

ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

موشکافی مسائل کتاب درسی

مسائلی از امتحانات نهایی **آبادان** و هومه!

نویسنده: حسین ایزن www.insha.ir



I ♥ Math



ریاضی فور یازدهم (تجربی)

به سبک آبادانی

(نسخه دست نویس - بخش اول)

✓ موشکافی مسائل کتاب درسی

✓ مسائلی از امتحانات نهایی آبادان و هومه!

حسین ایزن

چون دوستان زیادی از من در مورد کتابهام سوال می کنند خدمتتون بگم که فعلا این سه کتاب از من چاپ شده که در زیر عکسشون رو ملاحظه می کنید و برای تهیه این کتابها کافیه به کتابفروشی های معتبر شهر خودتون مراجعه کنید !! چون همشون به صورت رایگان در اینترنت در دسترس همه هستن. (بگذریم که عده ای این کتابها رو به اسم خودشون به ملت می فروشن!!)



اولین کتابم انتگرال فور (جلد اول) هستش که حدود پنج سال پیش منتشر شده و در مورد انتگرال نامعین هست و بیشتر به کار دانش جوها میفوره البته دانش آموزای زرنگ و علاقمند هم چیزهای جالبی توی این کتاب پیدا می کنن. این کتاب علاوه بر ایران در افغانستان هم طرفدارای زیادی داره!

روشای عدم موفقیت در کنکور!

حسین ایزن



روشای عدم موفقیت در کنکور اسم دومین کتاب من هست که چند ماهیه منتشر شده و البته به معروفیت انتگرال فور نیست. این کتاب در اصل برای دانش آموزای دبیرستانی که قصد شرکت در کنکور سراسری رو دارن نوشته شده و حاصل تجربیات من در زمینه کنکور هست. این کتاب به زبان طنز نوشته شده و میتونه واسه دانش جوهایی که میفوان کنکور ارشد بدن و کلا واسه کسانی که دنبال شیوه های مناسب مطالعه هستن مفید باشه.

		<p>و اما سومین کتاب من اسمش دنباله فور هست این کتاب در مورد دنباله های حسابی و هندسی صحبت می کنه و برای دانش آموزای دبیرستانی و داوطلبان کنکور نوشته شده.</p>
---	--	---

اولین فصل از کتاب ریاضی یازدهم تقریباً شامل سه درس هستند که درسی اول به هندسه تعلیلی، درسی دوم به معادلات درجه دوم و سهی و درسی سوم به معادلات گویا و کسرها اختصاص داده و به نظر من مهمترین و در عین حال سوال خیزترین فصل کتاب هست پس خوب حواسون رو جمع کنید که این فصل رو با هم بترکونیم! پس بریم سراغ درسی اول.

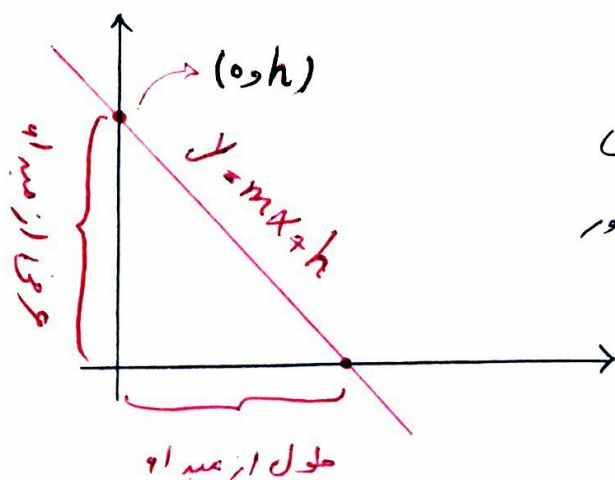
درس اول: هندسه تعلیلی

مبحث هندسه تعلیلی در واقع دنباله همون مباحث مربوط به معادله خط هست که در فصل سوم سال نهم خوندید (البته بعضی‌های آبدان اینها رو نوی دبستان می‌خوانن!)

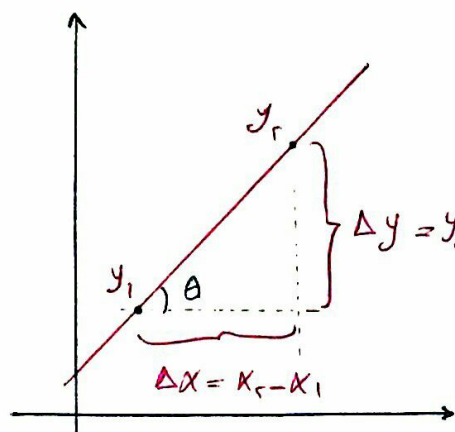
یا بدون هست که صورت کلی معادله خط به شکل $ax + by = c$ هست که البته ما ترجیح می‌دیم که اون رو به صورت $y = mx + h$ بنویسیم که در این حالت m شیب خط و h عرض از مبدا خط می‌باش.

یادآوری:

عرض محل برخورد خط به محور y ها را عرض از مبدا h و طول محل برخورد خط با محور x ها رو طول از مبدا a می‌نامیم.



از طریقی شیب خط رو به صورت نسبت جابه جایی عمودی به جابه جایی افقی خط به صورت زیر تعریف کردیم :



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

شیب خط در واقع تانژانت زاویه ای هست که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد. (تکلید که تعریف تانژانت یادتون رفته ! ...)

$$\tan \theta = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

خب بریم به مثال دست گرمی باهم حل کنیم.

مثال : شیب و عرض از مبدا خطوط زیر را بدست آورید.

الف) $2y + x = 3$

خواستون باشه که برای بدست آوردن شیب و عرض از مبدا خط باید معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ بنویسیم.

$$2y + x = 3 \Rightarrow 2y = -x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

که در این حالت ضریب x میشه m یا شیب خط و عدد ثابت میشه عرض از مبدا.

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \quad h = \frac{3}{2}$$

البته اگر $x=0$ رو در معادله قرار بدیم مقدار عرض از مبدا مستقیماً درمیاد (برای)

$$x=0 \Rightarrow 2y + 0 = 3 \Rightarrow y = h = \frac{3}{2}$$

ب) $\frac{x-2}{3} + \Delta y = 0$

$\Rightarrow \Delta y = -\frac{x-2}{3} = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \stackrel{\Delta}{\Rightarrow} y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

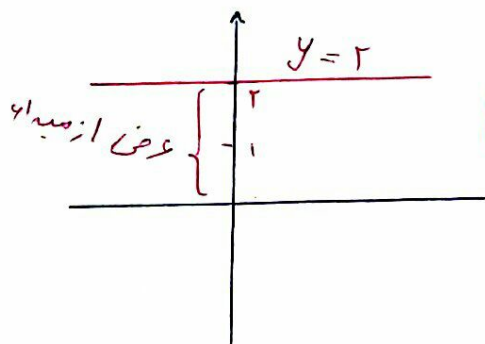
$m = -\frac{1}{3}$ شیب خط $h = \frac{2}{3}$ عرض از مبدا

ج) $y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x \quad m = 2 \quad h = 0$

یادآوری: $y = mx$ صورت کلی خط‌های هست که از مبدا مختصات می‌گذرند و عرض از مبدا آنها صفر است.

د) $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \quad m = 0 \quad h = 3$

یادآوری: $y = k$ صورت کلی خطوط افقی است که شیب آنها برابر صفر است.
مثلاً



$m = 0 \quad h = 3$

آقا اجازه: از کجا فهمیدیم شیب خط صفر است؟

استاد: کاری نداره بچه! دو نقطه دلخواه روی خط در نظر بگیر و شیب رو حساب کن فقط خواست باشه که توی خط بالا ۲ تمام نقاط برابر

۲ هست.

$A(1, 2) \text{ و } B(3, 2) \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-2}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$

اینطوری هم می‌توان گفت که $y = 2$ در واقع بوده $y = (0)x + 2$ یعنی شیب ۰ که شیب خط هست صفر بوده و اسمش همینه (اصلاً ننویسیم).

همانطور که می‌دانیم برای رسم خط به مختصات دو نقطه از خط نیاز داریم. به همین صورت برای نوشتن معادله خط هم مختصات دو نقطه از خط مورد نیاز است. به طور کلی معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

که عبارت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ همون شیب خط هست. بنابراین می‌تونیم معادله خط رو به صورت شیب‌دار زیر بنویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

دقت کنید در بسیاری از مسائل به جای مختصات دو نقطه، مختصات یک نقطه و شیب خط به ما داده می‌شه که در واقع کار ما رو ساده کردن که می‌تونیم مستقیماً از معادله بالا استفاده کنیم.

توجه: دقت کنید که توی دو تا فرمول بالا x و y رو با آبی و بقیه پارامترها رو با قرمز نوشتیم. دلیل این کار این هست که حواسمون باشه که x_1 و y_1 و x_2 و y_2 اعدادی هستن که باید از مسئله در معادله خط جایگزین کنیم اما x و y به همین صورت باقی می‌مونن. حالا بریم به مثال دست‌گرمی با هم حل کنیم.

مثال: معادله خطوط زیر را بنویسید.

الف) خطی که از دو نقطه $(2, 0)$ و $(3, 2)$ می‌گذرد.
 x_1, y_1 x_2, y_2

اول شیب خط رو بدست میاریم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

حالا با خیال راحت معادله خط رو می‌نویسیم!

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4$$

ب) خطی که از نقطه $(0, 2)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $\frac{3}{2}$ باشد.

خب اینجا کار ما راحت‌تره!

$$m = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2$$

یک روشی دیده برای نوشتن معادله خط استفاده از فرم $y = mx + b$ می‌باشد.

این روشی به خصوص زمانی که یکی از نقاط داده شده عرض از مبدا خط باشد مفید است.

* خواستون باشه که عرض از مبدا خط به صورت $(h, 0)$ داده شده یعنی

نقطه‌ای که طولش صفر باشه عرض اول نقطه می‌شه عرض از مبدا

مثال: معادله خطوط خواسته شده را با استفاده از فرمول $y = mx + h$ بنویسید.

الف) معادله خطی که از دو نقطه $A(0, 7)$ و $B(3, 1)$ بگذرد.
عرض از مبدا h

چون خط خواسته شده از دو نقطه A و B می‌گذرد بنابراین معتمات این دو نقطه در معادله خط صدق می‌کنند.

بنابراین معادله خط رو به صورت $y = mx + h$ فرض می‌کنیم و معتمات A و B را در خط جایگذاری می‌کنیم.

$$A(0, 7) \Rightarrow 7 = m(0) + h \Rightarrow h = 7 \quad \left[\text{عرض از مبدا } h \right]$$

$$B(3, 1) \Rightarrow 1 = m(3) + 7 \Rightarrow 1 = 3m + 7$$

$$3m = -4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 7 \quad \left[\text{معادله خط} \right]$$

ب) معادله خطی که از دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(3, 2)$ بگذرد.

$$A(2, 0) \Rightarrow 0 = m(2) + h \Rightarrow 2m + h = 0 \quad (1)$$

$$B(3, 2) \Rightarrow 2 = m(3) + h \Rightarrow 3m + h = 2 \quad (2)$$

روابط (1) و (2) تشکیل یک دستگاه 2 معادله دو مجهول را می‌دهند که با حل آن مقادیر m و h بدست می‌آید.

$$\begin{cases} 2m + h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times (-1)} \begin{cases} -2m - h = 0 \\ 3m + h = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} \begin{cases} -2m - h = 0 \\ 3m - 2m = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 2$$

$$3m + h = 2 \Rightarrow 3(2) + h = 2 \Rightarrow h = -4$$

$$\Rightarrow y = 2x - 4 \quad \left[\text{معادله خط} \right]$$

در مثال هم یاد گرفتیم که شرط موازی بودن دو خط این است که شیب آنها برابر باشد

مثلاً شیب دو خط $y + 2x = 1$ و $2y = 3 - 4x$ با هم برابر است پس این دو خط با

هم موازی هستند. (یک حالت خاص از خطوط موازی زمانی هست که دو خط برهم منطبق

باشند که بعداً در موردش صحبت می‌کنیم)

به همین صورت می‌توان داد که شرط عمود بودن دو خط این است که حاصل ضرب

شیب‌های آنها برابر -1 باشد. مثلاً دو خط زیر برهم عمودند.

$$L_1: y + 2x = 3 \quad L_2: 2y = x - 5$$

$$y + 2x = 3 \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow m_1 = -2$$

$$2y = x - 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow L_1 \perp L_2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{خط } L_1 \text{ بر } L_2 \text{ عمود است} \end{array} \right\}$$

به عبارت دیگر:

ی
دو خط غیر موازی با محورهای مختصات برهم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب‌ها
آنها برابر (-1) باشد یعنی $m \cdot m' = -1$ به عبارت دیگر شیب هر کدام عکس
قوبه شیب دیگری باشد.

مثال: در هر قسمت مشخص کنید که خطوط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی دارند.

الف) $L: y = 5x - 2$

$$\hookrightarrow m = 5$$

d: $y = -\frac{1}{5}x + 2$

$$\hookrightarrow m' = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow m \cdot m' = 5 \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \quad L \perp d \quad \left. \begin{array}{l} \text{خط } L \text{ بر خط } d \text{ عمود است} \end{array} \right\}$$

۸

ب) $L: 2x - 3y + 3 = 0$

$d: 2x + 2y = 0$

$3y = 2x + 3$

$\hookrightarrow 2y = -2x$

$y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow m \cdot m' = -1 \Rightarrow L \perp d$ دو خط برهم عمودند.

ج) $L: y = \frac{1}{2}x + 7$

$d: x - 2y = 1$

$m = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow 2y = x - 1$

$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow m' = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m = m' \Rightarrow$ دو خط باهم موازی هستند.

مثال: نشان دهید دو خط زیر متقاطع هستند پس مختصات نقاط تقاطع دو خط را بیابید.

$L: y + 2x = 1$

$d: y = x + 3$

$\hookrightarrow m = -2$

$\hookrightarrow m' = 1$

چون دو خط موازی نیستند پس متقاطع هستند (یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند)

که برای پیدا کردن نقطه تقاطع کافیست معادله دو خط را در یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بنویسیم و x و y را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y + 2x = 1 \\ y - x = 3 \end{cases} \xrightarrow{x(-1)} \begin{cases} y + 2x = 1 \\ -y + x = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} \begin{cases} y + 2x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

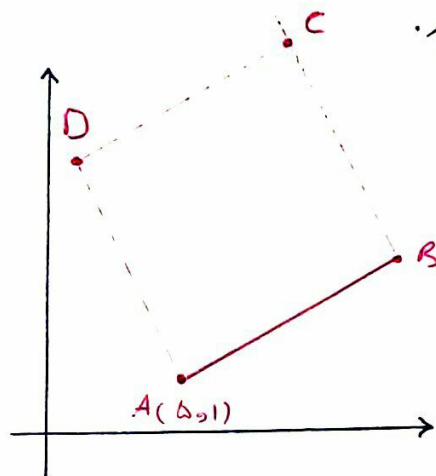
$\Rightarrow y = 3 + x = 3 - 2 = 1$

پس دو خط یکدیگر را در نقطه $(-2, 1)$ قطع می‌کنند.

به مثال ساده ولی خیلی مهم از کتاب درسی

مثال: مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رئی معادله آن هستند

الف) شیب خط AB را بیابید و معادله آن را بنویسید.



خب این قسمت که خیلی ساده است

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{10 - 5} = \frac{3}{5}$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{3}{5}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - 2$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را هم بنویسید.

خب اینجا به کوچولو دقت می‌خواد!

چون $ABCD$ مربع هست پس ضلع AD بر AB عمود هست بنابراین داریم:

$$m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$$

بنابراین با داشتن شیب خط AD و یک نقطه از آن (نقطه A) می‌تونیم معادله خط AD را بنویسیم:

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}(x - 5) \Rightarrow y - 1 = -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{26}{3}$$

پ) اگر به اینتر نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است معتمات راس D را بیابید.

اینجا هم به خورده دقت لازمه!

نقطه D در واقع نقطه تقاطع خطوط CD و AD هست بنابراین کافیست معادله خط CD رو بدست بیاریم (معادله خط AD رو هم که در قسمت قبل بدست آوردیم) و بعد با تشکیل یک دستگاه 2 معادله 2 مجهول نقطه تقاطع D را بدست بیاریم.

پس بریم سراغ نوشتن معادله خط CD :

چون ضلع CD موازی AB هست بنابراین

$$m_{CD} = m_{AB} = \frac{3}{5}$$

الکون با داشتن شیب خط CD و معتمات نقطه C می‌تونیم معادله خط CD رو بنویسیم:

$$y - y_c = m_{CD} (x - x_c) \Rightarrow y - 9 = \frac{3}{5} (x - 7)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5}$$

حالا معادله خطوط CD و AD را در یک دستگاه می‌نویسیم تا نقطه تقاطع دو خط یعنی نقطه D در بیاریم:

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{21}{3} \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} \end{cases} \times (-1) \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + \frac{21}{3} \\ -y = -\frac{3}{5}x - \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x + \frac{21}{3} - \frac{24}{5} \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 4$$

$$\Rightarrow D(2, 4)$$

دقت کنید در این مسئله بدون داشتن مفتحات نقطه C هم می‌توانید
مسئله رو حل کنید البته حل مسئله یکم مشکل تر می‌شه (البته نه برای بچه‌هاش با دان!)
که بعداً بهش اشاره می‌کنیم.

فلاً بریم سراغ به مسئله دست بزنیم دیکه

مثال: نشان دهید که خطوط L_1 و L_2 و L_3 از یک نقطه می‌گذرنه.

$$L_1: 2y - x = 8 \quad L_2: y = 3x - 1 \quad L_3: 2x + y - 9 = 0$$

حل: این مسئله ظاهری نیست میزنه ولی چیزی نداره!
برای اینکه نتونیم به سه خط از یک نقطه می‌گذرنه کاغذ اول
نقطه تقاطع دوتا از خط‌ها رو بدست بیاریم بعد نتونیم به سه خط
خط سوم هم از این نقطه می‌گذرنه.

پس اول نقطه تقاطع خطوط L_1 و L_2 رو بدست میاریم:

$$\begin{cases} 2y - x = 8 \\ y - 3x = -1 \end{cases} \times (-2) \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ -2y + 4x = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ -2y + 4x = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 8 \\ 3x = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - 2 = 8 \\ 3x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 10 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{محل تقاطع خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ } O\left(\frac{10}{3}, 5\right)$$

حالا کافیست مفتحات نقطه O را در خط L_3 قرار بدیم و نتونیم به سه خط
روی L_3 قرار داره.

$$\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 9 - 9 = 0 \Rightarrow 2(2) + 5 - 9 = 0 \Rightarrow L_3 \rightarrow 0$$

چون مفتحات O در L_3 صدق می‌کنه پس L_3 هم از O می‌گذرنه به عبارت
دیگه هر سه خط L_1 و L_2 و L_3 از نقطه O می‌گذرنه.

* براسر جواب تمرین‌ها به کانال تلگرام ریاضی‌خور @riazikhor مراجعه کنید

① معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x+y-3=0$ و $2x-y+5=0$

عبور کرده و برخط $\frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$ عمود باشد.

⑤ نقاط $A(2,3)$ و $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس از یک مستطیل هستند

مقتضات رأس چهارم مستطیل را بیابید.

③ مقدار m را چنان بیابید که سه خط $x-y=3$ و $2x+y=0$ و

$5 = (m+1)x + y$ از یک نقطه بگذرند.

④ اگر نقاط $A(4,2)$ و $B(1,4)$ و $C(9,8)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند

رأس چهارم را بیابید.

⑤ در مثل ABC اگر $M(2,0)$ وسط ضلع BC باشد نشان دهید مثل

ABC متساوی‌الساقین است.

⑥ نقاط تقاطع خطوط داده شده را بیابید و آن را روی دستگاه مختصات رسم

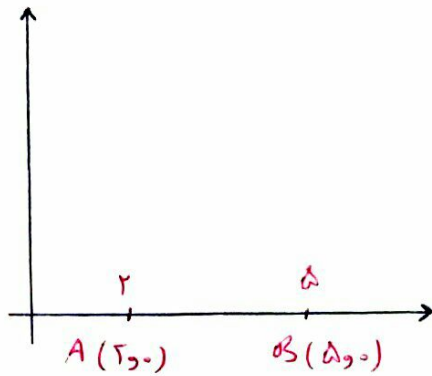
کنید. شکل حاصل چه شکلی است؟

$$L_1: 2x+y=3 \quad L_2: y=\frac{2x-2}{5} \quad L_3: 2y=5-4x$$

$$L_4: 10y-1=4x$$

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.

دو نقطه $A(2,0)$ و $B(5,0)$ را روی محور x ها در نظر بگیرید اگر بخوایم فاصله بین این دو نقطه را حساب کنیم چون عرضی دو نقطه برابر است خیلی راحت می توانیم طول دو نقطه را از هم کم کنیم.



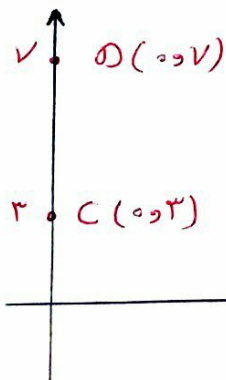
$$AB = x_B - x_A = 5 - 2 = 3$$

چون فاصله بین دو نقطه همیشه مثبت در نظر گرفته می شود ما عبارت $x_B - x_A$ را

داخل قدر مطلق می زاریم تا جواب همیشه مثبت بشود:

$$AB = |x_B - x_A|$$

به همین صورت اگر دو نقطه هم عرضی مثل $C(0,3)$ و $D(0,7)$ داشته باشیم فاصله CD از رابطه زیر بدست می آید:

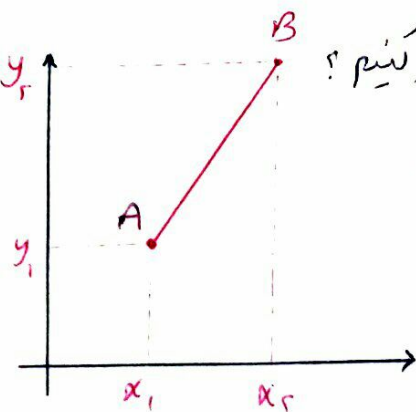


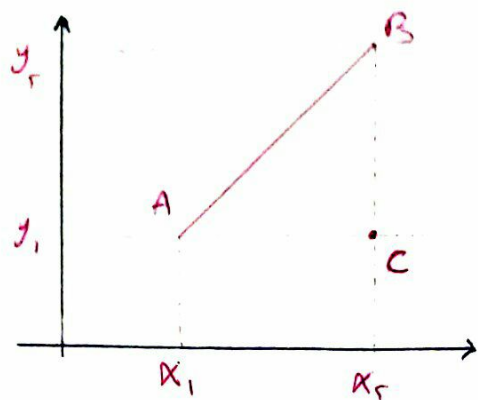
$$CD = |y_D - y_C| = |7 - 3| = 4$$

دقت کنید چون از علامت قدر مطلق استفاده

می کنیم وقتی نمی گوییم بنویسیم $|y_D - y_C|$ یا $|y_C - y_D|$

حالا اگر طول دو نقطه یا عرضی دو نقطه یکسان نبود باید چه کار کنیم؟
مثلاً به شکل زیر دقت کنید وقتی می خواهیم فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را بدست بیاوریم اگر از A خط افقی و از B خط عمودی رسم کنیم تا مماسات قائم الزامیه ABC تشکیل بشود اونوقت داریم:





او نوشت و اصفه که مختصات نقطه C
به صورت $C(x_C, y_C)$ هست بنابراین
فاصله‌ها را AC و BC به صورت زیر می‌نویسند

$$AC = |x_C - x_A| = |x_C - x_A|$$

$$BC = |y_B - y_C| = |y_B - y_A|$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورث داریم :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = |x_C - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

چون $(x_C - x_A)$ و $(y_B - y_A)$ به توان ۲ رسیده بنابراین حتماً مثبت هستند
و نیازی به نوشتن قدر مطلق نیست و می‌توانیم بنویسیم

$$AB^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

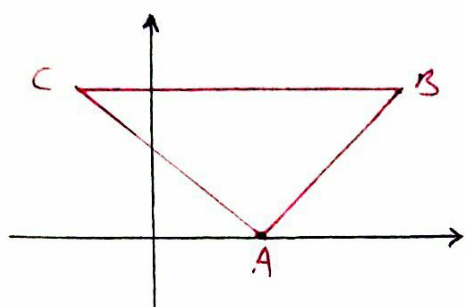
که البته بهتره به صورت زیر بنویسیم :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

رابطه بالا به رابطه مهم و کاربردی در هندسه تحلیلی هست. فقط حواستون
باشه موقع تفریق کردن و جایگذاری اعداد در رابطه بالا یه تریه!

مثال : نقاط $A(2,0)$ ، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی



دستگاه معورها را مقیاسات نشان دهید.

الف) محیط مثلث ABC را با معادله طول اضلاع آن بدست آورید.

خب این قسمت خیلی آسونه کافیه طول تک تک اضلاع مثلث رو بدست بیاریم و با هم جمع کنیم

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب) ABC چه نوع مثلثی است ؟

اینجا یکم دقت لازمه. وقتی از شما نوع مثلث رو می پرسن ۴ حالت پیش میاد

- ① اگر سه ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الاضلاع هست.
- ② اگر فقط دو ضلع مثلث با هم برابر باشه مثلث متساوی الساقین هست.
- ③ اگر رابطه فیثاغورث در مثلث برقرار باشه مثلث قائم الزاویه هست.
- ④ اگر هر دو حالت ۲ و ۳ برقرار باشه مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین هست.

چون در اینجا $AB = AC$ پس مثلث ABC متساوی الساقین هست

و یوں داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta^2 + \Delta^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow 2\Delta + 2\Delta = 28(2) \Rightarrow 50 = \Delta \quad \checkmark$$

پس رابطه فیثاغورث برقرار هست و مثلث ABC قائم الزاویه هم می باشد.

پ (ب) به دوروشی نشان دهیم مثلث ABC قائم الزاویه است پس صاحت

آن را حساب کنیم.

یک روشی برای تشخیص مثلث قائم الزاویه استفاده از قضیه فیثاغورث هست که در قسمت قبل بهش اشاره کردیم.

اما روشی دوم برای این کار این هست که نتوانیم دو ضلع AB و AC برهم

عمودند یا برای شیب این دو خط رو مقایسه می کنیم.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{5 - 2} = \frac{4}{3} \quad \left. \begin{array}{l} \text{شیب خط } AB \end{array} \right\}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3 - 0}{-1 - 2} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{شیب خط } AC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = \left(\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

$\Rightarrow AB \perp AC$ دو خط AB و AC برهم عمود هستند پس زاویه A قائم است.

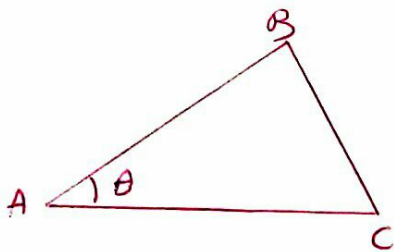
روش اول : چون اضلاع AB و AC برهم عمود هستند می توانیم بنویسیم :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (\text{قاعده}) (\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2} (AB) (AC) = \frac{1}{2} (5)(5) = \frac{25}{2}$$

روش دوم :

در سال قبل یاد گرفتیم که مساحت مثلث رو می‌توان از رابطه زیر هم

حساب کرد.



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \theta$$

در اینجا چون مثلث ABC قائم الزامی متساوی الساقین هست پس $\hat{ABC} = 45^\circ$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} (AB) (BC) \sin \hat{ABC} = \frac{1}{2} (5)(5\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{25}{2}$$

* یک حالت خاص فاصله بین دو نقطه زمانی هست که بتوانیم فاصله یک نقطه از مبدأ $O(0,0)$ رو بدست بیاریم که در این حالت فرمول فاصله دو نقطه به صورت زیر ساده می‌شه

$$OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

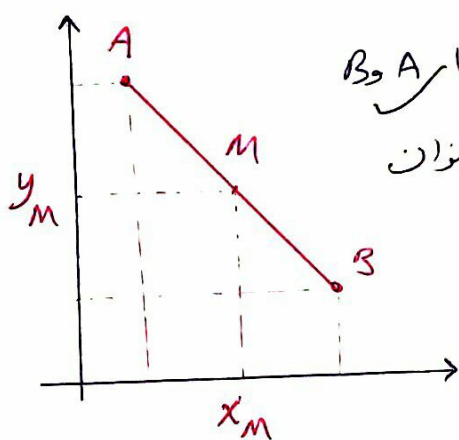
مثال : دایره ای به مرکز مبدأ مختصات از نقطه $N(-4, 8)$ که شش است شعاع دایره را بیابید

شعاع دایره همون فاصله ON هست

$$ON = R = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = 10$$

با روشی مشابه قسمت قبل (در نظر گرفتن حالت افقی، حالت عمودی و در نهایت حالت کلی) می‌توانیم نتوان بدیم که اگر M وسط پاره خط AB باشد مختصات این نقطه برابر است با

$$\left[\begin{array}{l} x_m = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_m = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right]$$



به بیان ساده تر طول نقطه M میانه میانگین طول‌های A و B و عرض نقطه M میانه میانگین عرض‌های A و B به عنوان مثال اگر مختصات A برابر $(2, 5)$ و مختصات B برابر $(4, 3)$ باشد مختصات M می‌شود

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

پس $M(3, 1)$ وسط پاره خط AB است.

نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

آقا اجازه : این که خیلی آسونه!

استاد : حالا سیر بره سیر! همیشه هم این قدر آبی نیست

به قول بچه‌ها : ShooVey, shooVey

مسئله: مثلث ABC با رئوس $A(1,9)$ ، $B(3,1)$ و $C(7,11)$ را در نظر بگیرید.

و آنها را در دستگاه مختصات رسم کنید.

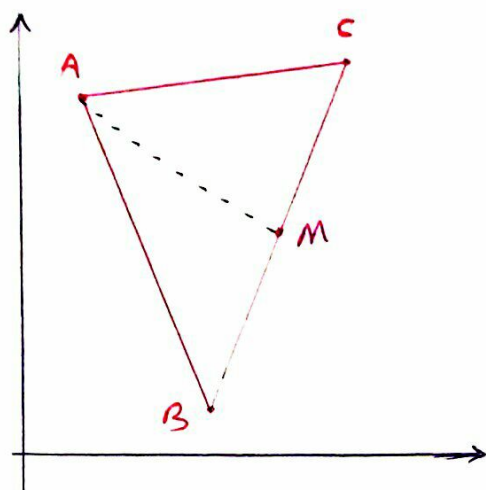
الف) مختصات M وسط ضلع BC را مشخص کنید.

این که خیلی راحت.

$$x_m = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$y_m = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+11}{2} = 6$$

$$\rightarrow M(5,6)$$



ب) طول میانه AM را حساب کنید.

توجه: میانه خطی است که یک رأس مثلث رو به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند.

$$AM = \sqrt{(x_m - x_A)^2 + (y_m - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = 5$$

ج) معادله میانه AM را بدست آورید.

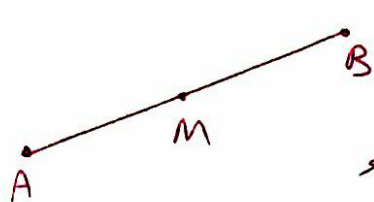
اول شیب خط AM رو بدست میاریم.

$$m_{AM} = \frac{y_m - y_A}{x_m - x_A} = \frac{6-9}{5-1} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow 4y + 3x = 39$$

مثال: نقطه M به مختصات $M(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, 2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.



اینجا بایم توجه لازمه:

در این مسئله مختصات وسط پاره خط داده شده و مختصات یکی از دوسر پاره خط را می‌توانیم

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow x_A = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{y_A + 2}{2} \Rightarrow y_A = -6$$

$$\Rightarrow A(3, -6)$$

ب) قرینه نقطه $A(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را بدست آورید.
این تمرین در عین سادگی خیلی مهمه! خوب توجه کنید!

اگر قرینه نقطه A نسبت به M رو B بنامیم M میانه وسط AB به همی‌راحتی!

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 6$$

$$\Rightarrow B(-3, 6)$$

* به شکل جالب تر این مسئله زمانی هست که بخوایم قرینه یک نقطه نسبت به یک خط رو پیدا کنیم که بعداً راجع بهش صحبت می‌کنیم.

مثال: دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید

الف) فاصله مبدا مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید

خب اول وسط پاره خط AB رو پیدا می کنیم

$$\left[\begin{aligned} x_m &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} = 12 \\ y_m &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 - 13}{2} = -5 \end{aligned} \right]$$

$$M(12, -5) \quad \text{مختصات وسط } AB$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{149} = 13$$

فاصله مبدا مختصات
تا نقطه M

ب) معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید

این قسمت خیلی خیلی مهمه! دقت کنید که عمود منصف AB یعنی خطی که بر

AB عمود هست (پس شیب اون قرینه معکوسی شیب AB میشه) و در ضمن پاره

خط AB رو نصف می کنه (پس از نقطه M وسط AB می گذره)

علاوه بر این هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله هست

خب اول از همه شیب AB رو بدست میاریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-13 - 3}{10 - 14} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{4} \quad \text{شیب عمود منصف } AB$$

حالا معادله عمود منصف رو با داشتن شیب و مختصات یک نقطه (نقطه M) می نویسیم:

$$y - y_m = m'(x - x_m) \Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\Rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{4y + x + 8 = 0} \quad \text{معادله عمود منصف } AB$$

جواب تمرین‌ها در کمال تقدیرم ریاضی خور riazikhor (a)

① دو استیای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ هستند

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد چرا؟

② نشان دهید مثلث با رئوس $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

③ فاصله دو خط موازی $3x + 4y = 1$ و $3x + 4y = 14$ را بیابید

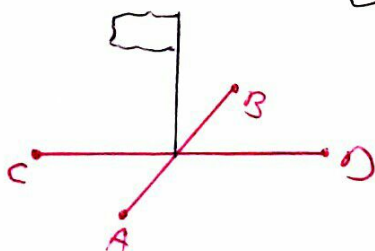
④ نقاط A و B به ترتیب روی خطوط $2y - x = 3$ و $y = x + 1$ قرار دارند اگر مختصات نقطه M وسط A و B به صورت $(\frac{A}{4}, 1)$ باشد مختصات نقاط A و B را بیابید.

⑤ نقاط $A(2, 3)$ و $B(-1, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأسی از یک مستطیل هستند یا داشتن این مطلب که در هر مستطیل قطرهای منصف یکدیگر هستند مختصات رئوس چهارم مستطیل را بیابید.

⑥ یک میله به حجم بزرگ مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین

مکمل شده است. به طوریکه فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه ⑤ را بدست

آورید. $A(-3, -2)$ $B(5, 2)$ $C(0, 1)$



✓ اگر مفتحات وسط‌های اضلاع مثلثی نقاط $(۱۰۲-)$ ، (۵۲) و $(۳-۲)$ باشد. مفتحات رئوس مثلث را به دست آورید.

۱) اگر مفتحات رئوس مثلث ABC به صورت $A(۲۰۱-)$ و $B(۲۰۴)$ و $C(۲-۴)$ باشد نشان دهید خطی که وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند موازی BC بوده و طول آن نصف طول BC است. آیا این مسئله در مورد بقیه اضلاع مثلث هم صادق است؟

۹) نشان دهید دو خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ و $y = 2x + 1$ با هم زاویه ۴۵° می‌سازند

۱۰) اگر نقطه (۲۰۴) یکی از دو سر قطره دایره و $(۱۰۴-)$ مرکز دایره باشد

الف) مفتحات انتهایی دایره این قطر را بیابید

ب) اگر دو سر قطره دایره در قسمت قبل را AB بنامیم

مفتحات دو سر قطره را بیابید که بر قطر AB عمود باشد.

توجه: برای حل مسائل بالا تنها از مطالب گفته شده تا این قسمت استفاده کنید.