهیه‌ی سند ملی نخبگان یکی از اقدامات بسیار ضروری و مهم

است، زیرا مسیر شناسایی و پرورش استعدادها را مشخص خواهد کرد.



فهرست:

صفحه	عنوان
۵	فصل یکم اعداد صحیح و گویا
۱۵	فصل دوم اعداد طبیعی
۲۵	فصل سوم چند ضلعی ها
۳۷	فصل چهارم جبر و معادله
۵۲	فصل پنجم بردار مختصات
۷۱	فصل ششم مثلث
۸۳	فصل هفتم توان و جذر
۹۸	فصل هشتم آمار
۱۰۰	فصل نهم دایره
۱۱۱	منابع و مراجع



فصل یکم

اعداد صحیح

و گویا



۱) در موارد زیر، اعداد پشت پرانتز را در داخل پرانتز پخش کنید.

الف) $43 \times (11 + 13 - 6) =$

ب) $12 \times (-12 + 7/2) =$

ج) $-2 \times (101 + 202) =$

د) $-(14 + 18 - 33) =$

ه) $22 \times (3 + 5^2) =$

و) $7^2 \times 3^3 \times (2^3 - 6 + 15) =$

ز) $-12 \times (3 + 7 \times 2) =$

ح) $3^2 \times 4 \times (17 - (6 \times 5)) =$

حال که با خاصیت پخشی آشنا شدید، به راحتی می توانید با عملیاتی آشنا شوید که به «فاکتورگیری» معروف است. عملیات فاکتورگیری دقیقاً عکس خاصیت پخشی است. یعنی اگر به عنوان مثال طرفین تساوی

$$220 \times (18 + 42 + 6 + 22) = 220 \times 18 + 220 \times 42 + 220 \times 6 + 220 \times 22$$

را جابه جا کنیم، به عملیات فاکتورگیری می رسیم.

$$220 \times 18 + 220 \times 42 + 220 \times 6 + 220 \times 22 = 220 \times (18 + 42 + 6 + 22)$$

در واقع در تساوی بالا از عدد ۲۲۰ فاکتور گرفته ایم.

مثال: در تساوی های زیر، از عدد ۶ فاکتور گرفته شده است.

الف) $6 \times 11 + 6 \times 15 - 6 \times 12 = 6 \times (11 + 15 - 12)$

ب) $24 - 36 - 30 = 6 \times 4 - 6 \times 6 - 6 \times 5 = 6 \times (4 - 6 - 5)$



۲) در موارد زیر، از بزرگ‌ترین عدد ممکن فاکتور بگیرید.

الف) $9 \times 15 + 9 \times 3 + 9 \times 5 =$

ب) $2 \times 12 + 2 \times 18 - 2 \times 21 =$

ج) $24 + 32 + 40 - 56 =$

د) $120 + 24 - 72 =$

ه) $2^2 \times 6 - 2 \times 14 + 4 \times 10 =$

و) $2^2 \times 3^2 - 2^3 \times 3^2 =$

ز) $2^5 \times 3^2 \times 7 \times 11 - 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 + 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 =$

ح) $40 + 400 - 8 \times 25 =$

تمرین

۱) حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $[-2 - (-8)] \times [-24 \div 4] =$

ب) $[(-2) - (+3)] + [-(-4) - +6] =$

ج) $(-10 + 5)(-9 + 5)(-8 + 5) \dots (-2 + 5)(-1 + 5) =$

د) $\frac{75 \times (-72)}{(-50) \times (-27)} =$

ه) $\frac{(-70) \times (-48)}{(-42) \times (40)} =$

و) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 98 - 99 + 100 =$



۲) در دنباله‌های زیر، ۲ عدد بعدی را بگویید.

الف) $1, 4, -9, 16, \dots$

ب) $1, -2, 3, -5, 8, \dots$

۳) کدام یک از این دو عدد، به -51 نزدیک‌تر است؟ -48 یا -55 ؟

۴) کدام یک از این دو عدد، از قرینه‌ی 10^- کوچکتر است؟ 3 یا -3 ؟

۵) الف) جاهای خالی را با دو عدد پر کنید به طوری که تساوی درست شود.

$$(\square \times (+3)) - (\square \times (-2)) = 8$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۶) درست یا غلط؟

«اعداد صحیح منفی بزرگتر از -5 ، پنج عضو دارد.»

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۶) درست یا غلط؟

«اعداد صحیح منفی بزرگتر از -5 ، پنج عضو دارد.»



تمرین

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $4^2 - 3^2 + 2^2$

ب) $4^3 + 3^2 - 2 \times 5^2$

ج) $6 \times 2^3 - 7^0 \times 6^2$

د) $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 2^0 - 2^5$

ه) $(5^3 - 3^5)(3^2 - 2^3)^4 - 5^4$

و) $(-5 \times 4)^2 \div 2^4 \times (-3)^2$

ز) $(2 - 3^2 \times 5^2 \div 15 - 2^3) \times (7 + 2)$

ح) $(4^3 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^{(3-1 \times 2)} - 4 \times (8 + 3^2)$

ط) $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

ی) $((1 \times 2 \div (3 \times 4) - 5) \times 6 - 7) \div (8 \times 9)$



تمرین

۱. عبارات زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

الف) $3 - 2\frac{1}{3}$

ب) $(12 - 3\frac{1}{5}) - 4$

ج) $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{10}{5}$

د) $(\frac{3}{8} - \frac{2}{6}) \div (\frac{1}{2\frac{2}{5} + 3\frac{3}{5}})$

ه) $\frac{\frac{15}{32} \times \frac{13}{4}}{\frac{3}{8} \times \frac{4}{16}} \div 52$

۲. در هر دسته، حاصل عبارات را به دست آورید:

الف) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$

ب) $\frac{8}{5} \div 4$

دسته ی اول:

الف) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{6}}$

ب) $\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{-3}}$

دسته ی دوم:

الف) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{4}}$

ب) $\frac{\frac{1}{5}}{-3}$

دسته ی سوم:

الف) $\frac{\frac{8}{2}}{\frac{5}{6}}$

ب) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

ج) $\frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{18}}$

د) $\frac{\frac{18}{2}}{\frac{8}{6}}$

دسته ی چهارم:



۳. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۴. اگر $\frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x} + \frac{8}{x} + \frac{13}{x}$ مقدار x را پیدا کنید.

۵. اگر به مخرج کسر $\frac{10}{15}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت آن اضافه کرد تا مقدار کسر تغییر نکند.

۶. حاصل عبارت زیر تقریباً چند است؟

$$\frac{1023}{2048} + \frac{513}{511} - \frac{301}{900} + \frac{5}{6}$$

۷. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{4} \times \dots \times 1\frac{1}{99} =$

ب) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right) =$

ج) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{100}\right) =$

د) $\left(2 - \frac{2}{3}\right) \left(2 - \frac{2}{4}\right) \left(2 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(2 - \frac{2}{100}\right) =$



۸. در تساوی زیر مقدار m و n را به دست آورید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

۹. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} =$

ب) $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51} =$

ج) $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35} =$

د) $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20} =$

ه) $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51} =$

و) $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24} =$

ز) $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} =$



کسره‌های مصری

در این قسمت هر موقع که نام عدد گویا را می‌آوریم، منظورمان یک عدد گویا بین 0 و 1 است. یکی از جذاب‌ترین و شاید هم پیچیده‌ترین کارهای محاسباتی در ریاضیات، تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری است. کاری که مصری‌ها علاقه‌ی زیادی به انجام دادن آن داشتند.

نوشتن یک عدد گویا به صورت کسره‌های مصری، نوشتن آن عدد به صورت مجموعی از کسرهایی است که صورت آن کسرها 1 و مخرج‌شان یک عدد طبیعی است به طوری که مخرج کسرها تکراری نباشند.

این‌که مصری‌ها با چه انگیزه‌ای به محاسبه‌ی این کسرها می‌پرداختند، جای سؤال است.

برای تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری، روش‌های فراوانی وجود دارد.

در مثال‌های زیر، هر عدد گویا به صورت کسره‌های مصری نوشته شده است.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

کسر $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ به صورت کسره‌های مصری نوشته نشده است. زیرا از مخرج 8 دوبار استفاده شده

است. امروزه ریاضی‌دانان می‌دانند که هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسره‌های مصری نوشت.



تمرین

۱. اعداد زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{5}{6} =$$

$$\frac{4}{13} =$$

$$\frac{5}{121} =$$

$$\frac{7}{12} =$$

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{6}{23} =$$

$$\frac{43}{48} =$$

$$\frac{2}{35} =$$

$$\frac{5}{29} =$$

اگر حل تمرین بالا برایتان دشوار است، می‌توانید «کسره‌های مصری» را از وب‌گاه ریاضی بخوانید، تا بتوانید تمرین بالا را به راحتی حل کنید.

۲. اعداد زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{823}{1024} =$$

$$\frac{400}{729} =$$

$$\frac{371}{512} =$$

$$\frac{73}{81} =$$

$$\frac{59}{64} =$$

$$\frac{13}{27} =$$



فصل دوم

حساب و

اعداد طبیعی



کاربرد تجزیه

۱. آیا 5×2^9 بر ۸ بخش پذیر است؟
۲. آیا 3×2^9 بر ۹ بخش پذیر است؟
۳. آیا 3×2^9 بر ۶ بخش پذیر است؟
۴. اگر یک عدد طبیعی به ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۱۲ نیز بخش پذیر می‌باشد؟
۵. اگر یک عدد طبیعی به ۶ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۲۴ نیز بخش پذیر است؟
۶. عدد A بر ۳ بخش پذیر نیست، آیا ممکن است پنج برابر آن عدد ($5A$) بر ۳ بخش پذیر باشد؟
۷. عدد A زوج است، آیا $3A$ بر ۶ بخش پذیر است؟

الک اراتستن

۱. وقتی بخواهند دانه‌های گندم را از اضافه‌های آن جدا کنند از الک خاصی استفاده می‌کنند که سوراخ‌های آن با اندازه‌های دانه‌های گندم متناسب باشد. اراتستن، ۲۰۰۰ سال پیش، روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود را ارائه کرد. او روی مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را خط نمی‌کشید، بلکه آن‌ها را با یک چوب کوچک، سوراخ می‌کرد مثل اینکه عددهای غیر اول را، از سوراخ‌های الک بیرون می‌کرد و تنها عددهای اول را نگاه می‌داشت.
- اژدر که خود را یکی از نوادگان اراتستن معرفی کرده است، معتقد است در روش جدش، رازهایی موجود می‌باشد. او می‌گوید یکی از این رازها مربوط به آخرین عدد اولی است که مضاربش در الک حذف می‌شود. مثلاً در الک اعداد ۱ تا ۸ آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورند عدد ۲ می‌باشد. او برای کشف این راز دو جدول زیر را تهیه کرد. جداول اژدر را کامل کنید.



(جدول الف)

۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	عدد آخر الک
۵	۴/۹	۴/۸	۴/۷	۴/۶	۴/۵	۴/۳	۴/۲	۴/۱	۴	۳/۸	۳/۷	۳/۶	۳/۴	۳/۳	۳/۱	۳	۲/۸	جذر تقریبی عدد آخر الک
					۳				۳				۳				۲	آخرین عدد اول استفاده‌شده

(جدول ب)

۱۲۱	۱۰۰	۸۱	۶۴	۴۹	۳۶	۲۵	۱۶	۹	عدد آخر الک
						۵	۴	۳	جذر عدد آخر الک
							۳	۳	آخرین عدد اول استفاده‌شده

الف) در جدول اول، آخرین عدد اول استفاده شده در چه ستون‌هایی تغییر می‌کند؟

ب) در جدول اول، ستون بعدی که ردیف سوم روی آن تغییر می‌کند چند است؟

پ) در جدول دوم، عدد بعدی که، ستونش هاشور خواهد خورد چه عددی می‌باشد؟

ت) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان آخرین عدد اول استفاده شده در الک و عدد آخر الک بیابید؟

۲. قاعده‌ای برای یافتن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا n بیابید؟

۳. هژبر و هژبر یک بازی اختراع کرده‌اند. آن‌ها اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۰ را نوشته‌اند و طبق روش الک



اراتستن اعداد غیر اول را به نوبت حذف می‌کنند. هر کس عدد ۴۵ را حذف کند برنده است.

➔ هژیر بازی را شروع می‌کند و ۱ را حذف می‌کند.

➔ هژیر عدد ۴ را حذف می‌کند.

➔ هژیر ۶ را حذف می‌کند و این کار ادامه می‌یابد.

به نظر شما چه کسی برنده است؟

۴. هژیر و هژیر بازی خود را کمی پیشرفته‌تر کرده اند! در بازی جدید باز هم الگ اراتستن اعداد بین ۱

تا ۶۰ استفاده می‌شود اما کسی که آخرین عدد را حذف کند برنده است! به نظر شما کدام عدد

آخرین عدد حذف شده خواهد بود؟ و اگر هژیر بازی را شروع کند چه کسی برنده خواهد شد؟

۵. در بازی بین هژیر و هژیر ۴۱ امین عددی که خط می‌خورد کدام عدد است؟

۶. الگ اراتستن، روش خوب و قابل اعتمادی می‌باشد و برای نیازهای کوچک، همیشه می‌توان از همان

«الگ دستی اراتستن» استفاده کرد. این روش هم در گذر تاریخ به تدریج پیشرفت‌هایی کرده است و

روش جستجوی عددهای اول ساده‌تر شده است. مثلاً یک دانشجو در سال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام

جنگ جهانی دوم، یکی از این «الگ»‌های جدید را درست کرده است که آن را بررسی می‌کنیم:



به اعداد زیر دقت کنید. آیا رابطه‌ای میان اعداد این جدول مشاهده می‌کنید؟

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	...
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	...

اگر عددی مثل n در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2n+1$ غیر اول است، و اگر عدد n در جدول وجود نداشته باشد $2n+1$ عددی است اول.

مثلاً:

(۱) در جدول عدد $n=3$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=7$ عدد اول است.

(۲) در جدول عدد $n=5$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=11$ عدد اول است.

(۳) عدد $n=6$ هم در جدول نیست، بنابراین $2n+1=13$ عدد اول است.

(۴) در جدول عدد $n=7$ وجود دارد، بنابراین $2n+1=15$ عددی است غیر اول و غیره.

اگر اعدادی را که در این جدول نیستند را دو برابر کرده با یک جمع کنیم، می‌توانیم تمام اعداد اول را به دست آوریم. با این روش ۳۰ عدد اول به دست آورید.



کاربرد اعداد اول

۱- آیا اعداد زیر اول هستند؟ چرا؟

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۶۰۳$

ب) ۲۰۰۹

پ) $(۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۲۰) + ۱۷$

ت) $۲^{۵۰} + ۱$

ث) $۳^{۱۷} + ۱$

۲- چنگیز دانش آموز سوم راهنمایی است. او می‌داند که اعداد اول کاربردهای بسیاری دارند. او در یک وب‌گاه معتبر خوانده است که ارتش‌های کشورهای مختلف از اعداد اول برای رمزنگاری استفاده می‌کنند و هر کشوری که عدد اول بزرگتری در اختیار داشته باشد که دیگر کشورها هنوز از آن مطلع نباشند دارای قدرت فوق‌العاده‌ای در رمز کردن اطلاعات خود خواهد بود. او در این وب‌گاه همچنین خواند که اعداد اول بزرگ قیمت زیادی دارند و می‌توان آن‌ها را فروخت.

چنگیز بعد از خواندن این مطلب شروع به یافتن بزرگ‌ترین عدد اول کرد. او می‌خواهد عدد اولی از کنار هم قرار دادن اعداد اول متوالی به دست آورد مثلاً ۲۳۱۷۱۹۲۳۱۱۳۱۱۳۵۷۲۳ . اما او می‌داند برای هر کشفی باید پله‌پله و آرام‌آرام حرکت کند. چنگیز در حالی که زیر لب زمزمه می‌کرد: «رهرو آن



نیست که گه تند و گهی خسته رود، رهرو آنست که آهسته و پیوسته رود» کار جستجوی خود را

با عدد ۲۳۵۷ شروع کرد. آیا عدد ۲۳۵۷ اول است؟ ۲۳۵۷۱۱ چطور؟

۳- چنگیز این بار می‌خواهد از جمع چند عدد مربعی یک عدد اول بیابد. به همین دلیل جدولی مانند زیر

درست کرده است. جدول چنگیز را کامل کنید و درباره‌ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت

کلی $۱^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ تصمیم بگیرید؟

عدد	حاصل		اول است یا مرکب
$۱^2 + 2^2$	۵	$\frac{۲ \times (۲+۱) \times (۲ \times ۲+۱)}{۶}$	اول است.
$۱^2 + 2^2 + 3^2$	۱۴	$\frac{۳ \times (۳+۱) \times (۲ \times ۳+۱)}{۶}$	مرکب است.
$۱^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$		$\frac{۴ \times (۴+۱) \times (۲ \times ۴+۱)}{۶}$	
$۱^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$			
$۱^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2$			
$۱^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2$			
$۱^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$			



۴- روح‌انگیز نیز به دنبال یک عدد اول است. او می‌خواهد ۵ عدد متوالی بیابد که مجموع آن‌ها اول باشد. او جدولی مانند جدول زیر رسم کرده است. به او در پر کردن جدول کمک کنید. آیا او موفق به یافتن این ۵ عدد می‌شود؟

اعداد	حاصل	اول یا مرکب
$1+2+3+4+5$	۱۵	مرکب
$2+3+4+5+6$		
$3+4+5+6+7$		
$4+5+6+7+8$		
$5+6+7+8+9$		
$6+7+8+9+10$		
$7+8+9+10+11$		

فرمول‌هایی برای اعداد اول

۱- برای کشف رازهای اعداد اول در طول تاریخ سعی و تلاش‌های بسیاری شده است. بسیاری از ریاضی‌دانان به دنبال یافتن رابطه‌ای میان اعداد اول بوده‌اند و فرمول‌های بسیاری در این زمینه تولید شده‌اند یکی از این فرمول‌های جالب، مربوط به اویلر ریاضیدان معروف سوئیس می‌باشد.



فرمول اویلر: ای فرزندی، راز یافتن یک عدد اول اینک پیش روی توست. یک عدد طبیعی انتخاب کن. آن را با مربعش و عدد ۴۱ جمع کن. حاصل این مجموع حتماً عددی اول است.

جدولی مانند زیر تشکیل داده و فرمول اویلر را برای اعداد ۱ تا ۲۰ بررسی کنید.

عدد	فرمول اویلر	حاصل	اول است؟
۱	$1 + 1^2 + 41$	۴۳	✓
۲	$2 + 2^2 + 41$	۴۷	✓
۳	$3 + 3^2 + 41$	۵۳	✓
۴	$4 + 4^2 + 41$	۶۱	✓
۲۰	$20 + 20^2 + 41$	۴۶۱	

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷-۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی کار بود. این ریاضی کار فرانسوی نیز

علاقه‌ی زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل $2^p - 1$ اگر p یک عدد اول

باشد» عدد اول می‌باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا

اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده

است. او مجموعه‌ای از نت‌های کوتاه و کشیده را می‌نوازد که می‌توان آن‌ها را با صفر (نت‌های



فصل سوم

چند ضلعی ها



تمرین

۱. الف) یک شکل رسم کنید که ۷ محور تقارن داشته باشد.
- ب) آیا شکلی وجود دارد که 100° محور تقارن داشته باشد؟
- ج) آیا شکلی وجود دارد که 101° محور تقارن داشته باشد؟
۲. الف) آیا یک ۵ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا یک ۶ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ج) به جای اعداد ۵ و ۶ چه اعدادی می‌توان قرار داد تا پاسخ مثبت باشد.
۳. به چند حالت می‌توان مثلثی رسم کرد که فقط یک محور تقارن داشته باشد به طوری که یکی از زاویه‌های آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی‌متر باشد. تمام حالت‌های ممکن را رسم کنید.
۴. به چند حالت می‌توان یک چهارضلعی رسم کرد به طوری که فقط دو محور تقارن داشته باشد و اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی‌متر باشد. تمام حالت‌های ممکن را رسم کنید.
۵. الف) آیا می‌توان یک مثلث رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا می‌توان یک چهارضلعی رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
۶. نشان دهید اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است یا لوزی و یا مربع.
۷. آیا غیر از مربع، چهارضلعی وجود دارد که دقیقاً چهار محور تقارن داشته باشد؟



۸. آیا می‌توان بر روی صفحه‌ی کاغذ شکلی رسم کرد که:

(الف) دو محور تقارن موازی داشته باشد.

(ب) دو مرکز تقارن داشته باشد.

۹. می‌دانیم قرینه‌ی یک مثلث نسبت به یکی از اضلاع آن به همراه خود آن مثلث، تشکیل یک مربع می‌دهند. آن مثلث را توصیف کنید.

۱۰. آیا می‌توانید چهارضلعی بیابید که محور تقارن داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۱. یک چهارضلعی داریم که محور تقارن آن، یکی از قطرهای چهارضلعی است. زاویه‌ی بین قطرهای این چهارضلعی چند درجه است؟

۱۲. آیا می‌توانید بر روی صفحه‌ی کاغذ، شکلی غیر از دایره رسم کنید که بی‌شمار محور تقارن داشته باشد.

۱۳. آیا اگر شکلی دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد، آن دو محور برهم عمودند؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید.

۱۴. آیا شکلی وجود دارد که زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی آن ۱۱ درجه باشد؟

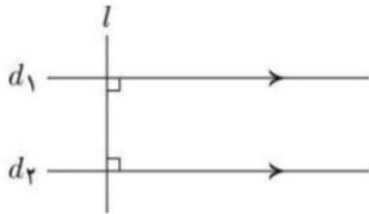
۱۵. آیا می‌توانید شکلی بیابید که فقط دو محور تقارن داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۶. شکلی را معرفی کنید که دقیقاً دارای ۱۱۵ محور تقارن باشد. کمترین زاویه‌ی بین دو محور تقارن از این شکل چقدر است؟



قضیه ی دو خط عمود بر یک خط:

دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی اند.



۱. قضیه ی قبل را ثابت کنید.

باید ثابت کنید که اگر دو زاویه ی قائمه مطابق شکل داشته باشیم، d_1 و d_2 با هم موازی خواهند شد.

آنچه گذشت ...

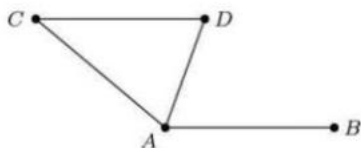


۲. روش رسم خطی گذرنده از نقطه ی P که با خط d موازی باشد را شرح دهید.

P .

_____ d

۳. فرض کنید AD نیمساز \widehat{CAB} است و $CA = CD$. ثابت کنید AB و CD با هم موازی اند.





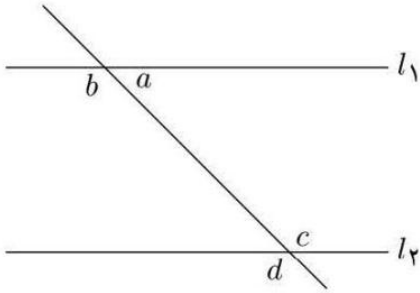
۴. در کدامیک از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $l_1 \parallel l_2$.

الف) $\hat{c} = 100^\circ$ و $\hat{a} = 80^\circ$

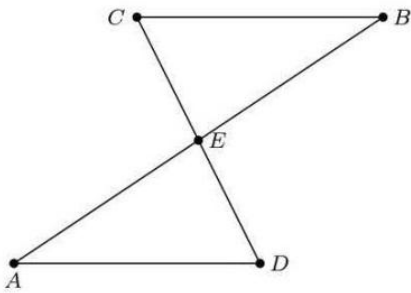
ب) $\hat{d} = 100^\circ$ و $\hat{b} = 120^\circ$

ج) $\hat{d} = 100^\circ$ و $\hat{a} = 70^\circ$

د) $\hat{c} = 90^\circ$ و $\hat{a} = 90^\circ$

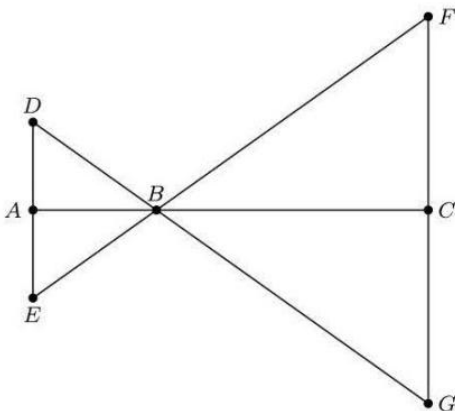


۵. AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند؛ ثابت کنید $AD \parallel CB$.



۶. در شکل زیر نقاط A, B و C روی یک خط قرار دارند. همچنین داریم: $BD = BE$, $AD = AE$

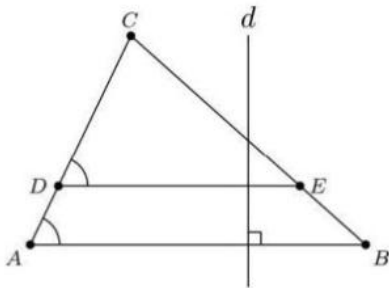
و $BF = BG$. ثابت کنید $DE \parallel FG$.





تمرین

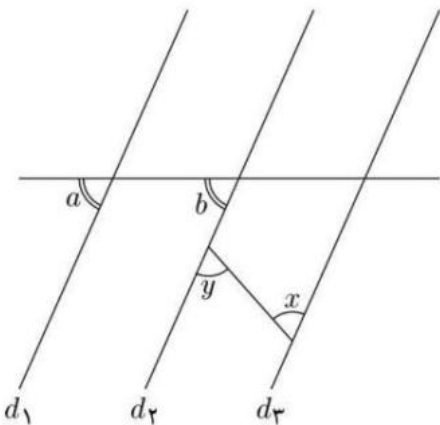
۱. در شکل زیر $\widehat{CDE} = \widehat{A}$ و $d \perp AB$ ؛ ثابت کنید $d \perp DE$.



۲. در چهارضلعی $ABCD$ زاویه‌های \widehat{A} ، \widehat{B} و \widehat{C} قائمه هستند؛ ثابت کنید AD بر CD عمود است.



۳. در شکل زیر $\widehat{x} = \widehat{y}$ و همچنین $\widehat{a} = \widehat{b}$ ؛ ثابت کنید $d_1 \parallel d_3$.

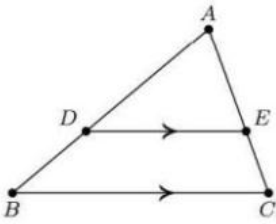




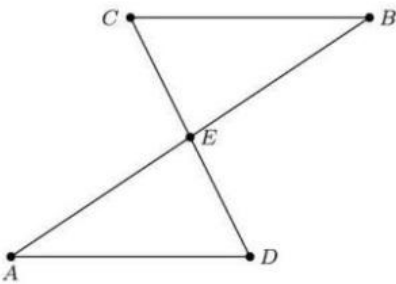
تمرین

۱. ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی رسم شود و دوساق آن را در دو نقطه‌ی دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی‌الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

۲. در شکل زیر $AB = BC$ و $BC \parallel DE$ ؛ ثابت کنید $AD = DE$.

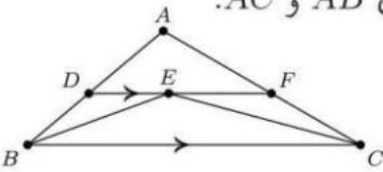


۳. در شکل زیر اگر $AD = CB$ و همچنین $AD \parallel CB$ ، ثابت کنید AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند.

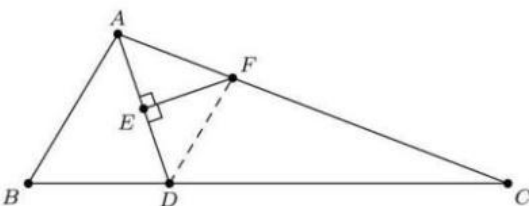


۴. با همان شرایط سؤال قبل، ثابت کنید $AC \parallel DB$.

۵. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، BE نیمساز \hat{B} ، CE نیمساز \hat{C} و DF با BC موازی است. ثابت کنید محیط مثلث $\triangle ADF$ برابر است با مجموع اندازه‌ی طول ضلع‌های AB و AC .



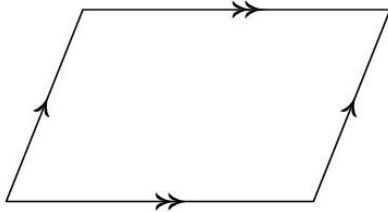
۶. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، AD نیمساز \hat{A} و همچنین EF عمود منصف AD است؛ ثابت کنید $DF \parallel AB$.





متوازی‌الاضلاع

تعریف. اگر اضلاع یک چهارضلعی دو به دو موازی باشند، به آن چهارضلعی «متوازی‌الاضلاع» گویند.



گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها (به غیر از گزاره‌ی ۳)، خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع هستند.

۱. هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند.

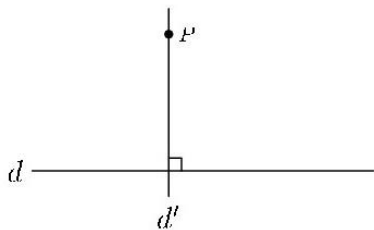
۲. در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل باهم مساوی‌اند.

تعریف. نقطه‌ی P و خط d را داریم.

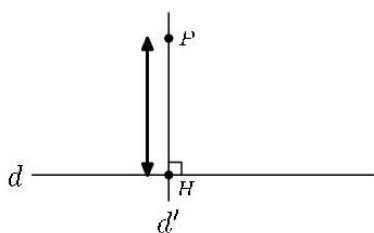
• P

d —————

همچنین می‌دانیم که خط d' از نقطه‌ی P می‌گذرد و بر خط d عمود است.



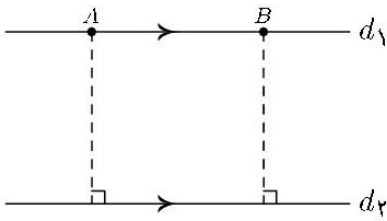
اگر محل تقاطع خط d و d' را H بنامیم، به اندازه‌ی پاره‌خط PH فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d می‌گوییم.



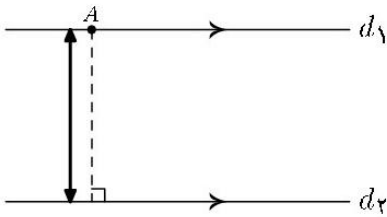


به عبارتی دیگر فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d ، اندازه‌ی پاره‌خط عمودی است که از نقطه‌ی P برخط d رسم می‌شود.

۳. در هر دو خط موازی مانند $d_1 \parallel d_2$ ، تمام نقاط یک خط از خط دیگر به یک فاصله‌اند.



تعریفی با استفاده از گزاره‌ی ۳: فاصله‌ی بین دو خط موازی، فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه یک خط، از خط دیگر است.



۴. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مقابل مساوی‌اند.

۵. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

۶. قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها کمک می‌کنند که تشخیص دهیم یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است یا خیر.

۱. اگر در یک چهارضلعی هر دو ضلع مقابل مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

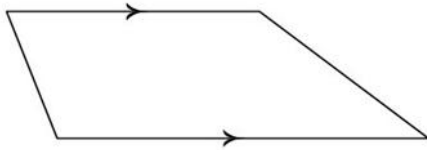
۲. اگر دو ضلع یک چهارضلعی موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳. اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

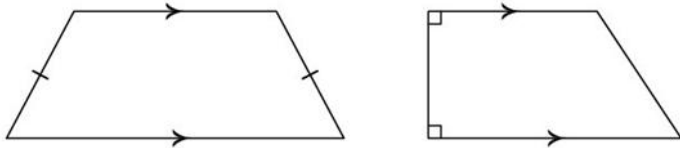


ذوزنقه

تعریف. اگر فقط دو ضلع یک چهارضلعی باهم موازی باشند، به آن چهارضلعی «ذوزنقه» گویند. دو ضلع موازی ذوزنقه را قاعده‌های ذوزنقه، و دو ضلع دیگر را ساق‌های ذوزنقه گویند.



ذوزنقه‌ای که دارای زاویه‌ی قائمه باشد، ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه و ذوزنقه‌ای که ساق‌های مساوی داشته باشد، ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین گویند.

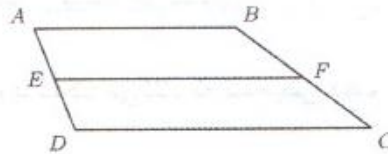


ذوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «ذوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این ذوزنقه در کاشی‌کاری استفاده کرده‌اند.

میان‌خط ذوزنقه: میان‌خط پاره‌خطی است که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند. میان‌خط با قاعده‌های

$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

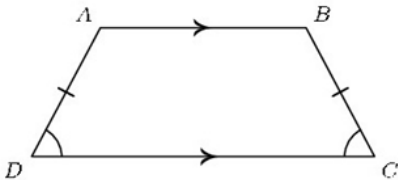
ذوزنقه موازی و اندازه‌ی آن برابر است با:





گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. زاویه‌های یک قاعده‌ی دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، باهم برابرند؛ یعنی $\widehat{C} = \widehat{D}$.



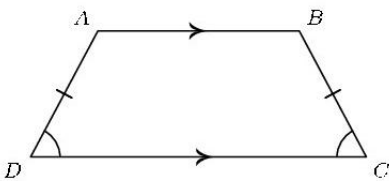
۲. قُصُرهای دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

۳. در هر دوزنقه، زوایای مجاور بر یک ساق مکمل هستند.

دوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «دوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این دوزنقه در کاشی‌کاری استفاده کرده‌اند.

گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. زاویه‌های یک قاعده‌ی دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، باهم برابرند؛ یعنی $\widehat{C} = \widehat{D}$.



۲. قُصُرهای دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

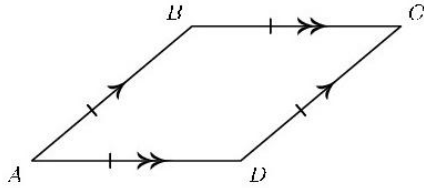
۳. در هر دوزنقه، زوایای مجاور بر یک ساق مکمل هستند.

دوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «دوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این دوزنقه در کاشی‌کاری استفاده کرده‌اند.



لوزی

تعریف. لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که اضلاعش مساوی‌اند.



گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. قطرهای لوزی برهم عمودند.
۲. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند و برهم عمود باشند، آن چهارضلعی لوزی است.
۳. اگر در متوازی‌الاضلاع دو ضلع مجاور برابر باشند، آن چهارضلعی لوزی خواهد بود.



فصل چهارم

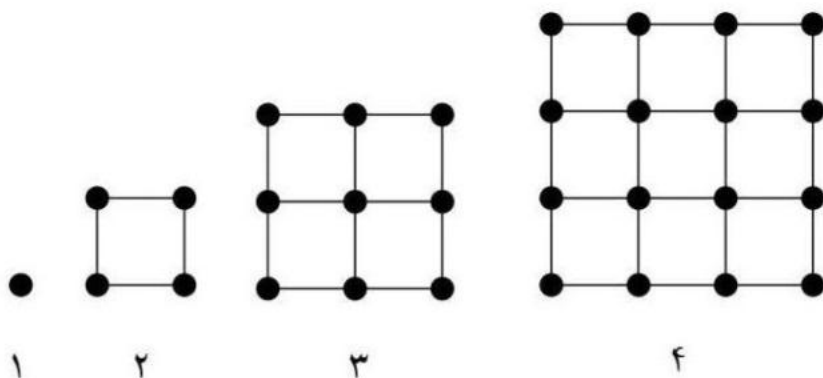
جبر و معادله



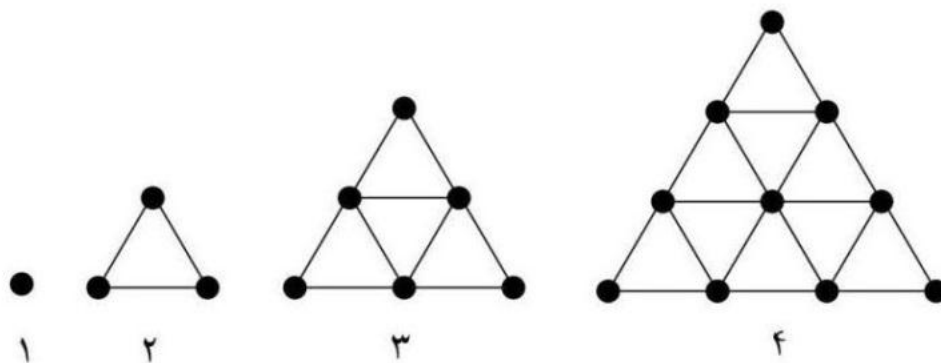
عبارت‌های جبری - یافتن جمله‌ی n ام

۱. در ریاضیات بعضی دنباله‌ها بسیار معروف می‌باشند. در زیر چند دنباله‌ی شکلی آمده است. در این شکل‌ها تعداد دایره‌های سیاه موجود در شکل با شماره‌ی آن رابطه‌ای دارند. در مورد هر دنباله ابتدا شکل بعدی را رسم کرده و سپس تعداد دایره‌های سیاه n امین شکل را با یک رابطه‌ی جبری بیان کنید.

الف) اعداد مربعی

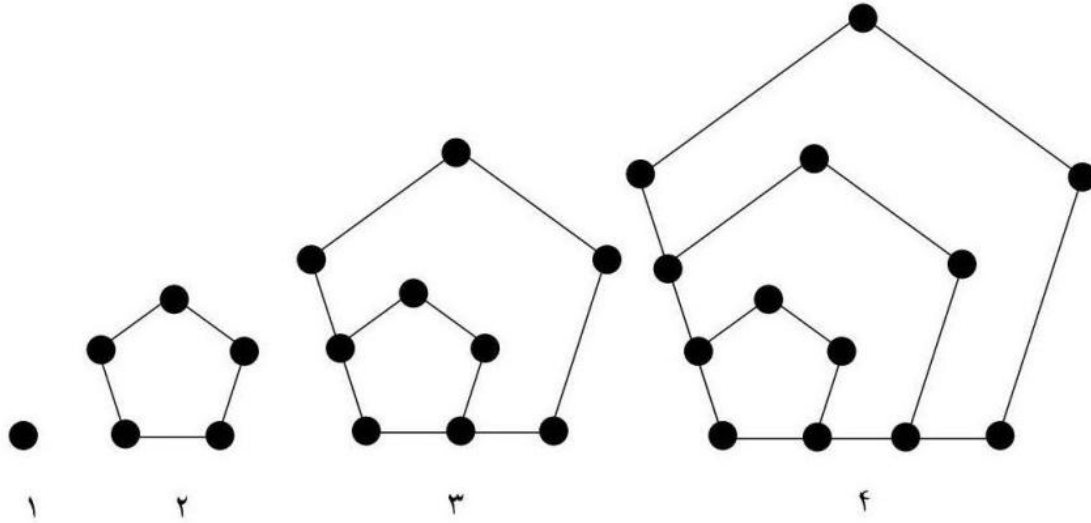


ب) اعداد مثلثی

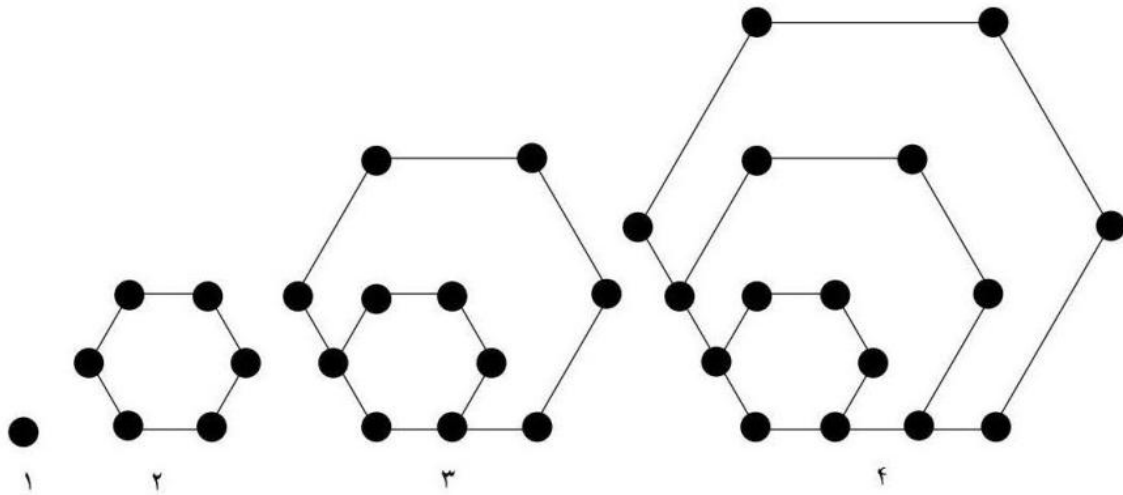




پ) اعداد مُخَمَّسی



ت) اعداد مُسَدَّسی





۲. «لیندا» با جمع و تفریق بعضی دنباله‌های بالا، دنباله‌های جدیدی به دست آورده است. مثلاً با جمع کردن دو دنباله‌ی اول (اعداد مربعی و مثلثی) دنباله‌ی

$$۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$$

را ساخته است. جمله n ام هر یک دنباله‌های لیندا را بیابید.

الف) $۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$

ب) $۲, ۸, ۱۵, ۲۳, ۳۲, \dots$

پ) $۲, ۱۰, ۲۰, ۳۲, ۴۶, \dots$

ت) $۲, ۹, ۱۸, ۲۹, ۴۲, \dots$

ث) $۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \dots$

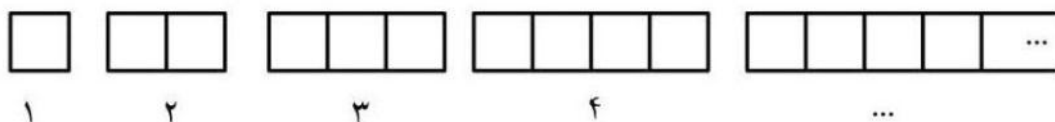
ج) $۳, ۱۴, ۲۶, ۳۹, ۵۳, \dots$

۳. نشان دهید جمع هر دو عدد مثلثی متوالی، یک عدد مربعی است.

۴. آقای «ترنم» معلم ریاضی سال سوم راهنمایی است. او روی تخته‌ی کلاس با چوب-

کبریت دنباله‌ی شکلی زیر را رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تعداد چوب کبریت-

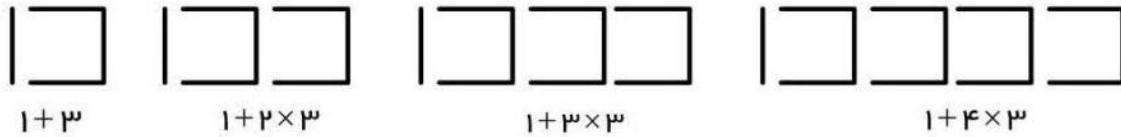
های n امین شکل را بیابند.



هر یک از دانش‌آموزان یک روش را برای شمارش تعداد چوب کبریت‌های هر شکل پیشنهاد کردند.



الف) «تفکر» گفت می توانیم تعداد چوب کبریت های هر شکل را بدین صورت بشماریم:



با روش تفکر، جمله ی n ام این دنباله را بیابید.

ب) «تحول» دوست تفکر نوشت:

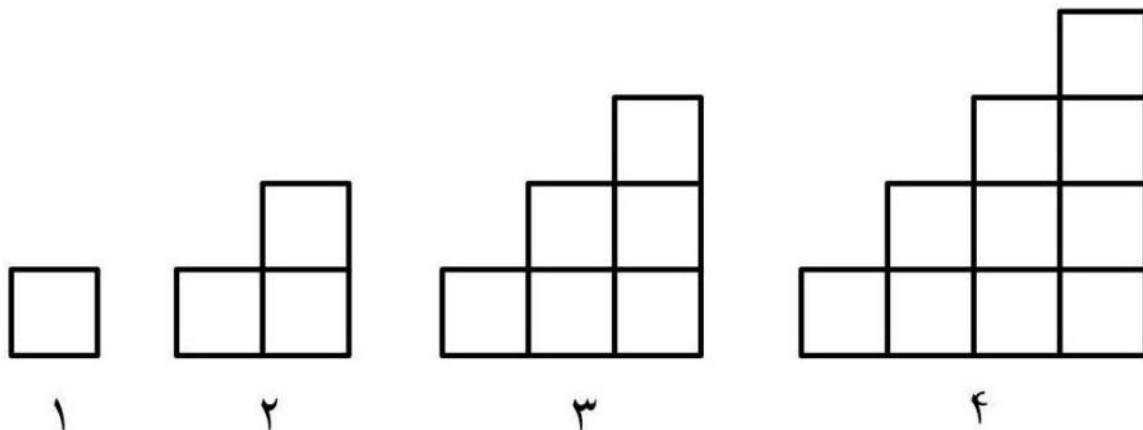
$$1 \times 4 - 0, 2 \times 4 - 1, 3 \times 4 - 2, 4 \times 4 - 3, 5 \times 4 - 4, \dots$$

تحول چگونه چوب کبریت ها را شمرده است.

پ) جمله ی n ام این دنباله به روش تحول به دست آورید.

ت) «تصور» شاگرد اول کلاس، جمله ی $pn + (n + 1)$ را پیشنهاد کرده است. او چگونه چوب کبریت ها را شمرده است.

۵. در دنباله ی شکلی زیر که با چوب کبریت می توان آن را نشان داد:



الف) تعداد مربع های 1×1 شکل n ام چندتا است؟

ب) تعداد چوب کبریت های شکل n ام را بیابید.



تمرین

۱. کدام یک از جملات زیر با هم متشابه‌اند؟

$$6x, 6xy, 8x, 3, 4xy^2, -2xy, -100, 15xy^2$$

$$3x^2y, 19x, -xy, x, 9y, 2y, 16xy, 0$$

۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $18x + 10y - 8x + y - 3x$

ب) $94x + 13xy - 44x - 9xy + 8y$

ج) $\frac{3}{y}x - \frac{3}{y}y - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y$

د) $8(a - 2y) + 4(4y - 2a)$

ه) $3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$

و) $9(x - x^2 + 1) + 6x(2x - 4) + 16$

ز) $8x + \frac{6x^2}{x} - 2x^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2x^2}{x^3} \right) \quad x \neq 0$

ح) $\frac{8a^6b^9x^4}{2a^3b^8x^4} + \frac{12a^2b^5y^2}{3b^4y^2} \quad a, b, x, y \neq 0$

۳. جاهای خالی را به‌طور مناسب پر کنید.

الف) $12m + \underline{\hspace{2cm}} - 3k + \underline{\hspace{2cm}} = 3m + 3k$

ب) $6(2x + \underline{\hspace{2cm}}) - 2(\underline{\hspace{2cm}} + 3y) = 6x + 6y$



۴. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۵. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

ساده کردن عبارتهای جبری

۱. در هر یک از عبارات، زیر جملات متشابه خط بکشید و سپس آنها را ساده کنید.

$$(\pi = 3/1415\dots)$$

الف) $\pi a + 3a + \pi^2 a =$

ب) $3a + \pi^2 a - 2a + 4\sqrt{2} \times a =$

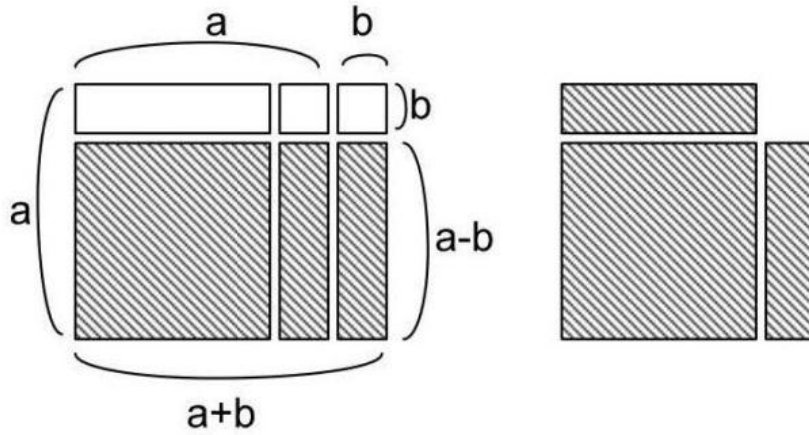
پ) $\sqrt{3}a^2b + \sqrt{2}ab^2 - \pi^2 ab^2 - \sqrt{6}a^2b =$

ت) $\sqrt{2}s^2b + \sqrt{8}b^2s - 2\sqrt{2}sb^2 - \sqrt{32}s^2b =$

ث) $\sqrt{2}\sqrt{p}^2m + \pi^3 pm^2 - \pi^2 pm^2 - \sqrt{3}p^2m =$



۲. با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $(a+b)(a-b) =$

ب) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) =$

پ) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{1388}(\sqrt{5} - \sqrt{2})^{1388} =$

ت) $1999 \times 2001 =$

ث) $6002 \times 5998 =$

۳. عبارت $\frac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{11}}$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت را در $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{11}}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ ضرب کنید. آیا عبارت ساده‌تر نشده است؟

ب) عبارت $\frac{1}{\sqrt{2009} - \sqrt{1388}}$ را ساده کنید.



معادله

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{4(3x-6)+12}{5x^2-3x-1} = 0$

ب) $3x - 2(x^2 - 3x + 1) = (-2x + 1)(x - 5)$

پ) $\frac{-(2x-3)(x^2-13)}{9-5x^2} = 0$

ت) $\frac{\frac{4x-8}{10} - \frac{20-x}{4} + \frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - x + 17} = \frac{0}{17}$

ث) $x^p(x^p+8) = 0$

ج) $(2x-3y+5)^{30} + (3x-6)^{32} + (z-2y)^8 = 0$

چ) $\frac{(x^2-8)^{20} (x^2-16)^{20} (x^3+125)^{20} ((2x-6)^2+9) ((2x+3)^2-(x+3)^2) (x^{88}-1)^{80}}{(x^3+27)^4 (x^{80}+1)^{14} (x^2-625)(x^5-32)^8 \left(\frac{x}{3}-14\right)^8} = 0$

ح) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$

خ) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$

د) $5^{x+1} + 5^{x-1} = 130$

ذ) $3^{x-2} = 5^{6-3x}$

ر) $\sqrt{2^x \times 3^{y+1}} = 72$

ز) $3^x \times 42 + 3^{x-1} \times 27 = 459$



کاربرد معادله

۱. تاجری مبلغی پول داشت، در سال اول صد میلیون خرج کرد و یک‌سوم آنچه که برایش باقیمانده بود به پولش اضافه شد. در سال بعد دوباره صد میلیون خرج کرد و یک‌سوم باقیمانده‌ی پولش به آنچه داشت اضافه شد. در سال سوم باز هم صد میلیون خرج کرد و بعد وقتی یک‌سوم دارایی حال حاضرش را به پولی که داشت اضافه کرد دید که دوبرابر سرمایه‌ی اولیه‌اش پول دارد. سرمایه‌ی اولیه‌ی این تاجر چقدر است؟
۲. درباره‌ی شرح حال «دیوفانت» ریاضی‌دان مشهور باستان، اطلاعات خیلی کمی داریم. همه آنچه درباره‌ی او می‌دانیم از نوشته‌ای بر روی کتیبه‌ی مقبره‌اش به دست آمده است: رهگذر! در اینجا دیوفانت خوابیده است. زندگی پرماجرای او به این ترتیب است. یک‌ششم عمرش دوران خوش زندگی کودکی او بود. یک‌دوازدهم دیگر عمرش هم در وضعی گذشت که در حال تحصیل علوم ابتدایی بود. یک‌هفتم عمر دیوفانت در زندگی زناشویی ولی بدون بچه گذشت. بعد از ۵ سال با تولد اولین پسر زیبایش، خوشبختی به او رو کرد. ولی تقدیر چنین بود که فقط نیمی از عمرش پدرش را خوشبخت و روشن کند. بالاخره در چهارسال آخر عمرش با اندوه عمیقی زندگی کرد، زیرا که پسرش را از دست داده بود.



حالا بگویید وقتی که مرگ زندگی دیوفانت را درهم نوردید، چند سال داشت؟

۳. چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر به ترتیب یک سوم، یک هشتم، یک چهارم و یک پنجم تعداد کل آن‌ها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب داشته باشد و یک سیب هم برای نفر ششم باقی بماند؟



۴. چهار شریک به نام‌های رها، راحله، الهه، الهام روی هم ۴۵ میلیون پول داشتند. اگر به پول رها ۲ میلیون اضافه کنیم، از پول راحله ۲ میلیون کم کنیم، پول الهه را دو برابر و پول الهام را نصف کنیم، پول هر چهار نفر مساوی می‌شود. هر کدام چقدر پول به اشتراک گذاشته‌اند.

۵. سه شکارچی، چند روز متوالی را در جنگل برای شکار گذراندند. صبح روز آخر، حادثه‌ی ناگواری پیش آمد. وقتی که آن‌ها پیاده از جوی آب می‌گذشتند، دو شکارچی در آب افتادند و فشنگ‌دان‌هایشان خیس شد و مقداری از فشنگ‌هایشان بی‌مصرف شد. سه دوست، فشنگ‌هایی را که برایشان باقی مانده بود، به طور مساوی بین خودشان تقسیم کردند. بعد از آن، هر یک از شکارچی‌ها ۴ تیر در کردند و برای همه‌ی آن‌ها روی هم همان‌قدر فشنگ باقی ماند که هر یک، بعد از تقسیم فشنگ‌ها داشتند. در موقع تقسیم، روی هم چقدر فشنگ داشتند.

۶. به مکالمه‌ی زیر بین «دکتر کاظم» و «حسین» توجه کنید و فاصله‌ی بین خانه آن‌ها را محاسبه کنید.

دکتر کاظم به یکی از آشنایانش به نام حسین گفت: فردا پیش من بیا!
- از شما متشکرم. من ساعت ۳ از منزل خارج می‌شود، ولی اگر شما تصمیم به گردش داشته باشید، می‌توانید در همین ساعت از منزل حرکت کنید تا در نیمه‌ی راه به هم برسیم و ادامه مسیر را با هم باشیم.



- ولی فراموش نکنید که سن من زیاد است و ساعتی بیش از ۳ کیلومتر نمی‌توانم راه بروم. ولی شما جوانید و اگر با قدم‌های آهسته هم راه بروید در هر ساعت ۴ کیلومتر می‌شود. عیبی ندارد اگر به هم کمی تخفیف بدهید ممنون می‌شوم.
- حق با شماست! چون من ساعتی یک کیلومتر بیشتر از شما راه می‌روم، این یک کیلومتر را به شما می‌دهم یعنی یک ربع زودتر از شما حرکت می‌کنم، به نظر شما کافی است؟

دکتر موافقت کرد و گفت: از محبت شما متشکرم. حسین همین کار را کرد. او یک ربع به ۳ از منزل خارج شد و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت به راه افتاد و دکتر هم درست ساعت ۳ از منزلش خارج شد و با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت به راه افتاد. وقتی به هم رسیدند، پیرمرد (دکتر کاظم) برگشت و با مرد جوان به طرف منزل خود قدم زدند. مرد جوان (حسین) وقتی به منزل خود بازگشت، پیش خود حساب کرد و دید که به خاطر تخفیف یک ربع ساعت، در مجموع درست چهار برابر دکتر راه رفته است.

۷. در کتیبه‌هایی که از قومی مربوط به قرون ابتدایی به دست آمده است نوشته شده بود:

$$۷۱ = ۸ \times ۸, \text{ به نظر شما این قوم بدوی، مقدار } ۸ \times ۵ \text{ را چه عددی می‌دانسته‌اند؟}$$

در یک مسابقه‌ی تلویزیونی، مجری به شرکت کننده‌ای که به مرحله‌ی کشف رمز

گاوصندوق حاوی صد میلیون تومان رسیده بود راهنمایی به صورت زیر کرد:

رمز سه رقمی این گاوصندوق دارای خصوصیات زیر است:



رقم دهگان آن مساوی ۷، رقم صدگان آن ۴ واحد کمتر از یکان آن است و اگر ارقام عدد را به ترتیب عکس بنویسیم، عدد حاصل ۳۹۶ واحد از عدد مجهول بزرگ‌تر می‌شود.

آیا مجری با شرکت کننده فامیل بوده است؟!؟

۸. مرد بیکاری به نام «حسن کچل» این طرف آن طرف می‌رفت و بدون این که به فکر کار و تلاش باشد، دائماً از بی‌پولی خود گله می‌کرد. به هر کس می‌رسید، درد دلش باز می‌شد و از این که نمی‌تواند پول‌دار شود و زندگی راحتی داشته باشد، آه و ناله می‌کرد. کلاهبرداری تصمیم گرفت از طمع حسن استفاده کند. پیش او آمد و از موجودیش پرسید. وقتی که از موجودی حسن بیکاره آگاه شد، به او گفت:

- من راه‌حل ساده و خوبی برای پول‌دار شدن تو دارم.

- چطور؟

- در خارج این شهر پلی بر روی رودخانه است، تو هر بار که از پل عبور کنی، من پولت را دوبرابر خواهم کرد.

- تو چرا پولت را مجانی به من می‌دهی؟

- من بابت این کار از تو دستمزدی خواهم گرفت.

- چقدر؟

- هر بار که پول تو را دوبرابر کردم، ۲۴ هزار تومان بابت دستمزد به من پرداخت می‌کنی.

- همین!

- بله. همین!



بعد از قول و قرار، به بیرون شهر رفتند، حسن کچل بیکارِ طمع کار از پل گذشت و مرد حيله گر خبيث حقه‌باز پول او را دوبرابر کرد و بعد ۲۴ هزار تومان دستمزد از او گرفت. حسن دوباره از پل گذشت و باز هم پولش دوبرابر شد و مبلغ دستمزد را پرداخت. برای سومین بار عمل تکرار شد، ولی وقتی که این بار حسن بعد دوبرابر شدن پولش دستمزد کلاه‌بردار را پرداخت، دیگر چیزی برایش نمانده بود که برای دوبرابر کردن آن از پل عبور کند. طمع حسن کچل، تمام پولش را بر باد داده بود. موجودی حسن در ابتدا چقدر بوده است؟





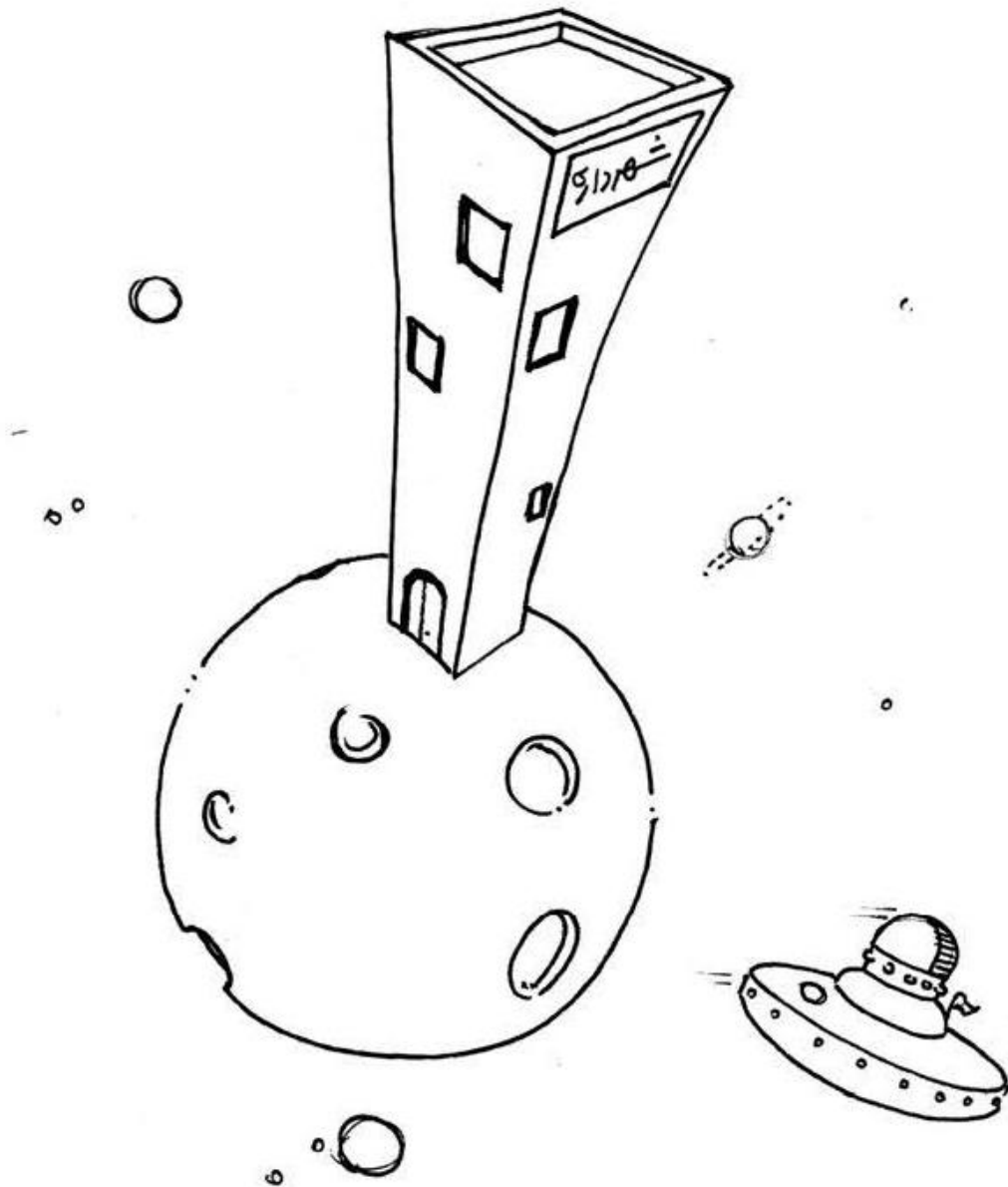
فصل پنجم

بردار مختصات



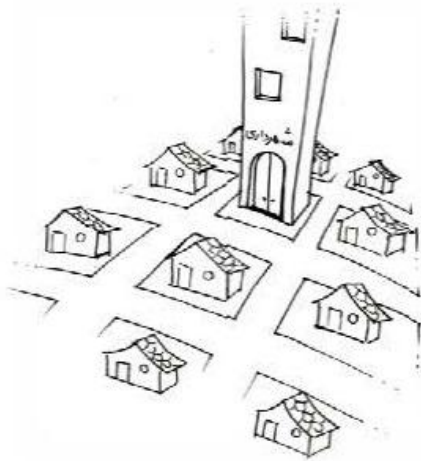
مختصات

به شهر «زارف» واقع در سیاره‌ی «زیتو ۹» خوش آمدید.





ساکنین این شهر «زاپو»ها هستند. شهرداری شهر زارف، در مرکز شهر واقع شده است. واحد اندازه‌گیری زاپوها به احترام مؤسس شهر، آقای «زافتا»، «زافت» نام دارد. آدرس هر نقطه از شهر زارف با توجه به مکان ساختمان شهرداری بیان می‌شود. برای مثال، خانه‌ای به آدرس $۳ \square ۲$ به این معناست که برای رسیدن به این خانه می‌بایست از ساختمان شهرداری ۳ زافت به سمت شمال رفته و سپس ۲ زافت به سمت شرق حرکت کنیم.



۱. آدرس سمپاد شهر زارف $۳ \square ۷$ - می‌باشد.

برای رفتن به سمپاد چه باید کرد؟

۲. سازمان آموزش و پرورش شهر زارف در ۲

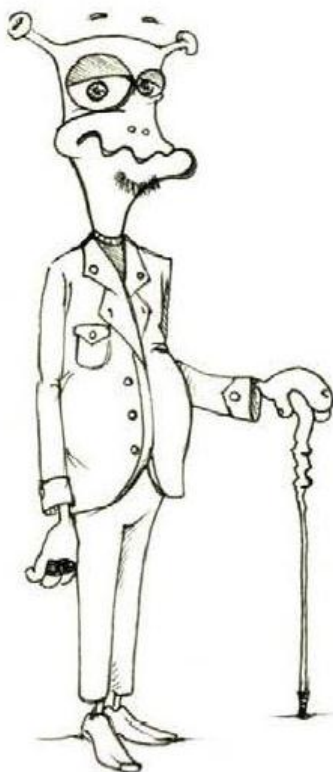
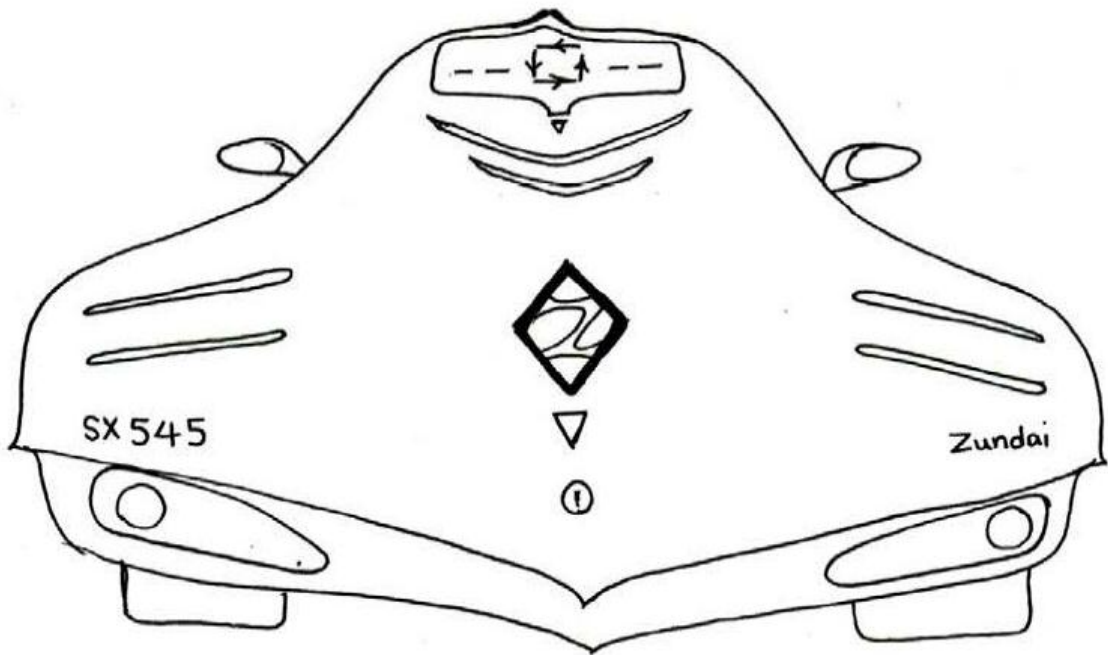
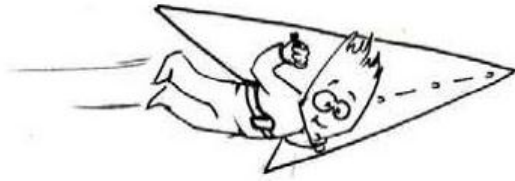
زافتی شمال سمپاد می‌باشد. آدرس سازمان

آموزش و پرورش چیست؟

۳. آدرس شهرداری چیست؟

مفهوم بردار

خیابان‌ها، اتوبان‌ها و تمام مسیرهای ماشینی زارف یا شمالی- جنوبی و یا شرقی- غربی هستند. بعضی از زاپوهای مُرَّقه، اتوموبیل‌های بسیار پیشرفته و هوشمندی به نام «زیوندای» دارند. زیوندای‌ها تنها با وارد کردن دو عدد به راننده را به مقصد می‌رسانند. عدد اول مقدار زافت حرکت به سمت شمال و عدد دوم مقدار زافت حرکت به سمت شرق را مشخص می‌کند.



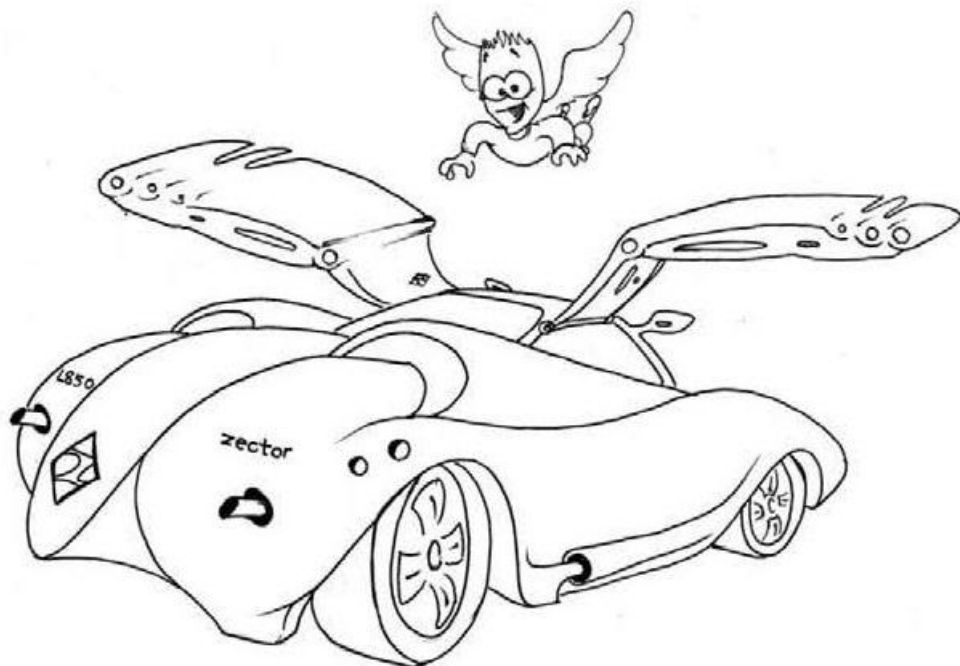
۱. «زانا» یکی از اهالی پولدار زارف است. او برای آنکه از قصر باشکوه خود به آدرس ۵۳-۴۷۴۳، به شرکت خود به آدرس ۲۱-۳۲۴۳ برود، می‌بایست چه اعدادی را در زیوندای خود وارد کند؟
۲. زانا برای برگشت از شرکت به منزل خود چه اعدادی را می‌بایست وارد کند؟



۳. زانا یک روز، برای رفتن به خانه اعداد $50 - 54$ را در زیوندای خود وارد کرد. زانا کجا بوده است؟ آیا زانا تیزهوش است؟

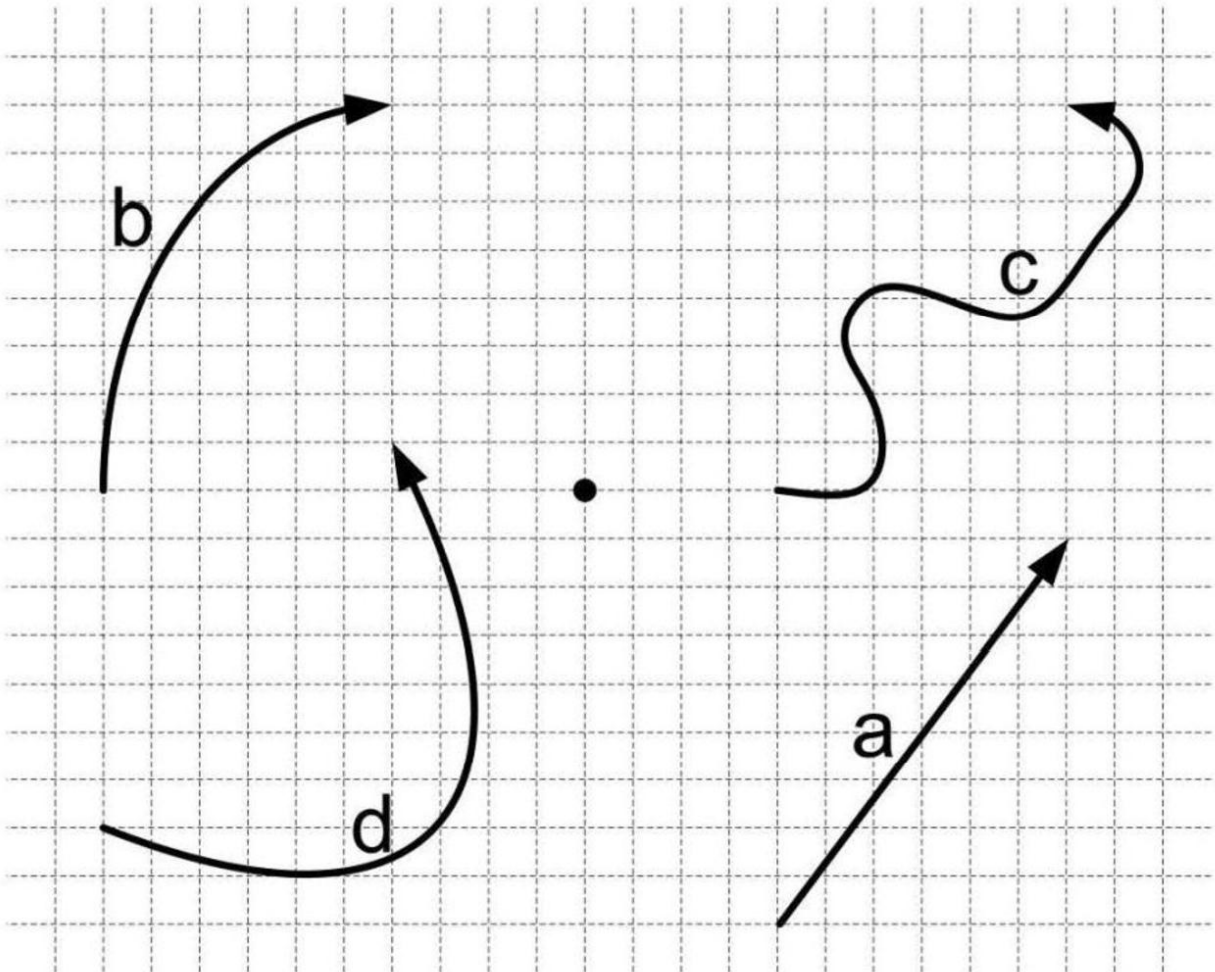
۴. یک روز جمعه که زانا می خواست تعطیلات خود را به کنار دریاچه شهر به آدرس 10333 برود، اتوموبیل نازینش دچار مشکل شده و ارقام زوج را قبول نمی کرد. آیا او می تواند بدون تعمیر ماشین از خانه به کنار دریاچه برود و از تعطیلات خود لذت ببرد.

به تدریج و با افزایش سرمایه دارها، تعداد زیوندای های شهر زارف زیاد شده است و ترافیک سنگین در ساعات مختلف روز در شهر زاپوها را کلافه کرده است. به همین منظور، شرکت سازنده ی این خودروها نسل جدید آن ها را روانه ی بازار کرده است. سری جدید زیوندای ها به نام «زکتور» توانایی پرواز دارند و با وارد کردن دو عدد (مانند زیوندای ها) به پرواز در آمده و به صورت کاملاً هوشمند به مقصد می روند.

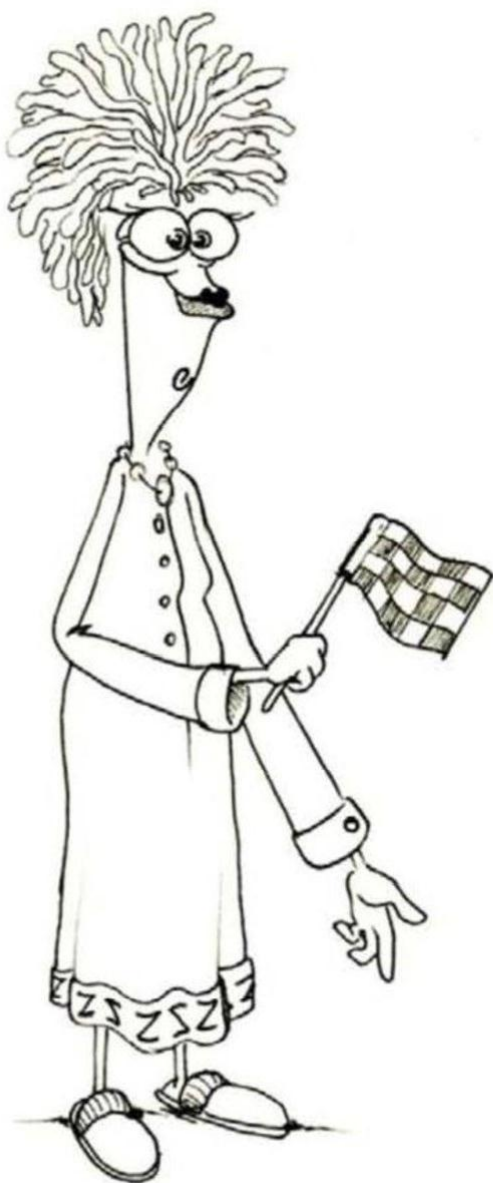




۵. سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف هم برای کنترل بهتر حرکت تمامی خودروها، مسیر حرکت آن‌ها را توسط یک سامانه‌ی بسیار هوشمند ثبت می‌کند. در شکل زیر بردار حرکت چهار زکتور در شهر زارف رسم شده است. اعداد وارد شده در کدام یک از این زکتورها با بقیه فرق می‌کند.



۶. زلاتان امروز صبح با زکتور خود به اداره رفت و بازگشت، سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف بردار حرکت هر این شهروند را چگونه ثبت خواهد کرد.



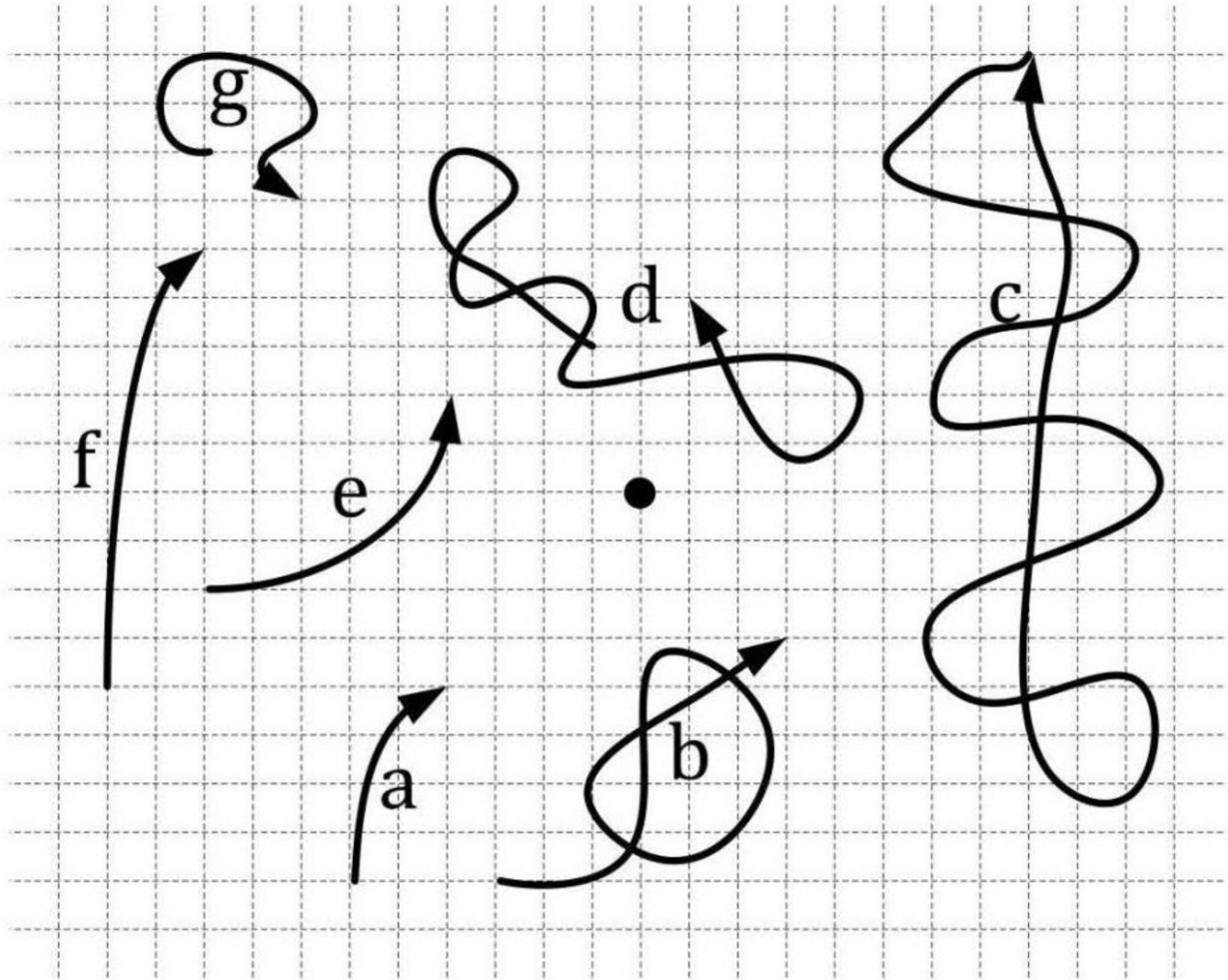
۷. شهردار شهر زارف، خانم «زن» تصمیم دارد به مناسبت روز جهانی ورزش، مسابقه‌ی اتوموبیل‌رانی دور شهر زارف را برگزار کند. این مسابقه رأس ساعت ۸ صبح آغاز شده و بعد از سه دور، حول شهر، به پایان می‌رسد. «زویی» می‌خواهد با زکتور خود در مسابقه‌ی اتوموبیل‌رانی دور زارف شرکت کند.

الف) او باید چه اعدادی را در زکتور خود وارد کند؟

ب) سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف، بردار حرکت اتوموبیل‌های شرکت‌کننده را چگونه ثبت خواهد کرد.



۸. مختصات هر یک از بردارهای زیر را بنویسید.



۹. «باب زایس» نقاش معروف، یک روش جدید برای آموزش نقاشی اختراع کرده است.

او به وسیله‌ی بردارها، رسم اشکال مختلف را آموزش می‌دهد. مثلاً در زیر یک روش الگوی نقاشی آمده است. کفایت از نقطه‌ای دلخواه شروع کنید و پشت سر هم طبق بردارهای آمده، شکلی را رسم کنید. آیا پیش از شروع کار می‌توانید حدس بزنید باب

زایس چه شکلی را برای شما آماده کرده است؟

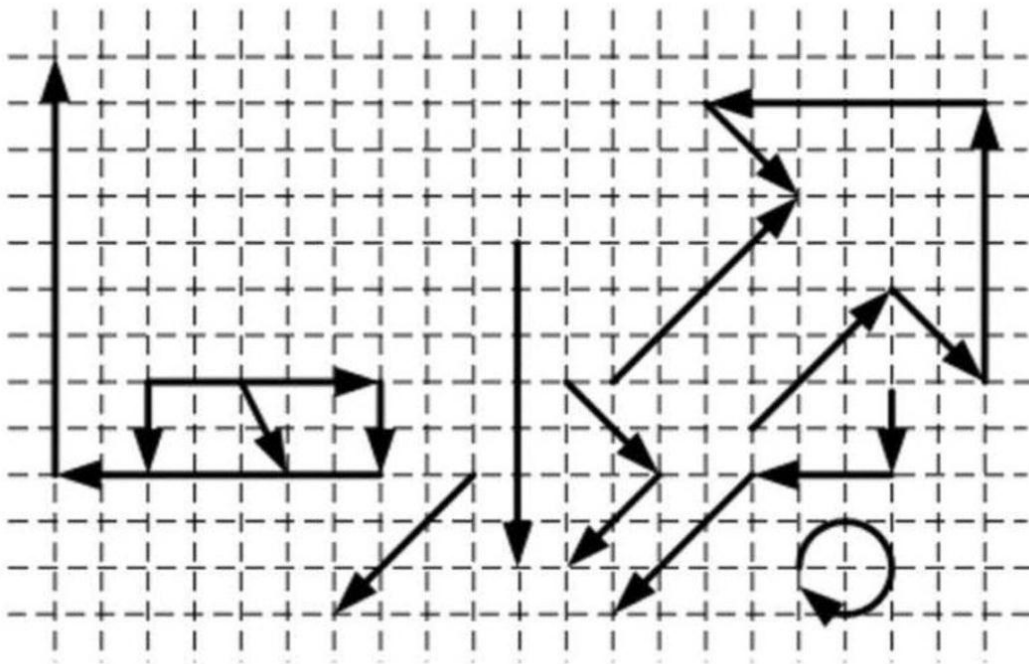


$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

۱۰. به روش باب زایس طرح زیر را به صورت برداری بیان کنید. می‌توانید برای بعضی بردارها

نقطه‌ی شروع را بیان کنید. مثلاً بردار $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ابتدا در $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.





کاربرد بردارها

۱. در تمام علوم، دو نوع کمیت وجود دارد. کمیت‌های عددی مثل قد و کمیت‌های برداری مثل نیرو. چه تفاوت‌هایی بین این دو نوع کمیت می‌بینید؟
۲. سرعت یک خودرو چه نوع کمیتی است؟ جرم یک خودرو چگونه؟
۳. دو خودروی سواری با سرعت‌های ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت در جاده کاشان - اصفهان در حال حرکت هستند. اگر این دو خودرو در یک لحظه در کنار هم باشند، بعد از گذشت ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟



۴. شهر زارف که به خاطر می آورید! یک تاجر به نام «زاجر» می خواهد یک فروشگاه زنجیره ای بزرگ به مساحت ۳۰۰ زافت مربع در این شهر بسازد. او می خواهد فروشگاهش را در نقطه ای از شهر بسازد که فاصله اش تا مجتمع های مسکونی شهر به آدرس ۱۶-۹۳ و استادیوم ورزشی زارف به آدرس ۱۰-۵۳ مساوی باشد و بدین ترتیب هم مردمی که در مجتمع های مسکونی زندگی می کنند و هم تماشاچیان مسابقات

ورزش به راحتی بتوانند به این فروشگاه رفت و آمد کنند. به زاجر کمک کنید و آدرسی را که باید در آن فروشگاه زنجیره ای خود را بنا کند بیابید.

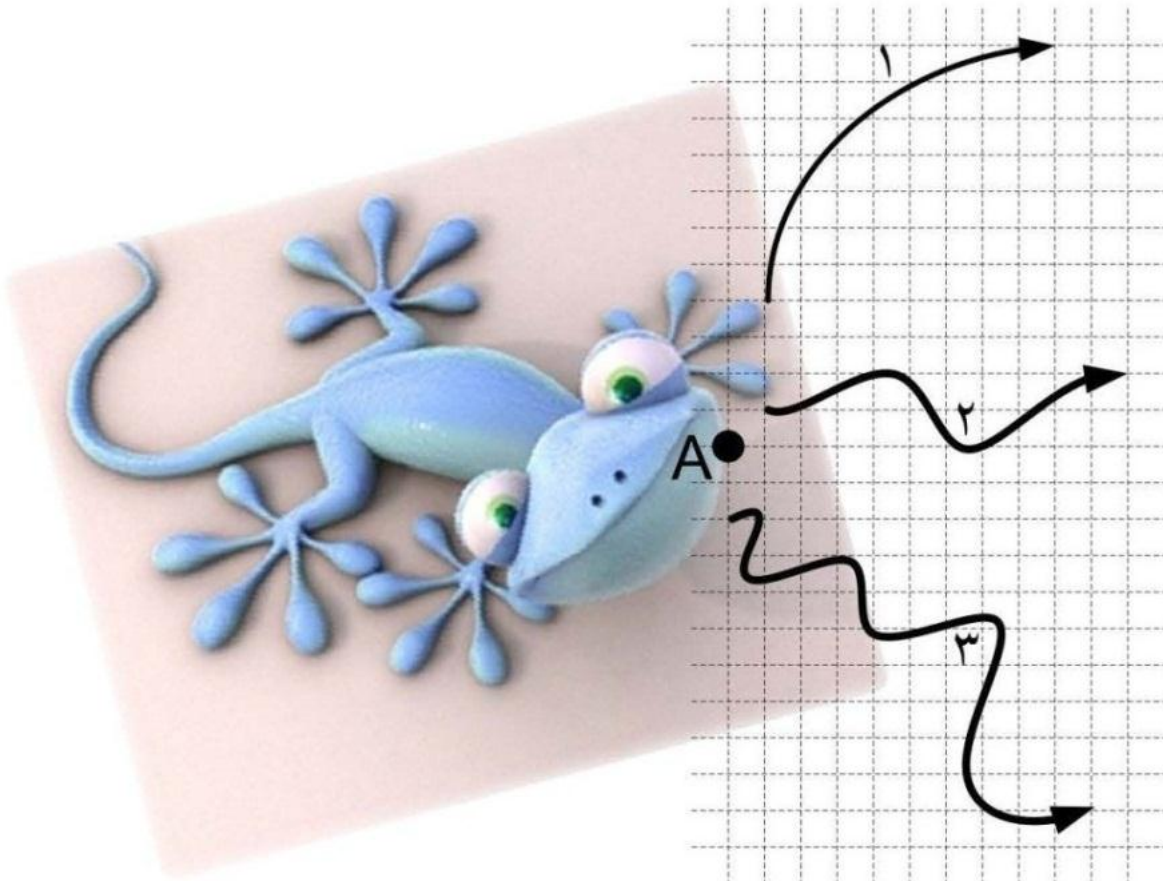
۵. قرینه ی نقطه ی $S = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نسبت به $N = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$ را F می نامیم. مختصات F را

به دست آورید. (راهنمایی: نقطه ی وسط پاره خط FS نقطه ی N است.)



جمع بردارها

۱. عمومی الهه برای او یک عروسک کنترلی بسیار پیشرفته خریده است. روی کنترل این عروسک ۳ دکمه وجود دارد. الهه هر بار که دکمه‌ای را می‌فشارد عروسک طبق بردار آن حرکت می‌کند. مثلاً وقتی دکمه‌ی ۱ را می‌فشارد، عروسک طبق بردار ۱ شروع به حرکت می‌کند و وقتی دو دکمه‌ی ۳ و ۲ را با هم می‌فشارد، عروسک طبق بردار مجموع ۲ و ۳ حرکت می‌کند.



الف) عروسک با فشردن به ترتیب دکمه‌های ۱ و ۲ و ۳ (هر کدام یک‌بار) از نقطه‌ی شروع (A) به چه نقطه‌ای می‌رسد؟



ب) اگر ترتیب فشردن دکمه‌ها را به صورت ۳ و ۲ و ۱ (هر کدام یک بار) تغییر دهیم، عروسک از نقطه‌ی شروع به کجا می‌رسد؟

پ) اگر الهه هر یک بار سه دکمه را با هم بفشرد عروسک از نقطه‌ی شروع به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

ت) بهترین ترتیب فشردن دکمه‌ها برای آنکه عروسک به دورترین فاصله از مکان اولیه‌اش برسد، چیست؟ (به شرطی که هر دکمه را فقط یک بار بفشاریم)

۲. مورچه‌ها موجودات بسیار قدرتمند و پرکاری هستند و البته بعضی‌ها معتقدند که آن‌ها بسیار باهوش هم هستند. تا به حال حتماً حمل بار توسط تعداد زیادی از مورچه‌ها را دیدید که با یکدیگر و با نظم و ترتیب بار سنگینی رو تا لانه‌شان حمل می‌کنند. زیور یک دانشمند نوجوان و علاقه‌مند به کار روی زندگی مورچه‌هاست. او حالا که با بردارها تا حدی آشنا شده، می‌خواهد حمل بار توسط دسته‌ی مورچه‌ها را با بردار توصیف کند.

الف) به او در این کار کمک کنید و بردار حرکت تمام مورچه‌ها را رسم و بردار مجموع را بیاید. (توجه کنید یک مورچه می‌تواند جسمی را بکشد ولی نمی‌تواند هل دهد).

ب) اگر لانه‌ی این مورچه‌ها در شمال غرب تصویر واقع باشد، کدام جمله صحیح‌تر است؟

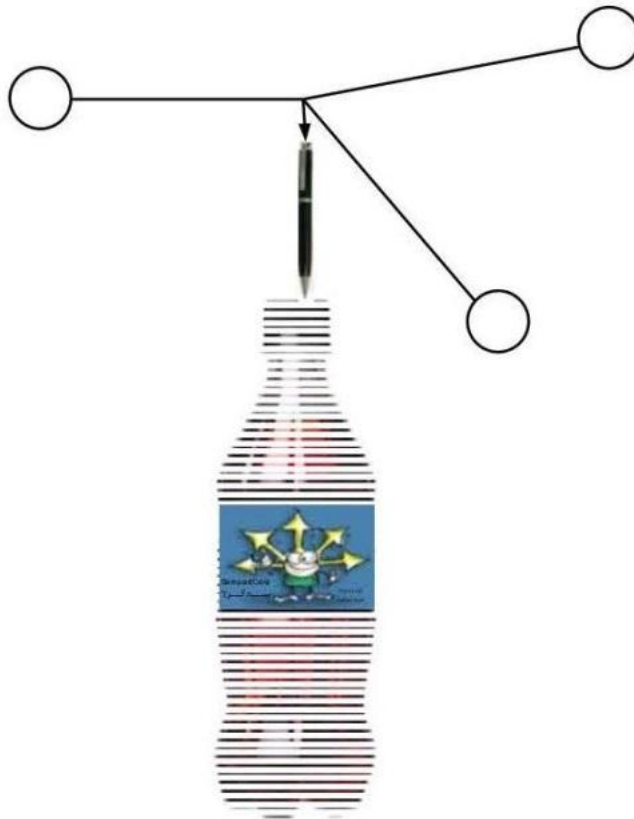
* مورچه‌های پایین تصویر اصلاً باهوش نیستند.

* هیچ مورچه‌ای در دنیا باهوش نیست.



مسابقه ی سمپاد کولا

یک شرکت سازنده ی نوشابه ی مبتکر به نام «سمپاد کولا»، دست به طراحی بازی تلویزیونی جذابی، برای جلب مشتری های بیشتر زده است. در این بازی چند گروه سه نفره شرکت می کنند. به دور کمر هر یک از نفرات گروه یک نخ کاموایی به طول ۱۵۰ سانتی متر متصل می باشد و طرف دیگر هر سه نخ به یک خودکار وصل است. نفرات گروه به گونه ای مثلثی می ایستند و یک شیشه ی نوشابه در مرکز مثلث قرار می گیرد. افراد گروه باید سعی کنند بدون استفاده از دست و تنها با تکان خوردن، خودکار را به درون شیشه ی نوشابه ی سمپاد کولا ببرند. گروهی برنده ی بازی است که بتواند زودتر از بقیه ی گروه ها و بدون دست زدن به نخ ها و تنها با حرکات بدن، خودکار را داخل شیشه ی نوشابه ببرد.

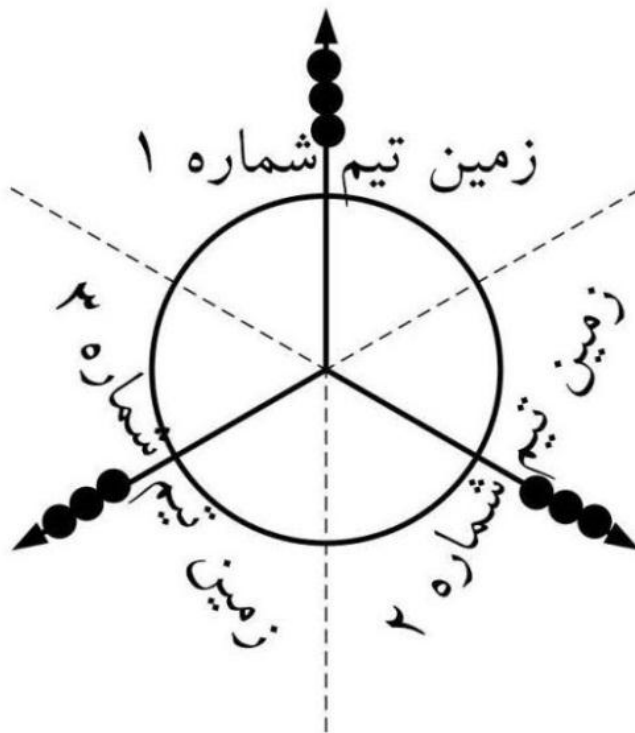


چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می کنید؟



طناب کشی فوق حرفه‌ای

۹ قهرمان مسابقات جهانی طناب کشی توانسته‌اند بازی طناب کشی را ارتقا دهند. آن‌ها در ۳ گروه ۳ نفره و در زمینی به شکل زیر قرار می‌گیرند.

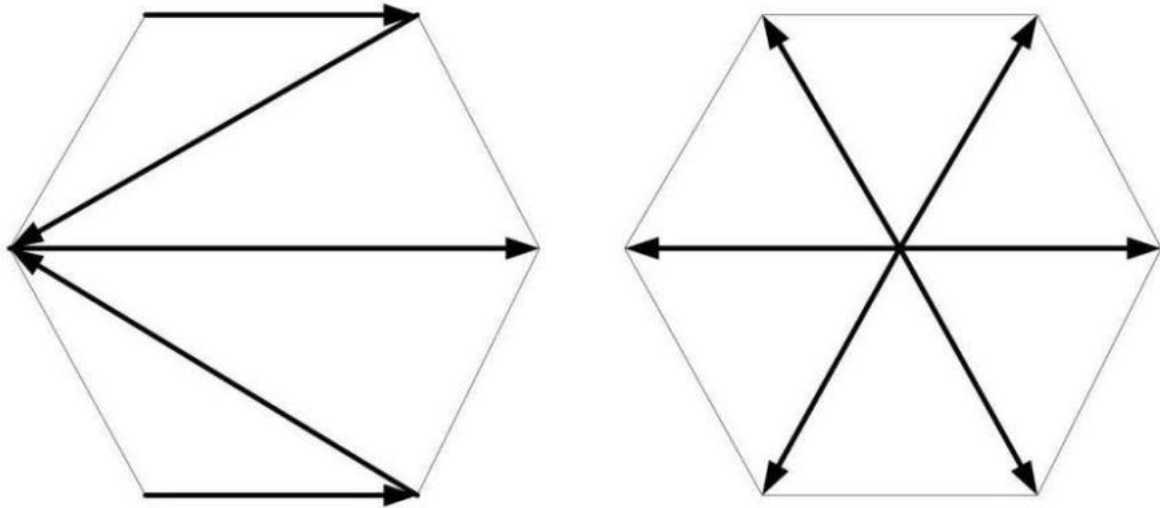


دایره‌ی مرکز زمین به شعاع نیم متر می‌باشد. سه طناب در مرکز زمین به یکدیگر گره خورده‌اند و به گره سه طناب یک پارچه‌ی وصل شده است. سه گروه ابتدا در زمین مربوط به خود مستقر شده و سپس هم‌زمان و با سوت داور شروع به کشیدن طناب می‌کنند. گروهی برنده است که بتواند پارچه متصل به گره را به زمین خود بیاورد. دقت کنید که در ابتدای بازی زاویه‌ی سه طناب با یکدیگر ۱۲۰ درجه باشد.

چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می‌کنید؟



بردار مجموع بردارهای زیر را رسم کنید. (شش ضلعی هایی که می بینید منتظم هستند.)



تجزیه ی بردارها

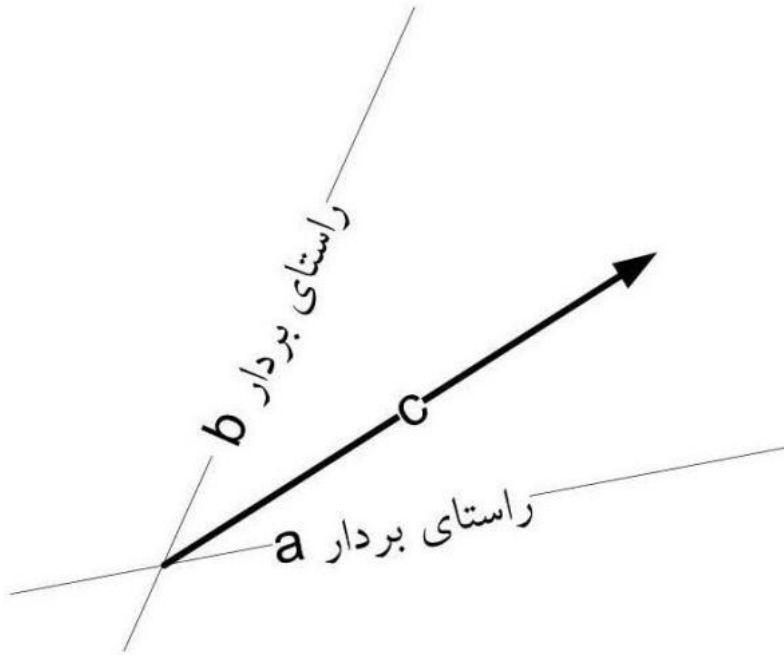
۱. بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ را رسم کنید.

الف) دو بردار را چنان رسم کنید که جمعشان برابر بردار \vec{a} شود.

ب) چند جفت بردار وجود دارند که جمعشان برابر بردار \vec{a} شود.



۲. بردار \vec{c} رسم شده است و می‌دانیم که $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. راستاهای دو بردار \vec{a} و \vec{b} داده شده‌اند. بردارهای \vec{a} و \vec{b} را رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید.



۳. تینا، ۴۰ کیلوگرم وزن دارد. او دیروز که به همراه خانواده‌اش به دل طبیعت رفته بود طنابی را به شاخه‌ی قطور یک درخت وصل کرد و مشغول تاب بازی شد. طناب‌هایی که او استفاده کرده است، می‌بایست توانایی تحمل حداقل چند کیلوگرم وزن را داشته باشند تا تینا دچار مشکل نشود؟

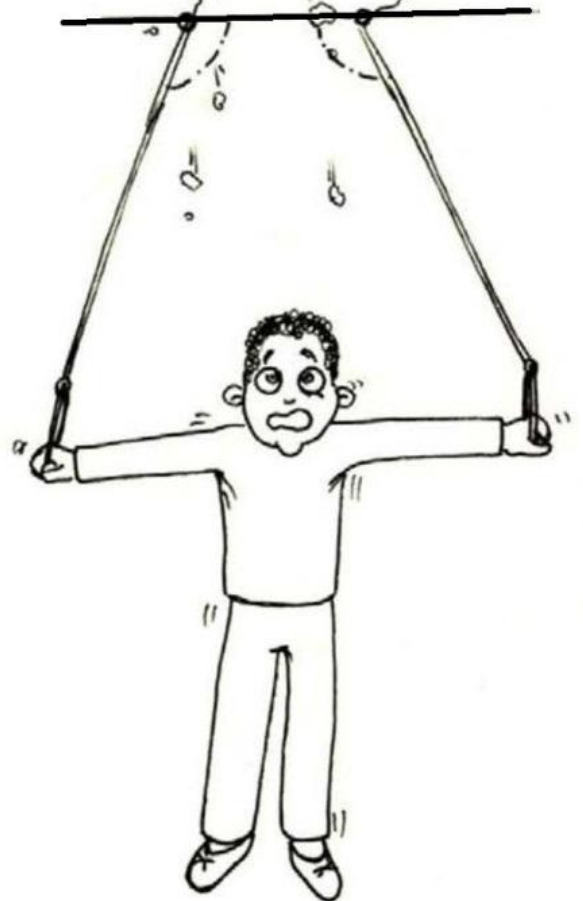


۴. تابک برادر تینا، یک ژیمناست نوجوان است. او خود را برای شرکت در مسابقات ژیمناستیک استان در دسته ۵۰ کیلوگرم آماده می کند. اتابک در بخش دارحلقه بسیار توانمند است. اما دیروز که همه ی خانواده برای گردش به دل طبیعت رفتند او در خانه برای تمرین بیشتر تنها ماند. او ابتدا مثل هر روز به دارحلقه ای که خودش ساخته بود آویزان شد (شکل ۱). پس از مدتی به سراغ یک حرکت جدید تعادلی رفت (شکل ۲). اگر طناب هایی که او استفاده کرده است توانایی تحمل ۲۵۰ نیوتن وزن را داشته باشند، چرا او امروز در بیمارستان بستری است!؟

(شکل ۱)



(شکل ۲)





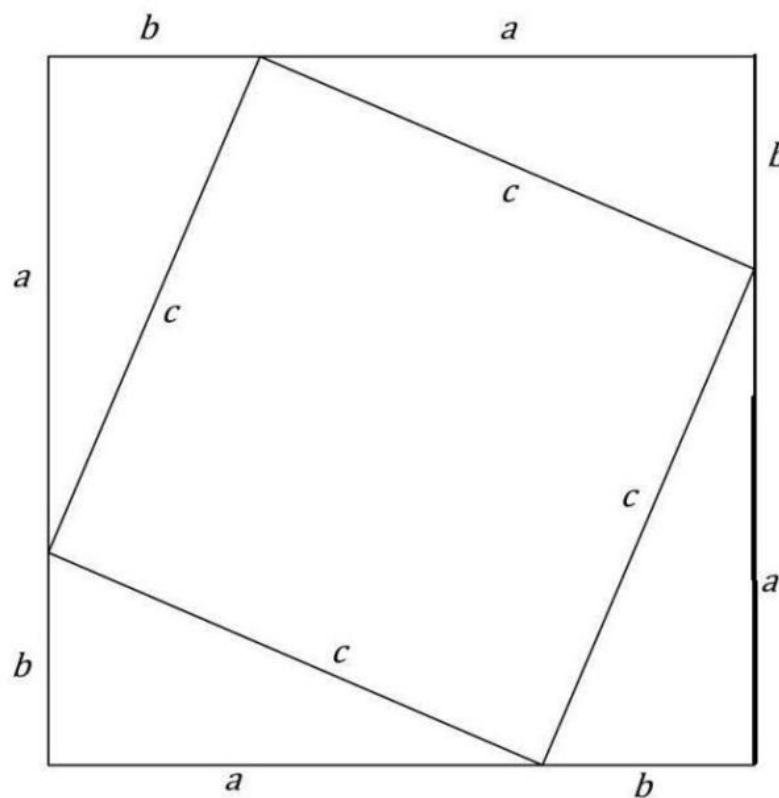
فصل ششم

مثلث



قضیه ی فیثاغورس

۱. «فردوس» قضیه ی فیثاغورس را خوانده است (در مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.) و می خواهد آن را اثبات کند. او مربعی به ضلع $a+b$ رسم کرده و چهار مثلث قائم الزاویه با ساق های a و b درون مربع رسم کرده است. روش اثبات او را با جواب دادن به سؤالات زیر بررسی کنید.



الف) چرا چهار مثلث برابرند؟

ب) چرا چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است؟



پ) با توجه به اینکه مساحت مربع بزرگ برابر مجموع مساحت‌های چهار مثلث و مربع کوچک‌تر است مقدار $(a+b)^2$ برابر چه عبارتی است؟

ت) از فصل قبل به خاطر دارید که $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. از این رابطه استفاده کنید و ثابت کنید $c^2 = a^2 + b^2$.

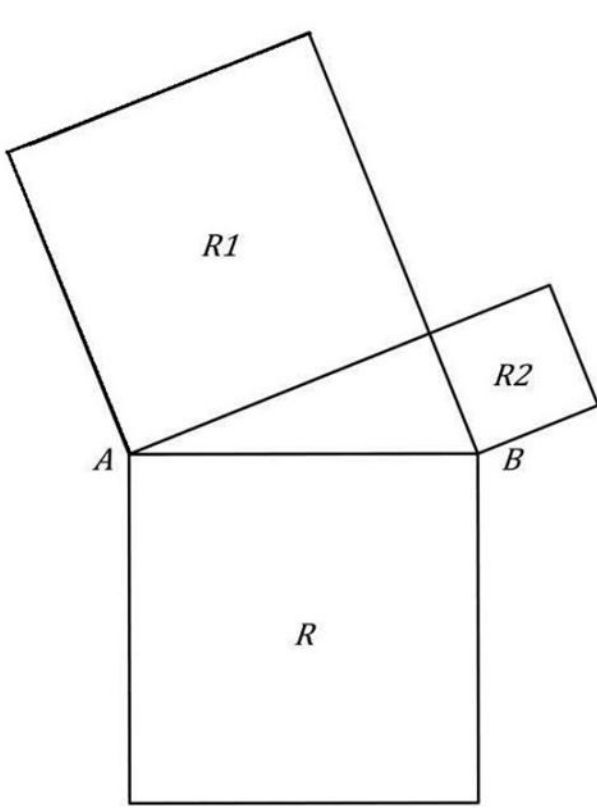
۲. «فرشاد» دوست فردوس، برای آن که در رقابت با دوست خود کم نیاورد، می‌خواهد برعکس قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کند.

اگر مجذور یک ضلع از مثلثی با مجموع مجذوره‌های دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است و زاویه‌ی قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

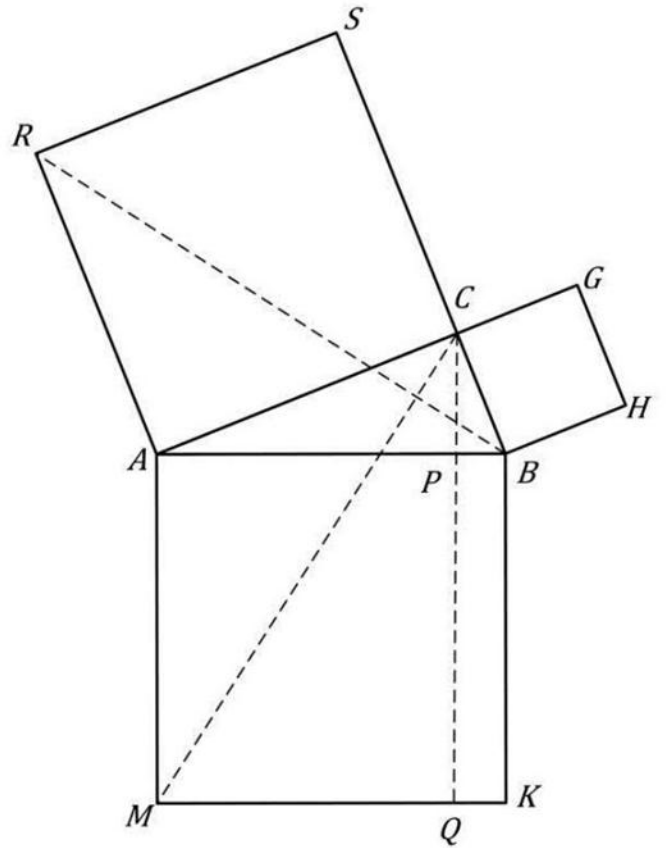
آیا قضیه‌ی جدید هم درست است؟ چرا؟

۳. یونانیان قدیم قضیه‌ی فیثاغورس را به صورت زیر می‌شناختند.

مساحت مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ساق‌های آن مثلث رسم می‌شوند.

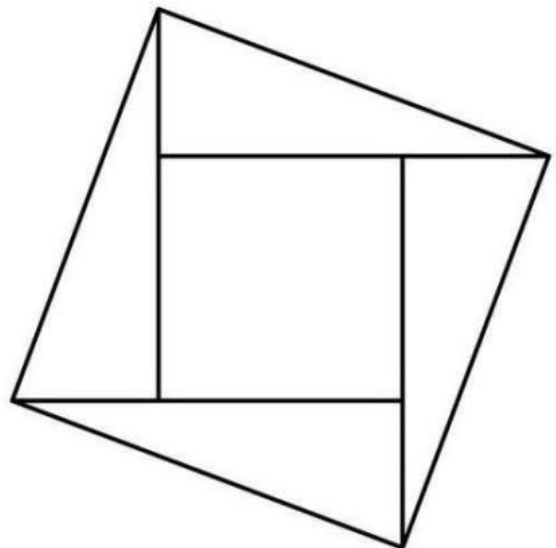
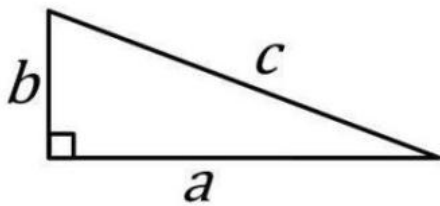


$$S(R) = S(R1) + S(R2)$$



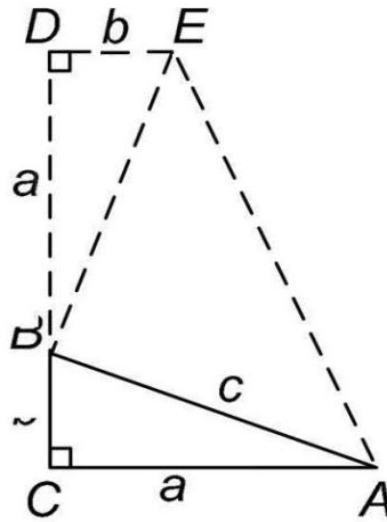
$$S(R) = S(R1) + S(R2)$$

۴. در شکل زیر چهار مثلث قائم الزاویه ی مساوی در کنار یکدیگر شکل زیر را تشکیل داده اند. آیا می توانید از روی شکل اثباتی برای قضیه ی فیثاغورس بیابید.





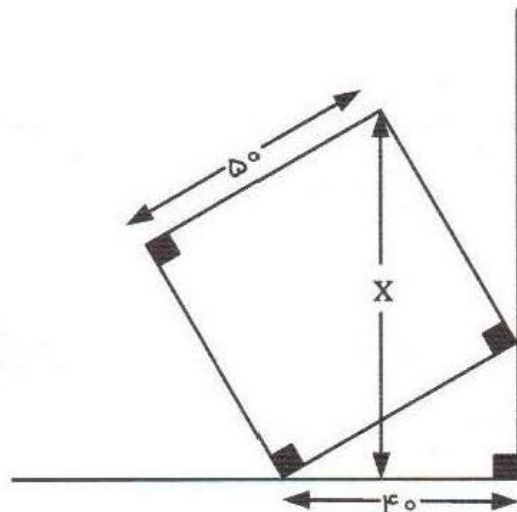
۵. آقای گارفیلد، با استفاده از شکل زیر روشی برای اثبات قضیه‌ی فیثاغورس یافت. شما هم با قرار دادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحت‌های سه مثلث، ثابت کنید که $c^2 = a^2 + b^2$. یادتان باشد که ابتدا قائمه بودن $\angle EAB$ را ثابت کنید.



کاربردهای قضیه‌ی فیثاغورس

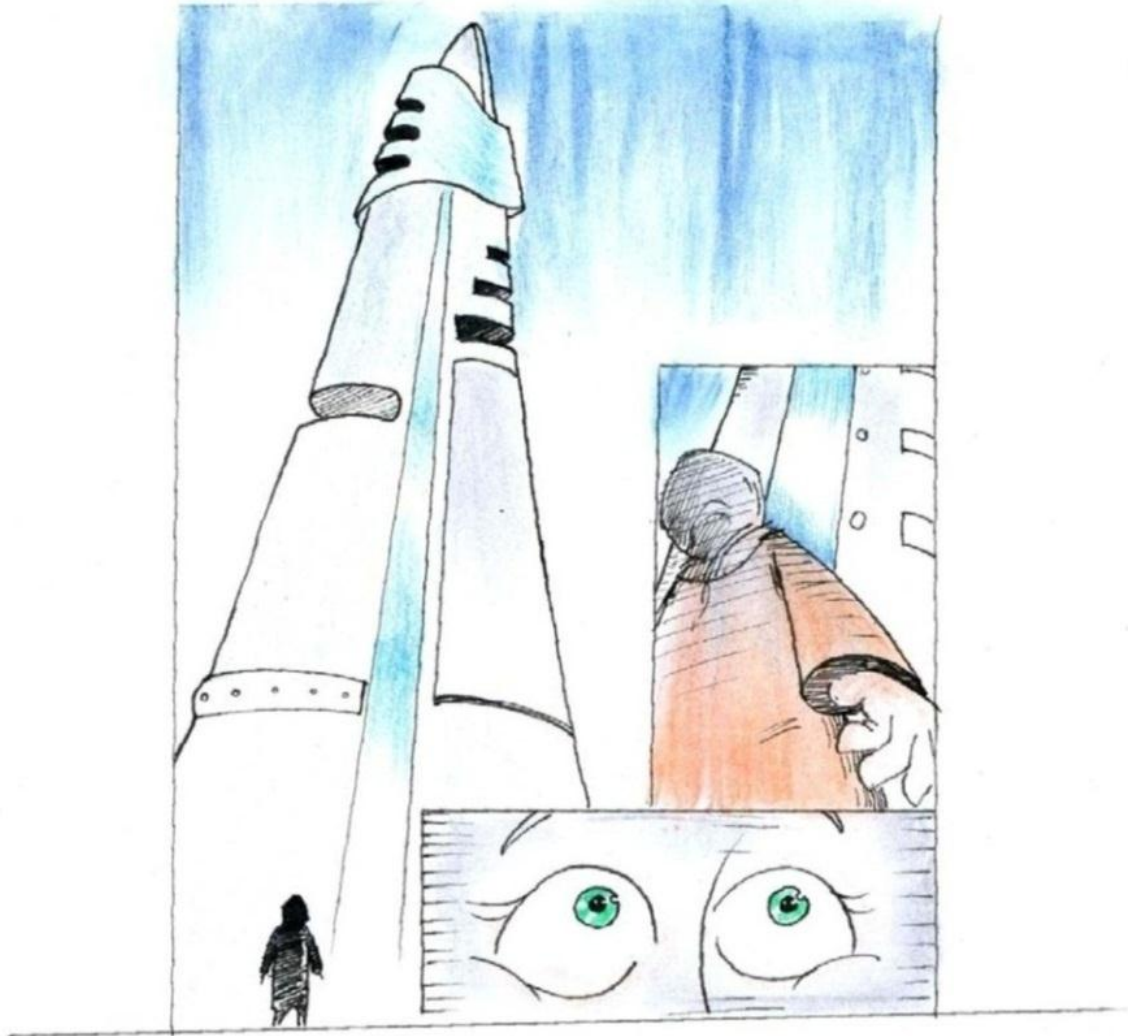
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)





۲. سحر می خواهد ارتفاع برجی را که در آن زندگی می کند را اندازه بگیرد. او ابتدا در فاصله -
ی ۵۰ متری برج به آن نگاه کرد و آن را با زاویه ی ۵۳ درجه دید. سپس از فاصله ی ۱۲۰
متری به آن نگاه کرد و آن را با زاویه ی ۲۷ درجه دید. می دانیم قد سحر، یک و نیم متر
است. به سحر کمک کنید تا ارتفاع برج را به دست آورد؟ روش کار خود را توضیح دهید.





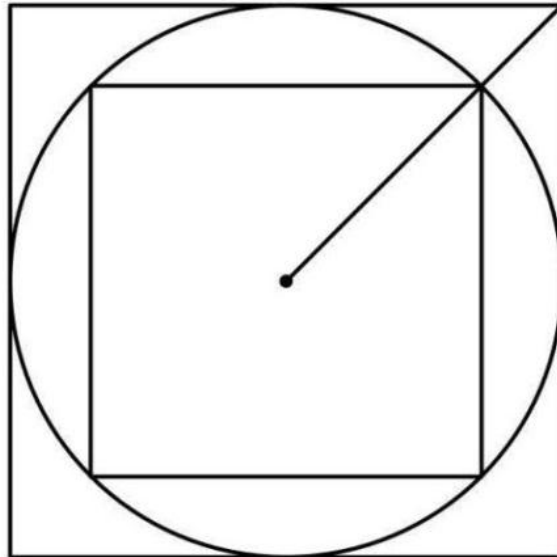
۲. شکور، از خانه شان ۲۵ کیلومتر به سمت جنوب، ۶۰ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت جنوب دور شده است. او اکنون در چه فاصله ای از خانه شان قرار دارد؟





۳. دو وتر عمود بر هم در یک دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند. اگر طول دو قسمت جدا شده روی یکی از وترها ۳ و ۴ باشد و دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ باشد، طول قطر دایره را بدست آورید.

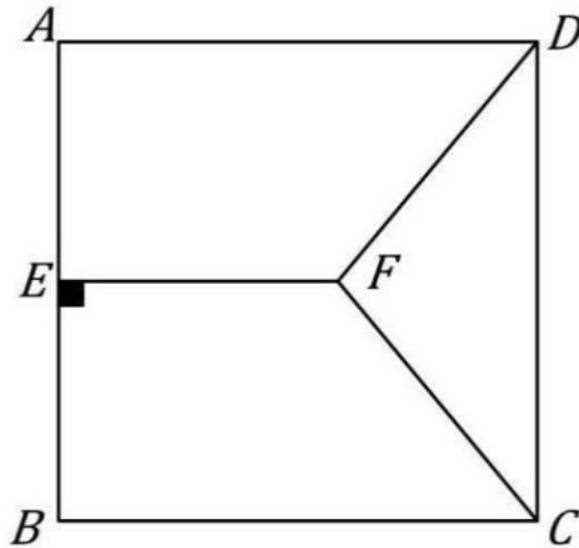
۴. در شکل زیر نسبت مساحت مربع کوچک‌تر به مساحت مربع بزرگ‌تر چقدر است؟



۵. «مشهدی حسن» می‌خواهد باغی را که در روستا دارد بفروشد و برای پسرش در شهر یک اتوموبیل بخرد. باغ مشهدی حسن، به شکل مثلث و به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ متر می‌باشد. اگر در روستا هر مترمربع زمین، یک میلیون تومان ارزش داشته باشد، مشهدی حسن چقدر بابت خرید ماشین می‌تواند هزینه کند؟



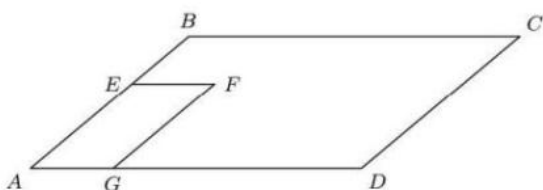
۶. در شکل زیر، طول ضلع مربع $ABCD$ یک واحد است و اضلاع FC ، FB و EF مساویند. مساحت مثلث FBC را بیابید.



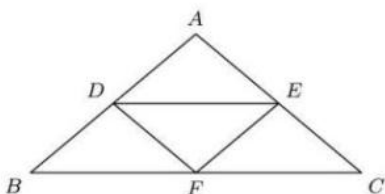


تمرین

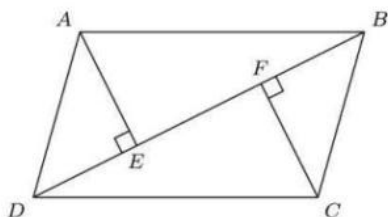
۱. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ و همچنین چهارضلعی $A EFG$ متوازی‌الاضلاع هستند. زاویه‌های F و B چه رابطه‌ای باهم دارند؟



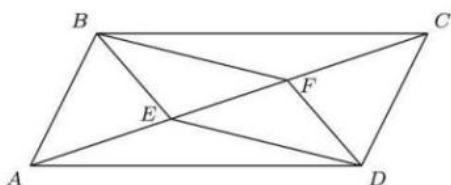
۲. در شکل زیر چهارضلعی $BDEF$ و همچنین چهارضلعی $DECF$ متوازی‌الاضلاع هستند. اگر $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است، ثابت کنید $FD = FE$.



۳. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، AE و CF را بر BD عمود می‌کنیم. ثابت کنید AE و CF باهم مساوی و موازی هستند.

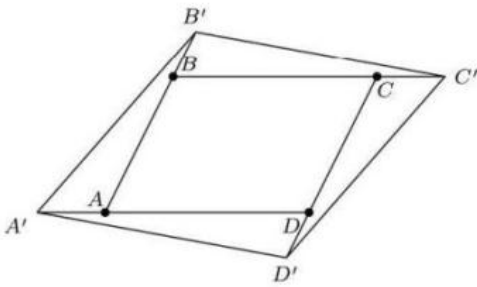


۴. مطابق شکل، در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌دانیم که $AB = AE$ و همچنین $CD = CF$ ؛ ثابت کنید $BEDF$ یک متوازی‌الاضلاع است.

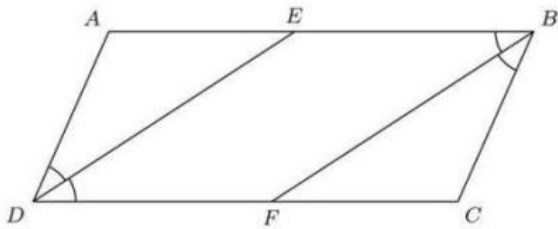




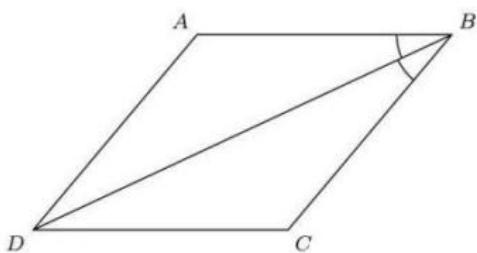
۵. اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در یک جهت امتداد داده و روی آنها پاره‌خط‌های $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می‌کنیم؛ ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.



۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، DE نیمساز زاویه D و BF نیمساز زاویه B هستند؛ ثابت کنید چهارضلعی $DEBF$ متوازی‌الاضلاع است.



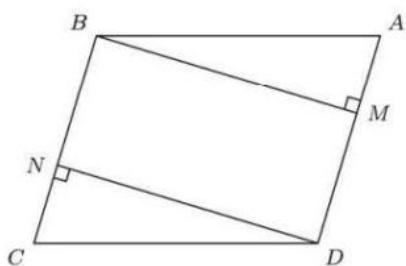
۷. متوازی‌الاضلاعی که یک قطرش نیمساز یکی از زاویه‌هایش باشد، لوزی است.



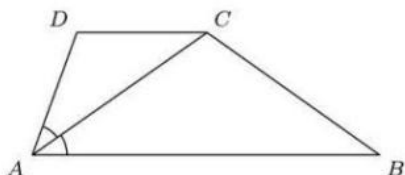


۸. ثابت کنید که قطرهای لوزی، نیمساز نیز هستند.

۹. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید شکل $BMDN$ مستطیل است.



۱۰. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ساق AD با قاعده‌ی CD مساوی است؛ ثابت کنید قطر AC زاویه‌ی A را نصف می‌کند.



۱۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر نصف طول وتر است.

۱۲. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ای 30° باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه، نصف طول وتر است.

۱۳. در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌ها 15° درجه باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است.



فصل هفتم

توان و جذر



تمرین

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$۱) (-۸)^۲ =$$

$$۲) \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ =$$

$$۳) -(-۶)^۲ =$$

$$۴) -\left(\frac{-۲}{۳}\right)^۲ =$$

$$۵) -۱۴^۲ =$$

$$۶) -\left(-\frac{۱}{۵}\right)^۳ =$$

$$۷) -۴^۳ =$$

$$۸) -\frac{(-۲)^۲}{-۷^۲} =$$

$$۹) (-۴)^۳ =$$

$$۱۰) -\frac{-\frac{۱}{۵}}{\left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲} =$$

$$۱۱) -۲^۴ \times (-۲)^۴ =$$

$$۱۲) \frac{-(-۲)^۳}{-۳^۲} - \frac{(-۴)^۲}{(-۳)^۲} =$$

$$۱۳) \left(-\frac{۱}{۴}\right)^۳ =$$

$$۱۴) -\frac{-۶^۲}{(-۶)^۲} \div \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۳ =$$

$$۱۵) (-۱)^۱ \times ۱ + (-۱)^۲ \times ۲ + (-۱)^۳ \times ۳ + \dots + (-۱)^{۱۰۰} \times ۱۰۰ =$$



تعیین علامت عبارت تواندار

«تعیین علامت» یک عبارت یعنی این که، مشخص کنیم حاصل یک عبارت مثبت است یا منفی. برای مثال عبارت زیر را تعیین علامت می کنیم.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)}$$

حاصل عبارت بالا عددی منفی است. زیرا در صورت کسر، دو عدد منفی و یک عدد مثبت در یکدیگر ضرب شده اند که حاصل عددی مثبت می شود. در مخرج کسر هم دو عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب شده اند که حاصل منفی می شود.

صورت کسر مثبت و مخرج آن منفی است. پس کل کسر منفی می شود.

در نتیجه در طرف راست، اعداد بدون علامت نوشته می شوند و تنها یک منفی پشت کسر قرار می گیرد.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)} = -\frac{4 \times 12 \times 38}{18 \times 7 \times 15}$$

بهرتر است همیشه ابتدا کسر را تعیین علامت کنیم و سپس محاسبات را انجام دهیم.

مثال:

$$\frac{\overset{+}{(-3)^6} \times \overset{-}{(-6)^3}}{\overset{+}{(+16)^3} \times \overset{+}{(-16)^8}} = -\frac{3^6 \times 6^3}{16^3 \times 16^8}$$

نکته بسیار مهم: فقط زمانی می توانیم این گونه تعیین علامت کنیم که فقط در عبارت ضرب یا تقسیم

داشته باشیم.



تمرین

۱. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $\frac{(+18)^{12} \times (-8)^2}{(-7)^3 \times (+17)^4}$

ب) $\frac{(-2)^3 \times (-3)^2}{(-4)^5 \times (-5)^6}$

ج) $-(-3)^5 \times (-8)^2 \times (+6)^3 \div (-4)^3$

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $6^3 \times (-6)^5 \times \left(\frac{-12}{2}\right)^7$

۲) $\left(\frac{39}{13}\right)^5 \times \left(\frac{57}{19}\right)^7$

۳) $\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{8}{20}\right)^{18} \times (0,4)^{14}$

۴) $\left(\frac{-6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 \times \left(\frac{6}{-7}\right)^7$

۵) $(-12)^6 \div (-12)^4$

۶) $(0,6)^7 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \times 6^7$

۷) $\frac{(0,1)^4}{(-4)^4 \div 4^4}$

۸) $(0,7)^6 \times \left(-\frac{5}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{15}\right)^6 \div \left(\frac{14}{8}\right)^6$

۹) $2^5 \times 3^5 \times 23^5$

۱۰) $(-9)^3 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{-1}{9}\right)^3$

۱۱) $\frac{(-8)^8}{-8}$

۱۲) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

۱۳) $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{23}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{27}}$

۱۴) $\frac{(-8)^6}{4^6}$

۱۵) $(2,8)^7 \div (0,7)^7 \div 2^7$

۱۶) $\frac{16^{20}}{-4^{20}}$

۱۷) $6^8 \div 5^2 \div 5^4 \div 6^2$

۱۸) $\frac{38^2 \times 26^5 \times 11^7}{13^5 \times 44^7 \times 19^2}$

۱۹) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{12}\right)^5$

۲۰) $(-7)^4 \times (6)^4 \times (-7)^5 \times (-6)^5$

۲۱) $(-7)^6 \times 7^5 \times (-20)^{11}$

۲۲) $(-12)^6 \times 4^3 \times (-3)^3 \times 10^9$

۲۳) $\frac{18^6 \times 18^9}{315 \times 615}$

۲۴) $\frac{8^6 \times 8^3 \div 2^9}{\left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

۲۵) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3^3$

۲۶) $\frac{2^2 \times 48^7 \times 6^3 \times 3^2 \times 8^5}{1612}$

۲۷) $\frac{(1,4)^2 \times (0,2)^2 \times (7)^2}{(2,8)^5}$

۲۸) $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$



۳. الف) اگر طول ضلع مربعی 20° درصد افزایش یابد، مساحت آن چند درصد افزایش می یابد؟
ب) اگر طول ضلع مکعبی 20° درصد افزایش یابد، حدس می زنید حجمش چند درصد افزایش می یابد؟

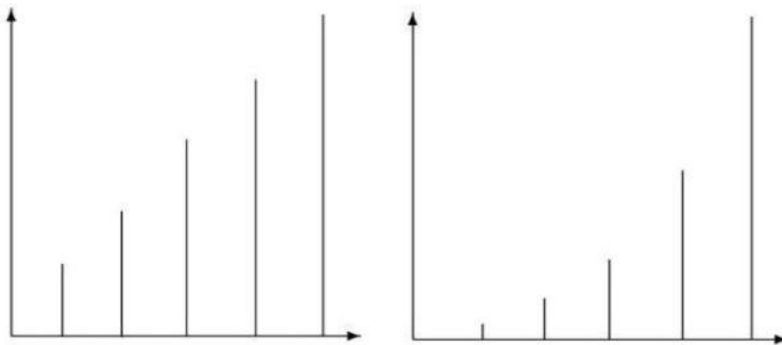
۴. در داخل مربع علامت \times یا \div قرار دهید، تا تساوی برقرار شود.

۱) $6^2 \square 18^3 \square 3^2 = 18^5$

۲) $18^6 \square 2^6 \square 3^6 = 27^6$

۳) $18^5 \square 3^2 \square 9^3 = 9^8$

۵. اعداد $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ و 2^5 در کدام نمودار درست نشان داده شده اند؟



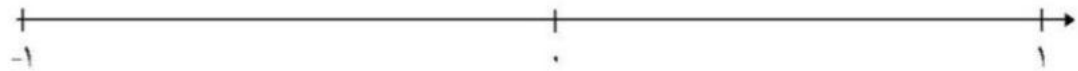


۶. اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$



چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷. بین 2^{100} و 2^{101} شش عدد مثال بزنید که بر ۵ بخش پذیر باشند.

۸. کوچک‌ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} را بیابید که بر ۵ بخش پذیر باشد.

۹. بزرگ‌ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} که بر ۵ بخش پذیر است را به دست آورید.



۱۰. مقایسه کنید.

$$۲^{۶۳} \square ۳^{۴۳}$$

$$۲^{۳۳} \square ۳^{۲۲}$$

$$۹^{۱۵} \square ۴^{۲۵}$$

۱۱. می‌خواهیم اعداد $۲^{۱۹}$ و $۱۶^۵$ و $۶۴^۳$ را به ترتیب افزایشی بنویسیم.

$$\begin{array}{ccc} ۲^{۱۹} & ۱۶^۵ & ۶۴^۳ \\ ۲^{۱۹} & (۲^۴)^۵ & (۲^۶)^۳ \\ ۲^{۱۹} & ۲^{۲۰} & ۲^{۱۸} \\ ۲^{۱۸} < ۲^{۱۹} < ۲^{۲۰} \\ ۶۴^۳ < ۲^{۱۹} < ۱۶^۵ \end{array}$$

حال اعداد زیر را به ترتیب افزایشی بنویسید.

$$۷^{۱۱}, ۸ \times ۷^۹, ۱۵ \times ۷^۸, ۳ \times ۷^{۱۰}$$



۱۱. اعداد زیر را به صورت کاهشی بنویسید.

$$6^{22222}, 3^{33333}, 2^{55555}$$

۱۲. می خواهیم کوچک ترین عدد طبیعی m را طوری تعیین کنیم که

$$m^{80} > 81^{50}$$

$$m^{80} > 3^{200}$$

$$(m^2)^{40} > (3^5)^{40}$$

$$(m^2)^{40} > (243)^{40}$$

$$\rightarrow m = 16$$

$$a^{72} > 16^{94}$$

حال کوچک ترین عدد طبیعی a را طوری تعیین کنید که

۱۳. می خواهیم بدون به کار بردن علامت های چهارگانه در حساب، با کمک 4 عدد یک، عددی بنویسیم

که بزرگ ترین مقدار ممکن باشد.

به طور ذهنی و به سادگی می توان فهمید که عدد ۱۱۱۱ جواب مورد نظر مسأله نیست. زیرا عدد: 11^{11}



خیلی از آن بزرگتر است. برای محاسبه‌ی این عدد باید ۱۱ را ۱۱ بار در خودش ضرب کرد. این عدد از ۲۸۵ میلیارد تجاوز می‌کند و بنابراین نسبت به عدد ۱۱۱۱ قریب ۲۵۰ میلیون مرتبه بزرگتر است.

حال بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه با کمک ۴ تا عدد ۲ بزرگ‌ترین عدد ممکن را بنویسید.

$$۲۲^{۲} = ۲۲^۴ \text{ یادداشت.}$$

۱۴. کدام یک از اعداد زیر از بقیه بزرگتر است؟

$$۳۱^{۴۲}, ۲۱^{۴۳}, ۴^{۳۱۵}, ۳^{۴۳۱}, ۲^{۴۳۱}$$

۱۵. در یک محور عددی فاصله هر دو عدد صحیح متوالی ۱ متر می‌باشد. در این محور فاصله $۲^{۲۱}$ از

قرینه‌اش تقریباً چند کیلومتر است؟



تمرین

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt{5^2}$

۲) $\sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{64}}$

۳) $\sqrt{15 \times 35 \times 21}$

۴) $\sqrt{40 - \sqrt{16}}$

۵) $\sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}}$

۶) $\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}}$

۷) $\sqrt{\frac{9 + 16}{36 + 64}}$

۸) $\sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}}$

۹) $\sqrt{(-25) \times (-4)}$

۱۰) $\sqrt{\frac{64}{100} \times 0,36}$

۱۱) $\sqrt{0,04 \times 81}$

۱۲) $\sqrt{4 \times 25 \times 9 \times 36}$

۱۳) $\sqrt{\sqrt{625}}$

۱۴) $\sqrt{3^2 \times 2^2 \times 12}$

۱۵) $\sqrt{\frac{0,018}{0,8}}$

۱۶) $\sqrt{5000 \times 0,18}$

۱۷) $\sqrt{0,7 \times 6,3}$

۱۸) $\sqrt{\frac{\sqrt{51,2}}{\sqrt{0,2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$

۱۹) $\sqrt{1 + 2 \times \sqrt{1 + 3 \times \sqrt{1 + 4 \times \sqrt{1 + 5 \times \sqrt{(1 + 6)^2}}}}}$

۲. در جای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $3 \times \sqrt{\square} = 21$

ب) $\sqrt{\frac{28}{\square}} = 2$

ج) $3 \times 4 \times \sqrt{\square} = \frac{120}{2}$

د) $\sqrt{1 + 2 \times \sqrt{\square}} = 3$



۳. برای هر یک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

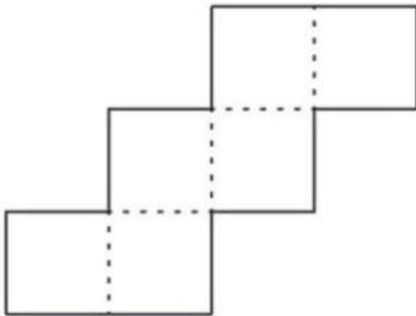
ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مادر مریم برای تولد او، یک کادو خریده که جعبه آن به شکل مکعب است. اگر برای کادو کردن این جعبه،

به $2/16$ متر مربع کاغذ کادو احتیاج باشد، اندازه هر ضلع این جعبه، چند سانتی‌متر است؟

۵. شکل زیر از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل 21600 سانتی‌متر مربع

است.



الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را پیدا کنید.

ج) محیط تمام شکل را برحسب سانتی‌متر پیدا کنید.

۶. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{0,27}$

ب) $\sqrt{78}$

ج) $\sqrt{47,3}$

د) $\sqrt{35,5}$

ه) $\sqrt{740}$

و) $\sqrt{0,74}$



۷. الف) مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ را به دست آورید.

ب) تلاش کنید جواب دقیق‌تری برای $\sqrt{3}$ به دست آورید.

۸. $2\sqrt{3}$ یعنی $2 \times \sqrt{3}$. مقدار تقریبی عبارت‌های زیر را به دست آورید. سعی کنید جوابتان بهترین جواب ممکن باشد.

الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

ب) $3\sqrt{2}$

ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$

د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$

ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$

۹. اولین رقم بعد از اعشار کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

ب) $\sqrt{17}$

الف) $\sqrt{15}$

۱۰. حاصل جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۱۱. مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{88}$ را بنویسید.

۱۲. اگر هر یک از حروف نشان‌دهنده‌ی یک رقم باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً غلط است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$

ب) $\sqrt{abc} = def$

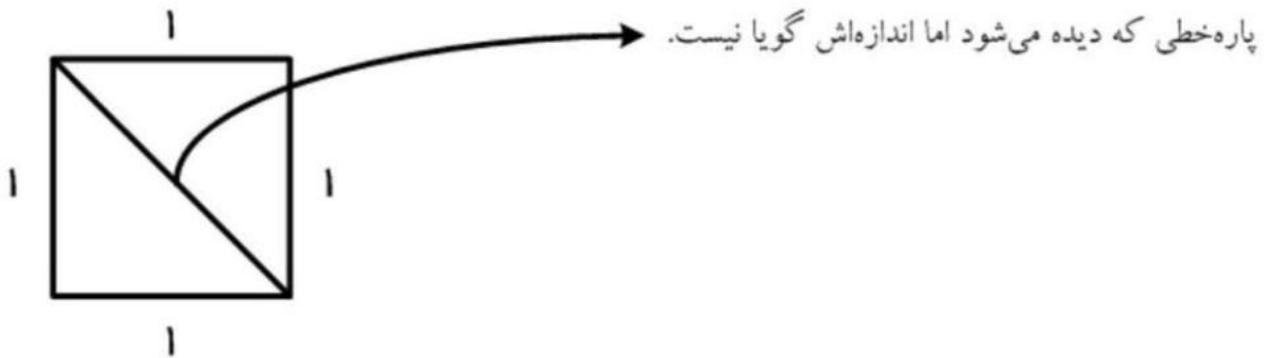
ج) $\sqrt{\circ/ab} = \circ/c$

د) $\sqrt{ab} = c$



اعداد گنگ و گویا

فیثاغورس بسیار به قضیه‌ی خود می‌بالید، زیرا توانسته بود بین هندسه و حساب یک رابطه‌ی اتصال پدید آورد. اما این پیروزی عمر کوتاهی داشت زیرا مثلاً قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی‌توانست به صورت عددی گویا بیان کند.



در میان فیثاغورسیان^۱ حیرت زیادی ایجاد شد که پایه‌های فلسفی آن‌ها را به لرزه درآورده بود. آن‌ها به اعدادی به این صورت «آلوگون»^۲ یعنی گنگ یا نگفتنی گفتند و اعضای انجمن فیثاغورسیان، سوگند یاد کردند که تا وجود چنین اعدادی را هرگز فاش نکنند.

پروکلوس^۳ نوشته است: « کسانی که مقادیر اصم یا گنگ را نخستین بار از نهان‌گاه بیرون آوردند و افشا کردند تا آخرین نفر در طوفانی که کشتی آن‌ها را شکست، هلاک شدند. زیرا نگفتنی‌ها باید نگفتنی باقی بماند.»

^۱ افرادی که به اصول باستان اعتقاد نداشتند و به همه چیز به دید «چرا؟» نگاه می‌کردند و بعدها در مدرسه‌ای که فیثاغورس تأسیس کرده بود انجمنی به نام فیثاغورسیان تشکیل دادند.

^۲ Alogon

^۳ Perocelos



تا مدت‌ها $\sqrt{2}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود. بعدها به گفته‌ی افلاطون، تئودوروس کورنه‌یی نشان داد که $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ و $\sqrt{17}$ نیز گنگ هستند.

۱. می‌دانیم که $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. کدام دسته از اعداد زیر گنگ هستند؟ چرا؟

الف) $2\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ ، ...

ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، ...

پ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ، ...

۲. کدام‌یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}، \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}، \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}، \frac{3}{\sqrt{8}}، \frac{0}{\sqrt{2}}، \frac{1}{\sqrt{2}}، \sqrt{1+0/44}$$

۳. مثالی به اضلاع $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}+1$ ، $2\sqrt{2}$ رسم کنید.

۴. سه مثلث به مساحت $\sqrt{6}$ رسم کنید.

۵. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۶. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۷. الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.



۸. الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۹. الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۱۰. الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۱۱. زینت می‌گوید بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد. آیا حرف زینت درست است؟ توضیح دهید.



فصل هشتم

آمار



میانگین

۱. آقای تفنن، یک گله با ۲۰ رأس گاو دارد که میانگین وزن این گاوها ۱۵۰ کیلوگرم می‌باشد. آقای تفنن برای کمک به ساخت یک مدرسه در روستای خود، ۶ رأس از گاوهای خود را فروخت. اگر میانگین وزن این ۶ گاو ۲۰۰ کیلو بوده باشد، میانگین وزن ۱۴ گاو باقی مانده چقدر است؟
۲. آقای تفکر، پس از محاسبه‌ی نمرات ریاضی یک کلاس ۲۱ نفری متوجه شد که یک نمره‌ی ۱۸ را فراموش کرده است وارد لیست نمرات کند. اگر او میانگین را ۱۷ به دست آورده باشد، میانگین درست نمره‌های کلاس چند است؟
۳. میانگین سن ۱۵ نفر، ۲۵ می‌باشد. اگر از این گروه مسن‌ترین و جوان‌ترین نفرات را حذف کنیم، میانگین ۱۳ نفر باقی مانده چه تغییری خواهد کرد؟
۴. میانگین نمرات ۲۰ نفر ۱۷ می‌باشد.
الف) حداکثر، نمره‌ی چند نفر از دانش‌آموزان می‌تواند ۱۶ باشد؟
ب) اگر بدانیم که تعداد دانش‌آموزانی که ۱۶ شده‌اند با تعداد دانش‌آموزانی که ۱۵ شده‌اند برابر است، حداکثر، نمره‌ی چند نفر ۱۶ شده است؟
۵. نمرات ریاضی چهار کلاس سوم ۱، سوم ۲، سوم ۳ و سوم ۴ را داریم. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۲ برابر ۱۸/۱۲، میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۲ و سوم ۳ برابر ۱۷/۲۴ و میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۳ و سوم ۴ برابر ۱۹/۱۱ است. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۴ چند است؟

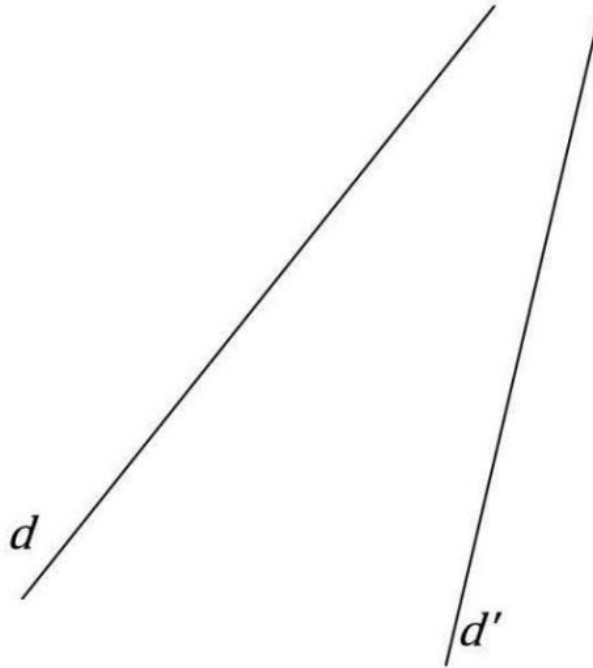


فصل نهم

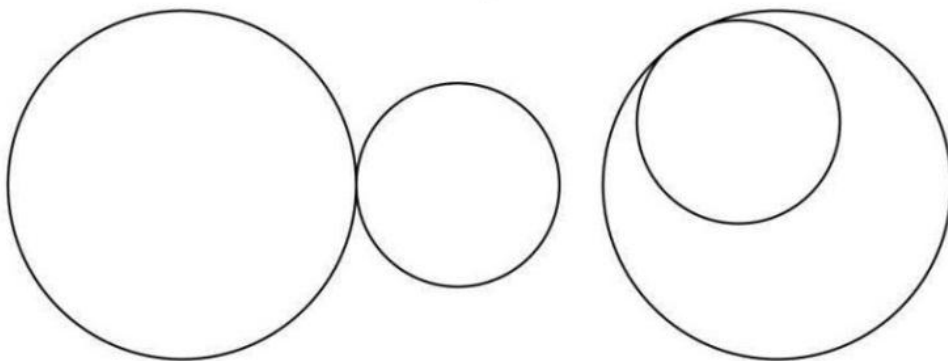
دایره



۱. دایره‌ای به شعاع دو سانتی‌متر چنان رسم کنید که بر هر دو خط زیر مماس باشد. روش کار خود را توضیح دهید.



۲. الف) دو دایره‌ی با را (صرف نظر از اندازه‌ی آنها) تنها به دو روش می‌توان بر هم مماس کرد، به گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند.



- سه دایره‌ی متمایز را به چند طریق می‌توان بر هم مماس کرد، به گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند و نقاط تماس آنها نیز متمایز باشد.

ب) چهار دایره‌ی متمایز چگونه؟



۳. دو سکه هر کدام به شعاع ۲ سانتی‌متر داریم. یکی زرد و یک قرمز. سکه‌ی قرمز ثابت است ولی سکه‌ی زرد مماس بر سکه‌ی قرمز دور آن می‌چرخد. اگر سکه‌ی زرد یک دور کامل دور سکه‌ی قرمز بزند، چند بار دور خودش چرخیده است؟

به نظر شما کدام یک جواب صحیح مسئله می‌باشد؟

- یک بار
- $1/5$ بار
- دو بار
- $2/5$ بار
- هیچ کدام

۴. یک دایره و یک مربع با محیط‌های برابر و مماس بر یکدیگر داریم. مربع ثابت است و دایره دور مربع و مماس بر آن می‌چرخد. اگر دایره، یک بار دور مربع بزند چند بار دور خودش چرخیده است؟

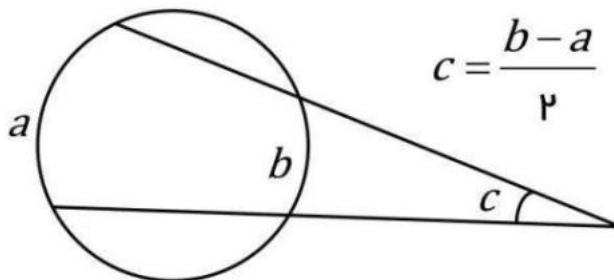
۵. دایره موجود بسیار عجیبی است که ویژگی‌های بسیاری دارد. یکی از این ویژگی‌ها، قضیه‌ی جانسون می‌باشد. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند مطلبی درباره‌ی قضیه‌ی جانسون، روی وب‌گاه سمپاد بخوانند.



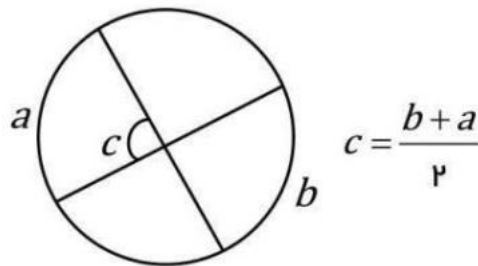


زاویه در دایره

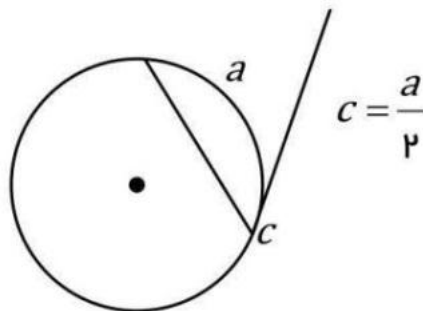
۱. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بیرونی دایره برابرست با نصف اختلاف کمان‌های روبرو به آن زاویه.



۲. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی درونی دایره برابرست با نصف مجموع کمان‌های روبرو به آن زاویه.



۳. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی^۱ دایره برابرست با نصف کمان روبرو به آن زاویه.



۱. ظل به معنای سایه است.



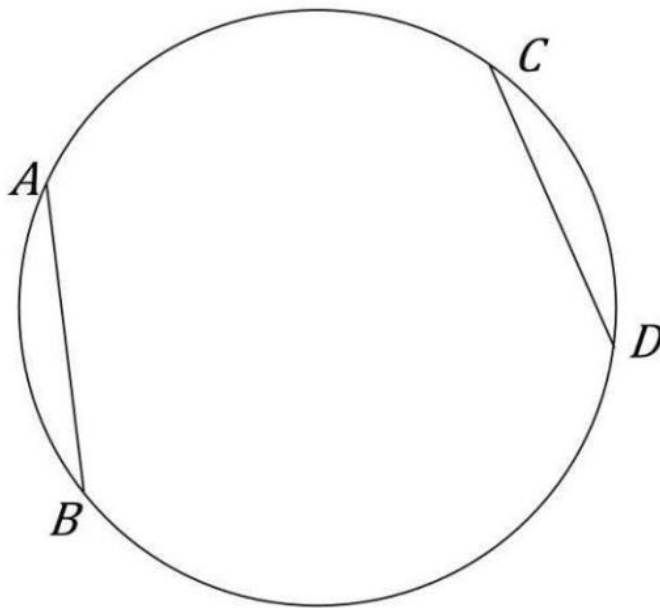
۴. روش سامان برای رسم مماس از نقطه‌ای بر دایره، را به‌خاطر بیاورید. پدر سامان می‌گوید در زمان تحصیلش، معلمشان روش دیگری برای رسم مماس گفته است:

فرض کن می‌خواهیم از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r مماسی رسم کنیم. ابتدا پاره‌خط OA را رسم کرده و وسط آن را می‌یابیم (نقطه‌ی M). به مرکز M و به شعاع OM دایره رسم می‌کنیم. از A به نقطه‌ی برخورد دو دایره وصل می‌کنیم. این پاره‌خط همان مماس مورد نظر است.

با استفاده از روشی که پدر سامان بیان کرده است مماسی بر دایره دلخواه رسم کنید.

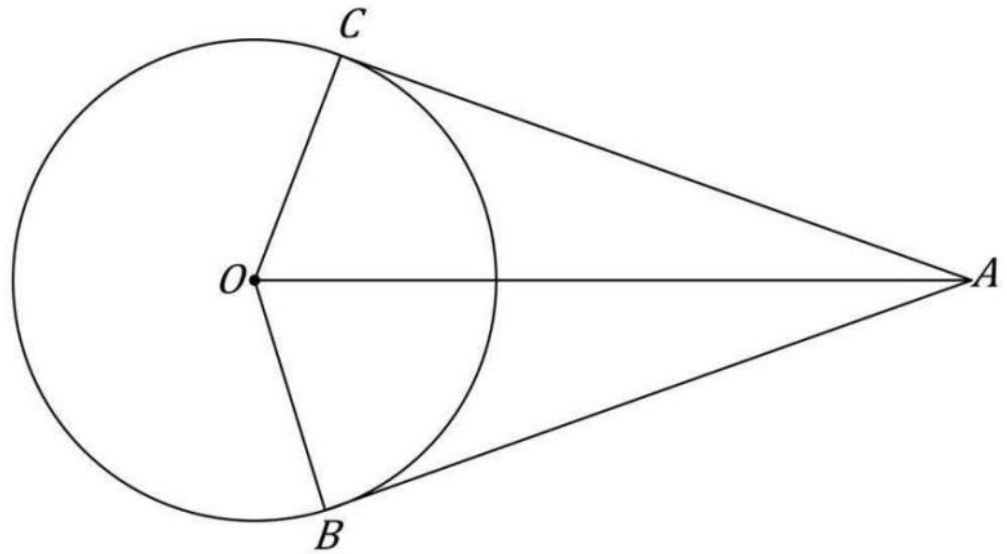
آیا این روش درست است؟ چرا؟

۵. در دایره‌ی زیر $AB = CD$ ، ثابت کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



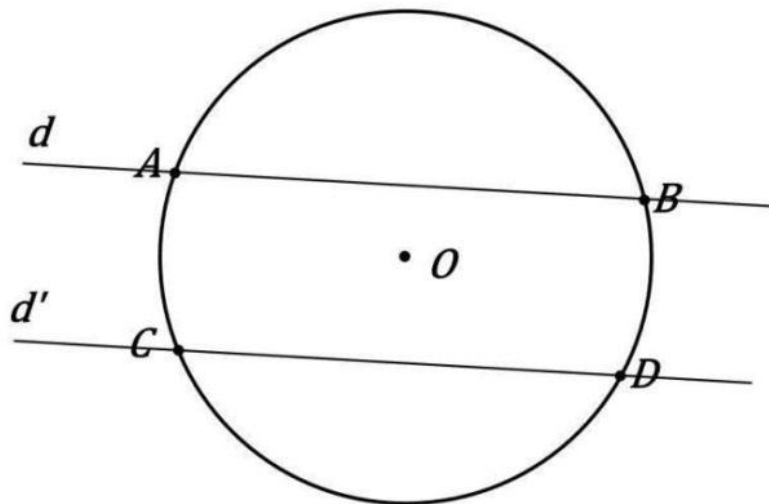


۶. ثابت کنید در دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با یکدیگر مساوی هستند.



۷. ثابت کنید اگر دو خط موازی یک دایره را قطع کنند، کمان‌های بین این دو خط با هم برابرند.

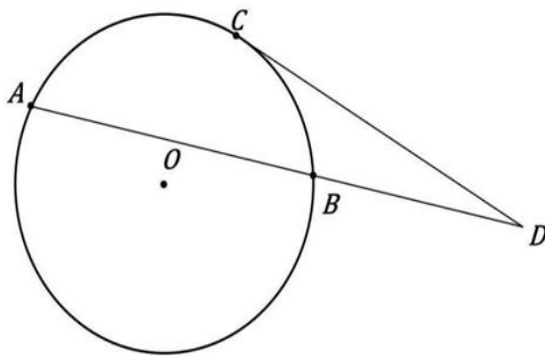
$$d \parallel d' \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$





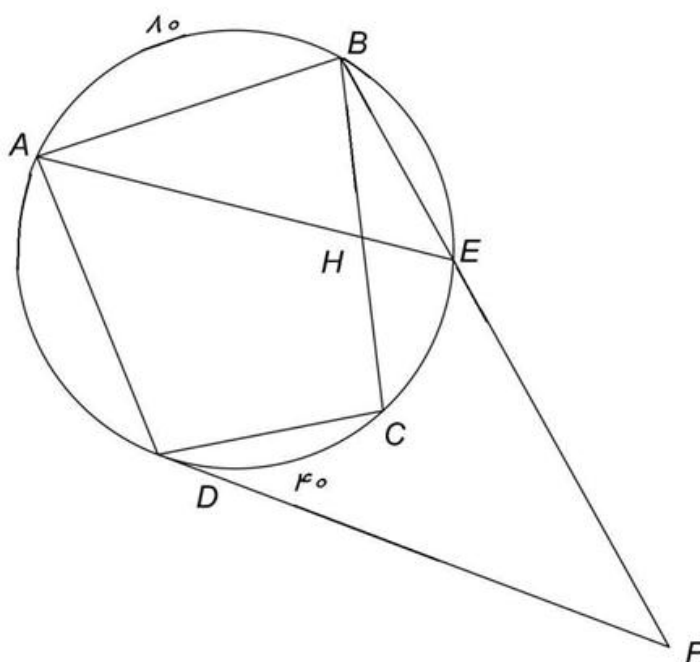
۸. در شکل زیر نشان دهید:

$$\angle D = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{2}$$



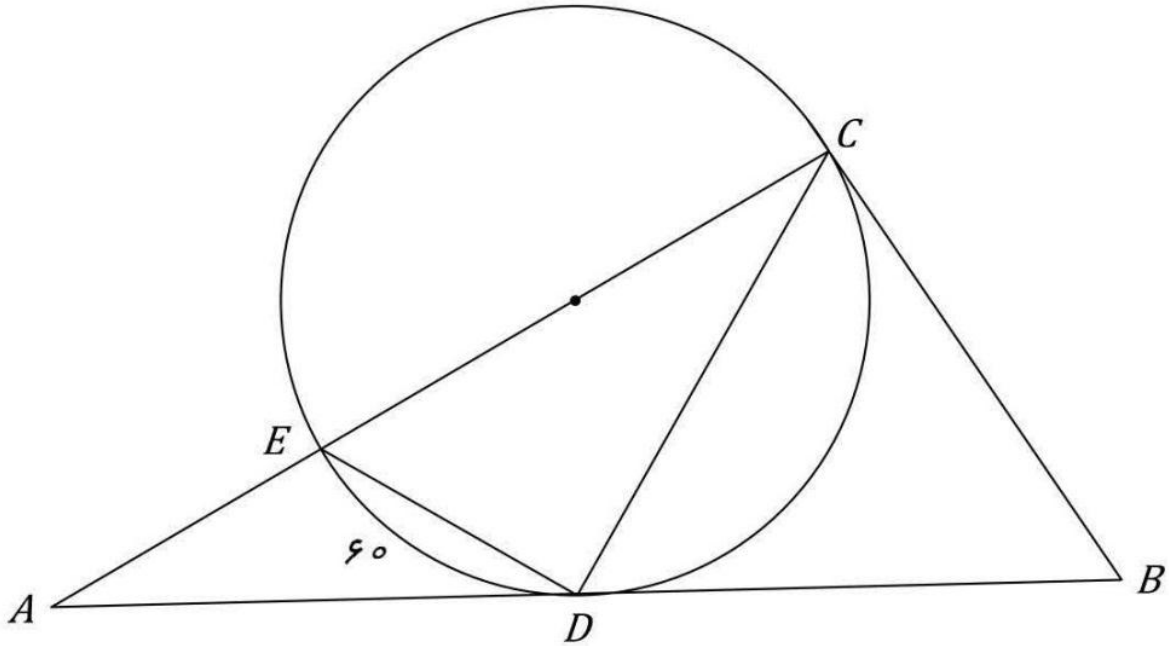
مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره

۹. در شکل زیر FD مماس بر دایره و AB موازی CD و AD موازی BF است. زوایای BAH ، BFD ، AHB ، ADF را بیابید.

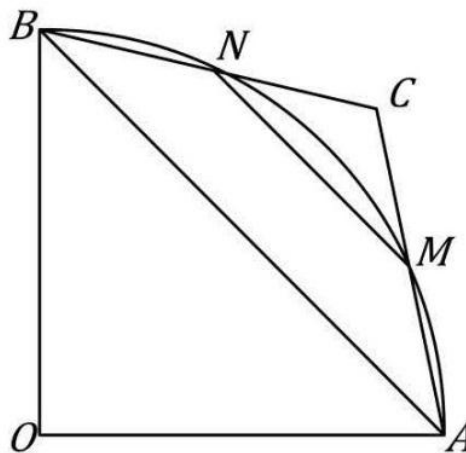




۱۰. در شکل زیر قطر EC دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. زوایای EAD ، EDC ، ECD و ABC را بیابید.



۱۱. ربع دایره ی AOB را در نظر بگیرید. دو وتر مساوی AM و BN را رسم کرده و امتداد می دهیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.

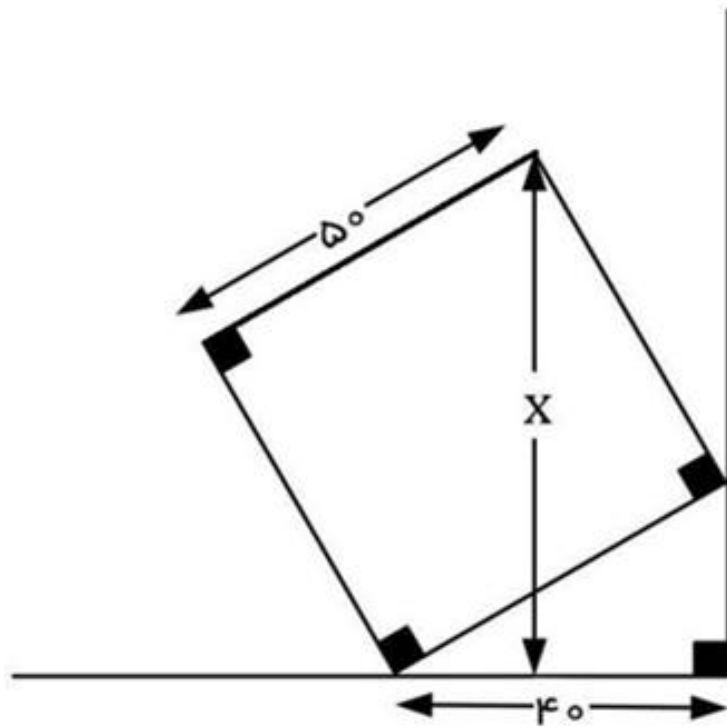




کاربردهای قضیه‌ی فیثاغورس

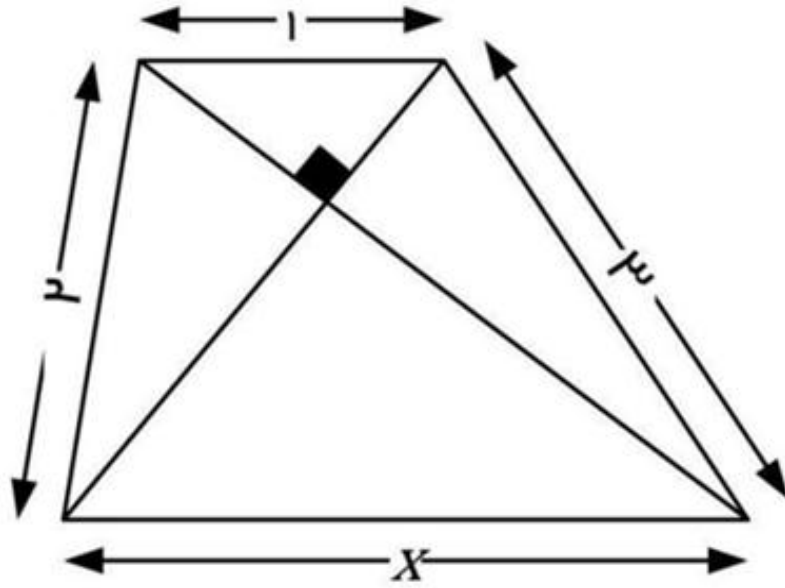
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)

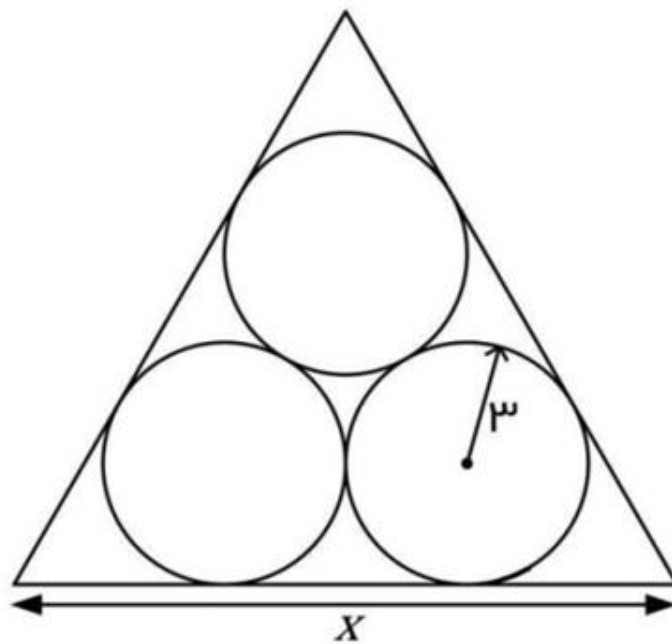




(ب)

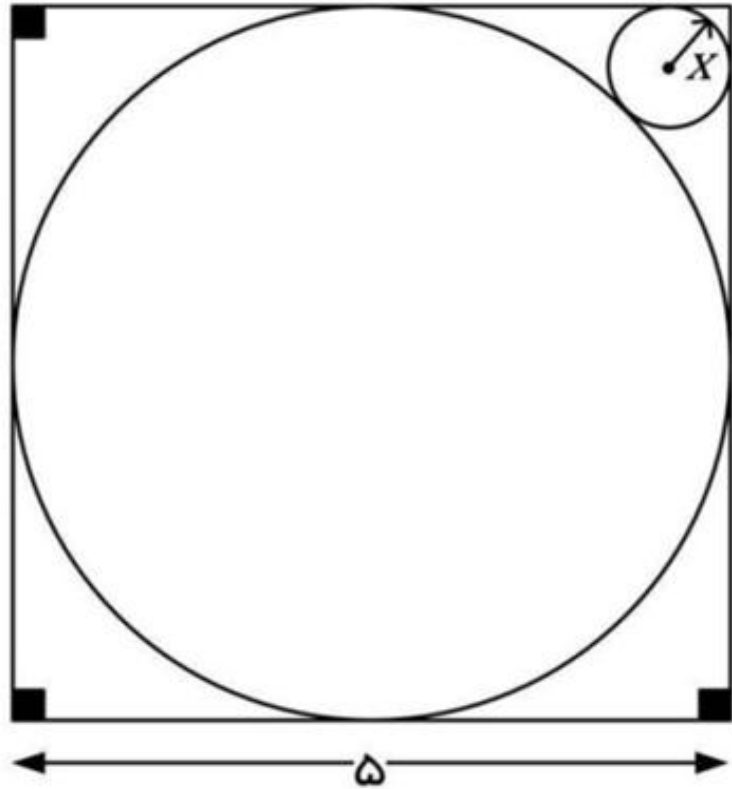


(پ)

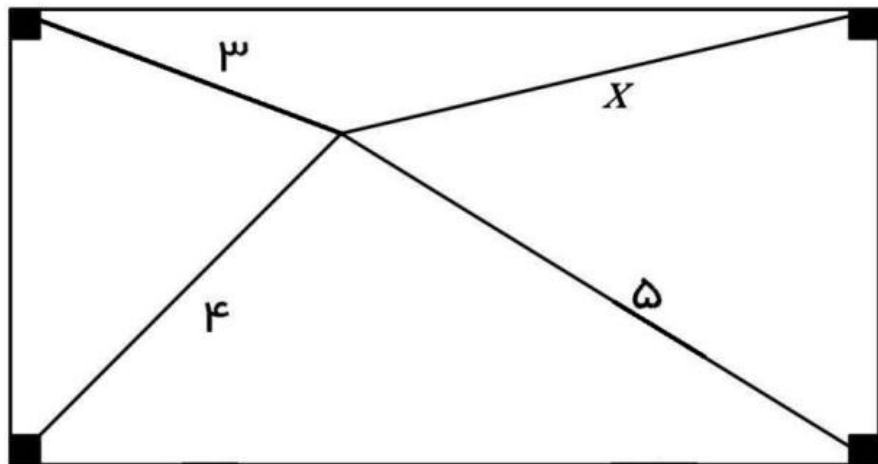




(ت)



(ث)





منابع و مراجع:

- [۱] تویاس دانتزیگ، عدد زبان علم، ترجمه‌ی عباس گرمان، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۱
- [۲] محمد بن موسی خوارزمی، جبر و مقابله، حسین خدیو جم، انتشارات اطلاعات، ۱۳۶۳
- [۳] علی قصاب، دیدار با خدامراد، پشتاز، ۱۳۸۷
- [۴] ناوم ی. ویلنکین، داستان مجموعه‌ها، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات فردوسی، ۱۳۷۷
- [۵] الکساندر پ. دوموریا، در قلمرو ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، مؤسسه جاب و انتشارات امیرکبیر، ۱۳۴۸
- [۶] واسیلی د. چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، ۱۳۷۴
- [۷] هاوارد ایوز، تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمه‌ی محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸
- [۸] هاوارد ایوز، تاریخ ریاضیات، جلد دوم، ترجمه‌ی محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۶
- [۹] علیرضا توکلی صابری، از ریاضیات خود مطمئن شوید، جلد اول، دوم و سوم
- [۱۰] خسرو داودی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷
- [۱۱] د. فومین، س. گنکین و ا. ایتنبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه‌ی ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۶
- [۱۲] جان دفت، درک مفاهیم ریاضی از طریق بازی‌های آموزشی، ترجمه‌ی حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه
- [۱۳] سرژ لانگ و جین مورو، هندسه، ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۵۷
- [۱۴] مویز و دانز، هندسه، ترجمه‌ی محمود دیانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷
- [۱۵] شه پان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۸۴
- [۱۶] سرژ لانگ، بحث ریاضی با دانش آموز، ترجمه‌ی نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۱
- [۱۷] جیمز ر. اسمارت، هندسه‌های جدید، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی پور، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۲
- [۱۸] کتاب کار و راهنمای مطالعه‌ی دانش آموز، ریاضی سال دوم، دوره‌ی راهنمایی تحصیلی، زهره پندی، نوشا حکمی، زهره دانایی کجانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۷
- [۱۹] کارل اولدرز، کسرهای مسلسل، ترجمه‌ی محمد جلوداری ممقانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰
- [۲۰] خسرو داودی، ریاضی دوم راهنمایی: بر اساس پرسش‌های آزمون بین‌المللی ریاضی و علوم، نشر شورا، ۱۳۸۲
- [۲۱] امیرحسین حمدادی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ عطار، ریاضیات پایه دوم راهنمایی، نشر سمیاد، ۱۳۸۷
- [۲۲] کارولین مک‌گیلاوی، کندوکاوی در دنیای جادویی و علمی موریس اش، ترجمه‌ی محمدرضا کشاورزی، انتشارات بهار
- [۲۳] سید حسین سید موسوی، ۳۶۵ مسئله برای ۳۶۵ روز، برگرفته از مجله‌ی شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا، نشر نی، ۱۳۷۴
- [۲۴] تونی پایاس، ریاضیات سرشار از زیبایی، ترجمه‌ی رویا فاتقی و کاظم فاتقی، ۱۳۷۷
- [۲۵] ماروین ج. گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و ناقلیدسی، ترجمه‌ی محمد هادی شفیعیه، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۳
- [۲۶] علی قصاب، لپگ ریاضی راهنمایی و دبیرستان، پشتاز.

[27] Victor Klee and Stan Wagon, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991



نگرش مرکزی در فرآیند یادگیری منجر به سمیت داده ها و آموخته ها خواهد شد. در

سایه ی احترام منطقی به برنامه های آموزش ریاضی مصوب وزارت آموزش

و پرورش، در این برنامه ی ملی ریاضی نگاری، باروندی منطقی و ساینس، برنامه -

ای ژرف نگردنیال شده است. پرورش ریاضیات در سایه ی تمرین محوری و

نه فقط مفهوم انگاری اثر بخش تر خواهد بود. فراتر از تمرین های محاسباتی و مروری،

در این برنامه ی تدریس، مسائلی گنجانده شده است که استعداد های نهفته ای را

آشکار کند. درخشان شدن به تنهایی هدف نبوده است و آن چه که ارزشمندتر

نذاشته شده، یادگیری ریاضی برای درک مفاهیم بنیادی زندگی آتی دانش آموز

است.