

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

نمونه‌ی آزمون‌های ریاضی عمومی ۲

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۸۱-۸۰ مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه

۱. تابع $f(x, y) = xe^y$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.

ب) اکسترممهای f را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$$

۲. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x, y که در معادله‌ی $f(cx - az, cy - bz) = 0$ صدق می‌کند (اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$$

۳. فرض کنید T ناحیه‌ی محصور به استوانه‌های $x^2 + y^2 - 2y = 0$ ، $x^2 + y^2 - 4y = 0$ و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) حجم ناحیه‌ی T .

ب) $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ که S رویه‌ی بسته‌ی محصورکننده‌ی T است و \mathbf{n} یکه‌ی نرمال قائم S روبه خارج

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [x + \sin(yz)]\mathbf{i} + [y + e^{xz}]\mathbf{j} + [z + \sin(xy)]\mathbf{k}$$

۴. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی‌گون $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه‌ی $z + 2y = 1$ باشد که جهت حرکت روی آن از طرف مثبت محور z عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. مطلوب است

محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ با فرض

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

۵. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\iint_D v \cos\left(\frac{u}{v}\right) dA$ که D ناحیه‌ی محدود به خطوط $v = u$ و $v = -u$ و $v = 1$ می‌باشد.

ب) $\iint_S (1 - z) \cos\left(\frac{x - y}{x + y}\right) d\sigma$ که S بخشی از صفحه‌ی $x + y + z = 1$ است که در یک هشتم

اول فضا قرار دارد. ((موفق باشید))

۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & y \neq 0 \\ 2x & y = 0 \end{cases}$$

الف) برای بردار یکه‌ی $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ، مشتق سویی $D_u f(0, 0)$ را محاسبه کنید.
(توجه کنید که تابع f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست)

ب) تمام سوهای $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ را بیابید که در تساوی $D_u f(0, 0) = 1$ صدق می‌کنند.

۲. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع با تعریف $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2$ باشد.

الف) اکسترم‌های مطلق تابع f روی ناحیه‌ی $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ را بیابید.

ب) نشان دهید $\iint_D |f(x, y)| dA \leq 4\pi$.

۳. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود به داخل سهمیگون $z = x^2 + y^2$ و خارج از مخروط $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ باشد.

الف) ناحیه‌ی T را بر حسب مختصات استوانه‌ای و کروی مشخص کنید.

ب) حجم T را محاسبه کنید.

۴. فرض کنید C منحنی رسم شده در شکل زیر باشد. مطلوب است

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + 4y^2}$$

۵. فرض کنید S بخشی از سطح بیضیگون $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 5$ باشد که در ناحیه‌ی $z \geq 1$ قرار دارد و \vec{n} قایم یکه‌ی بالایی بر سطح S باشد و $\vec{F}(x, y, z) = 2xyz\vec{i} + (z - y^2z)\vec{j} + z^2\vec{k}$. مطلوب است

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

تنها به یکی از دو سوال ۶ و ۶' پاسخ دهید!

۶. فرض کنید D ناحیه‌ی محدود بین منحنی‌های $xy = \pi$ و $x = 1$ و $y = 0$ و $x = 2$ باشد. مطلوب است

$$\iint_D x |\cos(xy)| dA$$

۶'. فرض کنید $0 < b < d \leq a$ و $0 \leq c < d \leq a$ و A مساحت بخشی از سطح کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد که بین صفحات $z = c$ و $z = d$ قرار دارد و B مساحت بخشی از سطح استوانه‌ی $x^2 + y^2 = b^2$ باشد

که بین این صفحات قرار دارد. نشان دهید $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

موفق باشید.

۱. فرض کنید C منحنی $y = \ln x$ باشد. مطلوب است
- الف) تابع انحنای C و تعیین نقطه‌ای از C که دارای بیشترین انحناست.
- ب) مرکز و شعاع انحنای C در نقطه $(1, 0)$.
۲. فرض کنید S سطح دوار حاصل از دوران منحنی $x^2 - z^2 = 1$ حول محور z ها باشد. مطلوب است
- الف) معادله و نمودار سطح S .
- ب) معادله‌ی خطوط واقع بر سطح S و ماربر نقطه‌ی $(1, 1, 1)$.
۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y| \sin x}{|x| + |y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- الف) نشان دهید تابع f در $(0, 0)$ پیوسته است.
- ب) تمام سوهای یکه‌ی $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ را بیابید که در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$$

۴. معادله‌ی خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $z = x^2 + y^2$ و $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8$ را در نقطه‌ی $(-1, 1, 2)$ مشخص کنید.

۵. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z به عنوان تابعی از متغیرهای مستقل x و y با معادله‌ی

$$x - y = f(z - x, z - y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

۶. اکستریم‌های مطلق تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2(x + y)$ را روی ناحیه زیر پیدا کنید

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$$

مدت آزمون ۱۴۰ دقیقه موفق باشید.

(۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{1-2t^2}\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است. (۱۵ نمره)

(۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{4}\ln(x^2 + y^2)$ روی $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید. (۱۰ نمره)

(۳) تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی f را در $(0, 0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست. (۱۵ نمره)

(۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر

$$u = u(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y) \quad \text{نشان دهید} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15 \text{ نمره})$$

(۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C ، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟ (۱۵ نمره)

موفق باشید

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II . فروردین ۱۳۸۵

(۱) خم C به معادله $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + \sqrt{1-2t^2}\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است.

پاسخ الف.

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j} - \frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{k}, \quad \vec{r}''(t) = -\frac{2t}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -\frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{2t}{(\sqrt{1-2t^2})^3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j}$$

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{1-2t^2})^3}, \quad \|\vec{r}'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$$

$$\kappa = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = 1 \text{ در نتیجه } ۱$$

پاسخ ب. باید ثابت کنیم بردار قائم دوم خم، یک بردار ثابت است.

روش اول.

$$B = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} = \frac{(\sqrt{1-2t^2})^3}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

روش دوم.

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{i} + \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\left\| \frac{dT}{dt} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}, \quad N = \frac{dT/dt}{\|dT/dt\|} = -t\vec{i} - t\vec{j} - \sqrt{1-2t^2}\vec{k}$$

و در نتیجه

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}t \\ -t & -t & -\sqrt{1-2t^2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

یعنی B یک بردار ثابت.

(۲) رویه S به معادله $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ روی $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

پاسخ. با توجه به این که $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ ، معادله‌ی رویه را می‌توان به ازای $F(x, z) = z - \ln x$ یا $F(y, z) = z - \ln y$ به صورت $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ در نظر گرفت.

پس می‌توان گفت S رویه‌ای است دوار که از دوران خم $z = \ln x$ به ازای $1 \leq x \leq e$ یا از دوران خم $z = \ln y$ به ازای $1 \leq y \leq e$ حول محور z -ها به دست آمده است.

(۳) تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزئی f را در $(0, 0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ الف. باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x, y) (\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} - 0 \right| < \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} - 0 \right| &\leq 2|x| \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)^2 + 3|y| \left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)^2 \\ &\leq 2|x| + 3|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

پس برای $\varepsilon > 0$ کافی است قرار دهیم $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$. در این صورت داریم

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta = \frac{1}{5}\varepsilon \Rightarrow 5\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

پاسخ ب. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^5}{h^5} = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^5}{h^5} = 3$$

پاسخ ج. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0, 0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت توابع α و β وجود دارند به

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \beta(x, y) = 0$$

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y$$

(برای سادگی به جای Δx از x و به جای Δy از y استفاده شده است.) بنابراین باید داشته باشیم

$$\frac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} = 2x + 3y + \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \beta(x, y) = 0$$

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x = t, y = t$ داریم

$$\frac{2t^5 - 3t^5}{(t^2 + t^2)^2} = 2t + 3t + \alpha(t, t)t + \beta(t, t)t$$

$$-t = 5t + \alpha(t, t) t + \beta(t, t) t \quad \text{یا}$$

$$-6 = \alpha(t, t) + \beta(t, t) \quad \text{که با تقسیم دو طرف بر } t \neq 0 \text{ این معادله هم ارز است با}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \beta(x, y) = 0 \quad \text{اما این غیر ممکن است زیرا از } 0 = \lim_{t \rightarrow 0} (\alpha(t, t) + \beta(t, t)) = 0 \text{ نتیجه می شود}$$

۴) فرض کنید نوابح حقیقی یک متغیره ی f و g دست کم دوبار مشتق پذیر باشند. اگر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{، نشان دهید } u = u(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$$

پاسخ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2g'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{به این ترتیب}$$

۵) رویه ی S به معادله ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه ی مماس بر رویه ی S در هر نقطه ی دلخواه از خم C ، بر صفحه ی π به معادله ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه ی S صفحه ی مماس بر رویه با صفحه ی π موازی است؟

پاسخ الف. معادله ی ضمنی رویه ی S عبارت است از $F(x, y, z) = z - xy + y - 1 = 0$. پس

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = -y \vec{i} + (1-x) \vec{j} + \vec{k}$$

از سوی دیگر بردار نرمال صفحه ی π عبارت است از $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. بنابراین در هر نقطه ی دلخواه از خم C به مختصات $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ داریم

$$\vec{n} \cdot \nabla F = (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) \cdot (-(3-t) \vec{i} + (1-t) \vec{j} + \vec{k}) = (t-3) + (1-t) + 2 = 0$$

پاسخ ب.

روش اول. در نقاطی از رویه ی S صفحه ی مماس بر رویه با صفحه ی π موازی است که $\vec{n} \parallel \nabla F$ یعنی

بنابراین تنها جواب نقطه‌ی $z = xy - y + 1 = \frac{5}{4}$ پس $x = \frac{1}{4} = -y$ به این ترتیب $\frac{-y}{1} = \frac{1-x}{1} = \frac{1}{4}$ است. $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$

روش دوم. در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} \times \nabla F = \vec{0}$ یعنی $\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -y & 1-x & 1 \end{vmatrix}$ یا $(2x-1)\vec{i} - (1+2y)\vec{j} + (1-x+y)\vec{k} = \vec{0}$ پس $x = \frac{1}{4} = -y$ به این ترتیب $z = xy - y + 1 = \frac{5}{4}$ بنابراین تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$ است.

۱. تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است. کلیه بردارهای یکه چون $u = a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$ را مشخص کنید که برای آنها داشته باشیم $D_u f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot u$.
(۱۰ نمره)

۲. اکسترم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار $D = \{ (x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \}$ به دست آورید.
(۱۵ نمره)

۳. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین خطوط $x = 0$ ، $x + y = 2$ ، $x + y = 1$ و $y = 0$ است. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\iint_D \frac{(x - y)^2}{(x + y)^3} dA$$

(۱۵ نمره)

۴. فرض کنید D ناحیه‌ی درون مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ محصور توسط کره‌ی $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$ است ($a > 0$ ثابت). مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال زیر (۱۵ نمره)

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - 3 \right) dV$$

(بقیه‌ی پرسش‌ها، پشت برگه می‌باشند)

۵. فرض کنید $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته هستند و $f(0) = 1$.
مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_C (2xf(y) + y^2g'(x)) dx + (x^2f'(y) + 2yg(x)) dy$$

که در آن C نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $x^2 + y^2 = 2x$ پیموده شده از نقطه‌ی $A = (0, 0)$ به نقطه‌ی $B = (2, 0)$ است.

(۲۰ نمره)

۶. فرض کنید S بخشی از سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ زیر صفحه‌ی $z = 2$ است. برای

$$F(x, y, z) = (\lambda x + \sin(y^2 z)) \mathbf{i} + (2y - e^{xz}) \mathbf{j} - 6z \mathbf{k}$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S F \cdot n \, d\sigma$ ، که در آن n قائم‌یکه‌ی روبه سمت خارج S است.

(۲۰ نمره)

۷. فرض کنید π صفحه‌ای با بردار نرمال یکه‌ی $n = a \mathbf{i} + b \mathbf{j} + c \mathbf{k}$ و γ مسیر بسته‌ی ساده‌ای در π است. برای میدان $F(x, y, z) = (bz - cy) \mathbf{i} + (cx - az) \mathbf{j} + (ay - bx) \mathbf{k}$ نشان دهید که مقدار $\frac{1}{4} \int_{\gamma} F \cdot dr$ برابر است با مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ی π که توسط منحنی γ محصور شده است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

پاسخ پرسش ۱.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(h, \circ) - f(\circ, \circ)}{h} = \circ, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\circ, \circ) = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(\circ, h) - f(\circ, \circ)}{h} = \circ$$

بنابراین $\nabla f(\circ, \circ) = (\circ, \circ)$ و در نتیجه $\nabla f(\circ, \circ) \cdot u = \circ$ (۳ نمره)

از طرف دیگر

$$(۴ \text{ نمره}) \quad D_u f(\circ, \circ) = \lim_{t \rightarrow \circ} \frac{f(ta, tb) - f(\circ, \circ)}{t} = \lim_{t \rightarrow \circ} \frac{\frac{t^2 a^2 b}{t^2(a^2 + b^2)} - \circ}{t} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = a^2 b$$

بنابراین $D_u f(\circ, \circ) = \nabla f(\circ, \circ) \cdot u = \circ$ اگر و تنها اگر $a^2 b = \circ$ (یعنی $a = \circ$ یا $b = \circ$).
به این ترتیب جهت‌های خواسته شده عبارتند از $i, -i, j, -j$. (۳ نمره)

پاسخ پرسش ۲. برای تابع $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \circ$$

بنابراین

$$\nabla f = \circ \Rightarrow x = y = \circ$$

پس $P_0 = (\circ, \circ)$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.

از سوی دیگر

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = \circ$$

پس $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 4 > \circ$ بنابراین f در P_0 یک مینیمم نسبی دارد. (۵ نمره)

روی مرز ناحیه‌ی D از روش تکثیرکنندگان لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$H(x, y, \lambda) = 2 + x^2 + y^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \right)$$

دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$۱) \quad H_x = 2x - \lambda \frac{x}{2} = \circ$$

$$۲) \quad H_y = 2y - 2\lambda \frac{y}{9} = 0$$

$$۳) \quad H_\lambda = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \quad (۴ \text{ نمره})$$

از معادله‌ی اول $x = 0$ یا $\lambda = 4$ و از معادله‌ی دوم $y = 0$ یا $\lambda = 9$ به دست می‌آید. به ازای $x = 0$ از معادله‌ی سوم $y = \pm 3$ و به ازای $y = 0$ از معادله‌ی سوم $x = \pm 2$ به دست می‌آید. بنابراین جواب‌های دستگاه عبارت است از

$$x = 0, y = 3, \lambda = 9 \Rightarrow P_1 = (0, 3)$$

$$x = 0, y = -3, \lambda = 9 \Rightarrow P_2 = (0, -3)$$

$$x = 2, y = 0, \lambda = 4 \Rightarrow P_3 = (2, 0)$$

$$x = -2, y = 0, \lambda = 4 \Rightarrow P_4 = (-2, 0) \quad (۴ \text{ نمره})$$

از $f(P_1) = f(P_2) = 11$ ، $f(P_3) = f(P_4) = 6$ و $f(P_0) = 2$ نتیجه می‌شود P_1 و P_2 ماکزیمم مطلق و P_0 مینیمم مطلق f روی D هستند. (۲ نمره)

پاسخ پرسش ۳. با انتخاب $x + y = u$ و $x - y = v$ خواهیم داشت

$$y = \frac{1}{2}(u - v), \quad x = \frac{1}{2}(u + v)$$

بنابراین

$$(۶ \text{ نمره}) \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

مرزهای ناحیه‌ی جدید D^* حاصل از تغییر مختصات (x, y) به (u, v) عبارت است از

$$x = 0 \Rightarrow u + v = 0 \Rightarrow v = -u, \quad y = 0 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow v = u$$

و نیز

$$1 \leq x + y \leq 2 \Rightarrow 1 \leq u \leq 2$$

به این ترتیب

$$(۴ \text{ نمره}) \quad D^* = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq u\}$$

$$\begin{aligned}
 (5 \text{ نمره}) \quad \iint_D \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3} dA &= \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-u}^u \frac{v^2}{u^3} dv du \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{v^2}{3u^3} \Big|_{v=-u}^{v=u} du \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^2 du \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

پاسخ پرسش ۴. از تعریف ناحیه D دیده می‌شود که استفاده از مختصات کروی مناسب‌تر است. از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود $z = a$ ، یعنی مخروط و کره یکدیگر را در دایره $x^2 + y^2 = a^2$ و $z = a$ قطع می‌کنند. در ناحیه D ، تغییرات ϕ به صورت $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ و تغییرات θ به صورت $0 \leq \theta \leq 2\pi$ می‌باشد. در ضمن معادله $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ در مختصات کروی به صورت $\rho = 2a \cos \phi$ است. پس، در مختصات کروی ناحیه D عبارت است از

$$(8 \text{ نمره}) \quad D^* = \{ (\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos \phi \}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \iiint_D \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - 3 \right) dV &= \iiint_{D^*} \left(\frac{1}{\rho^2} - 3 \right) \rho^2 \sin \phi dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{2a \cos \phi} (1 - 3\rho^2) d\rho \right] d\phi \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\rho - \rho^3 \Big|_0^{2a \cos \phi}) \sin \phi d\phi \right] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \cos \phi - 8a^3 \cos^3 \phi) \sin \phi d\phi \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-a \cos^2 \phi + 2a^3 \cos^4 \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[-a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2a^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - (-a + 2a^3) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2} \right) d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^2}{2} \right) (2\pi) = \pi(a - 3a^2) \quad (7 \text{ نمره})$$

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - 3 \right) dV = \pi a(1 - 3a^2)$$

پاسخ پرسش ۵.

روش اول (قرار می دهیم

$$P(x, y) = 2xf(y) + y^2g'(x) \quad , \quad Q(x, y) = x^2f'(y) + 2yg(x)$$

چون f و g توابعی مشتق پذیرند داریم

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xf'(y) + 2yg'(x) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xf'(y) + 2yg'(x)$$

بنابراین میدان F یک میدان گرادیان است و در نتیجه انتگرال $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر است.

(۵ نمره)

برای محاسبه ی انتگرال می توان یکی از دو روش زیر را به کار برد.

الف (تابع دو متغیره U را چنان پیدا می کنیم که $\nabla U(x, y) = F(x, y)$ و انتگرال خطی را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\int_C (2xf(y) + y^2g'(x)) dx + (x^2f'(y) + 2yg(x)) dy = U(B) - U(A)$$

در این حالت داریم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xf(y) + y^2g'(x) \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = x^2f(y) + y^2g(x) + h(y)$$

که در آن h یک تابع یک متغیره با مشتق پیوسته است. از سوی دیگر

$$x^2f'(y) + 2yg(x) + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2f'(y) + 2yg(x) \quad \Rightarrow \quad h'(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) \equiv c$$

که در آن c یک عدد ثابت است. پس $U(x, y) = x^2f(y) + y^2g(x) + c$ و در نتیجه

$$\int_C F \cdot dr = U(B) - U(A) = U(2, 0) - U(0, 0) = 4f(0) + 0 + c - (0 + 0 + c) = 4f(0) = 4$$

(۱۵ نمره)

تذکره: روش دیگر برای محاسبه ی U به صورت زیر می باشد

$$U(x, y) = \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt$$

داریم $P(t, 0) = 2tf(0) = 2t$ و $Q(x, t) = x^2 f'(t) + 2tg(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x P(t, 0) dt + \int_0^y Q(x, t) dt \\ &= \int_0^x 2t dt + \int_0^y [x^2 f'(t) + 2tg(x)] dt \\ &= [t^2]_{t=0}^{t=x} + [x^2 f(t) + t^2 g(x)]_{t=0}^{t=y} \\ &= x^2 + (x^2 f(y) + x^2 g(x) - x^2 f(0)) = x^2 f(y) + y^2 g(x) + c \end{aligned}$$

ب) چون مقدار انتگرال خطی مستقل از مسیر است به جای مسیر C می توان از مسیر C' ، پاره خط واصل بین نقطه ی A و B استفاده نمود. معادلات پارامتری C' را می توان برای $0 \leq t \leq 2$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$C' : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dr &= \int_0^2 [(2tf(0) + 0) + (t^2 f'(0) + 0)(0)] dt \\ &= f(0) \int_0^2 2t dt = 4 \end{aligned}$$

روش دوم) فرض کنیم C' قسمتی از محور x ها از نقطه ی B به نقطه ی A است. با استفاده از قضیه ی گرین

$$\int_C P dx + Q dy + \int_{C'} P dx + Q dy = \int_{C \cup C'} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0$$

زیرا $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xf'(y) + 2yg'(x) = \frac{\partial P}{\partial y}$ (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\int_C P dx + Q dy = - \int_{C'} P dx + Q dy = \int_{-C'} P dx + Q dy$$

با توجه به اینکه مسیر $-C'$ دارای معادلات پارامتری $x = t$ و $y = 0$ به ازای $0 \leq t \leq 2$ است خواهیم داشت

(۱۰ نمره)
$$\int_C P dx + Q dy = \int_{-C'} P dx + Q dy = \int_0^2 2tf(0) dt = 4$$

پاسخ پرسش ۶. فرض کنیم S' قسمتی از صفحه‌ی $z = 2$ درون S است. از این که مولفه‌های تابع F مشتقات جزئی پیوسته دارند، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس برای سطح بسته و قطعه قطعه هموار $S \cup S'$ که ناحیه‌ی T را در فضا محصور می‌کند، داریم

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\} \\ &= \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r^2 \leq z \leq 2\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 2 - 6 = 4 \quad (5 \text{ نمره})$$

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S'} F \cdot n \, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} F \, dV = \iiint_T 4 \, dV \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^2 r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 1\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) \, dr \\ &= 1\pi \end{aligned} \quad (10 \text{ نمره})$$

به این ترتیب

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma = 1\pi - \iint_{S'} F \cdot n \, d\sigma$$

از سوی دیگر برای سطح S' داریم $n = \mathbf{k}$ و S' نمودار تابع $z = f(x, y) = 2$ است. در نتیجه

$$\iint_{S'} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{S'} -6z \, d\sigma = -12 \iint_{S'} d\sigma = -12\sigma$$

که در آن σ عبارت است از مساحت سطح S' و برابر $2\pi = \pi(\sqrt{2})^2$ است. بنابراین

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma = 8\pi + 24\pi = 32\pi \quad (5 \text{ نمره})$$

پاسخ پرسش ۷. فرض کنیم S قسمتی از صفحه‌ی π باشد که به وسیله‌ی خم ساده و بسته‌ی γ محصور شده است. از این که مولفه‌های تابع $F(x, y, z) = (bz - cy)\mathbf{i} + (cx - az)\mathbf{j} + (ay - bx)\mathbf{k}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای سطح هموار S با مرز γ و برای n برداریکه‌ی نرمال صفحه‌ی π داریم

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = (2a)\mathbf{i} + (2b)\mathbf{j} + (2c)\mathbf{k} = 2n$$

(۷ نمره)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \iint_S \text{curl } F \cdot n \, d\sigma \\ &= \iint_S (2n) \cdot n \, d\sigma \\ &= 2 \iint_S d\sigma \end{aligned}$$

(۸ نمره)

بنابراین

$$\iint_S d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\gamma} F \cdot dr$$

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II فروردین ماه ۱۳۸۷

- ۱- خم C به معادله برداری $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + (e^t \sin t) \mathbf{j} + (e^t \cos t) \mathbf{k}$ مفروض است.
الف) بردارهای \mathbf{T} ، \mathbf{N} و \mathbf{B} را در نقطه‌ی $(1, 0, 1) \in C$ به دست آورید.
ب) مرکز انحنای C را در نقطه‌ی $(1, 0, 1) \in C$ به دست آورید.
ب) معادلات پارامتری خم حاصل از تصویر C را بر صفحه‌ی $6 = x - y + 2z$ تحت بردار $V = (-1, 1, 0)$ به دست آورید.

(۱۰ نمره)

- ۲- تابع $f(x, y) = \begin{cases} (x - y) \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است.
الف) نشان دهید که f در $(0, 0)$ پیوسته است.
ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ را به دست آورید.
ج) مشتق سویی f در $(0, 0)$ و در سوی برداریکته‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.
د) آیا f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

(۱۰ نمره)

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ (بخش تشریحی) خرداد ۱۳۸۸ مدت ۱۱۰ دقیقه

(۱) فرض کنید $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار $z = f(x, y)$ را در نقطه‌ی $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{e}\right)$ بیابید. (۵ نمره)

(ب) اکسترممهای $f(x, y)$ را روی ناحیه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ به دست آورید. (۲۰ نمره)

(۲) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\sin \theta + \cos \theta} r \, dr \right] d\theta.$$

(۵ نمره)

(ب) گیریم S قسمتی از سطح نیم کره‌ی $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ است که زیر صفحه‌ی $z = \sqrt{3}$ قرار دارد. در این صورت مساحت S را به کمک انتگرال سطح پیدا کنید. (۱۰ نمره)

(۳) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_C (2xy + \cos 2y)dx + (x^2 - 2x \sin 2y + x)dy,$$

که در آن C خط شکسته‌ی حاصل از سه پاره خطی است که به ترتیب از $A = (1, 0)$ به $B = (0, 1)$ سپس به $C = (-1, 0)$ و سرانجام به $D = (0, -1)$ پیموده شده است. (۱۰ نمره)

(ب) خم C از تلاقی استوانه‌ی به معادله‌ی $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $z = 4 - x^2 - y^2$ به دست آمده و در جهت مثبت طی شده است. برای تابع برداری $F(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + k$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (۱۰ نمره)

۴) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

که در آن T ناحیه‌ی درون و روی مخروط به معادله‌ی $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و محدود به نیم‌کره‌هایی به معادلات $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ است. (۱۰ نمره)

ب) اگر S سطح خارجی ناحیه‌ی T در بخش الف) باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x, y, z) = x(y^2 + 3)\mathbf{i} + y(z^2 - 1)\mathbf{j} + z(x^2 - 1)\mathbf{k}$. (۱۰ نمره)

موفق باشید

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II. فروردین ۱۳۸۹ مدت آزمون ۵۰ دقیقه

پرسش اول (۲۰ نمره) - خم C با معادله برداری

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + \sin t - t) \mathbf{i} + (\cos t + \sin t + t) \mathbf{j} + (2 \cos t - \sin t) \mathbf{k}$$

را در نظر بگیرید.

الف) انحنای خم C را در نقطه $P_0 = (1, 1, 2)$ بیابید.

ب) معادله صفحه بوسان را در نقطه P_0 به دست آورید.

ج) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحه $y = x$ به معادله مشخص نمایید.

پرسش دوم (۲۰ نمره) - فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{اگر } x^2 + y^2 \geq 1 \\ 1 - x^2 - y^2 & \text{اگر } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

الف) به کمک تعریف $(\varepsilon - \delta)$ ثابت کنید که f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) در مورد وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ (با ذکر دلیل) چه می توان گفت؟

ج) نمودار $z = f(x, y)$ را توصیف کنید و یک شکل تقریبی برای آن رسم کنید.

موفق باشید

(۱) الف: فرض کنید تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ بر $D \subseteq \mathbb{R}^2$ و توابع $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ بر \mathbb{R}^2 دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند به قسمی که برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ داشته باشیم $(u, v) \in D$. برای تابع $g(x, y) = f(u, v)$ نشان دهید $\nabla g = f_u \nabla u + f_v \nabla v$.

(۱۳ نمره)

ب: با فرض $f(u, v) = e^{2u+v}$ ، $u = \sin(x+y)$ و $v = \cos(x-y)$ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که بردار $w = ai + bj$ یک بردار یکجه باشد و داشته باشیم $D_w g(0, 0) = 0$.

(۱۲ نمره)

(۲) الف: با استفاده از تعریف مشتق‌پذیری ثابت کنید که تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$ در $(-1, 1)$ مشتق‌پذیر است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است تعیین اکسترممهای مطلق تابع f بر ناحیه بسته و کراندار $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0\}$.

(۱۳ نمره)

(۳) الف: انتگرال $\int \int_D 4y(x - y^2) \sin(x^2 - y^4) dA$ را حساب کنید که در آن D ناحیه بین سهمی‌های $x - y^2 = 0$ ، $x - y^2 = 1$ ، $x + y^2 = 2$ ، $x + y^2 = 3$ واقع در ربع اول صفحه است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iiint_T \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - 2z \right) dV$ که در آن T ناحیه مشترک درون کره $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ و خارج کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است.

(۱۳ نمره)

بقیه‌ی پرسش‌ها را در پشت برگه مشاهده نمایید.

(۴) الف: هرگاه D ناحیه محصور به خم ساده و بسته γ باشد که در جهت مثبت پیموده شده

است، نشان دهید A_D مساحت ناحیه D عبارت است از $A_D = \frac{1}{2} \int_{\gamma} -ydx + xdy$ (۱۰ نمره)

ب: برای میدان برداری $\mathbf{z} = (x + \cosh(y^2 - y^2 + 1))\mathbf{j}$ و $\mathbf{i} = (-y + e^{-\sin(x^2)})\mathbf{i}$ $F(x, y) =$ و خم γ به معادله $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ که در جهت مثبت پیموده شده است مطلوب است $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

(۱۵ نمره)

(۵) فرض کنید $F(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y + 2z)\mathbf{j} + (2z + 3x)\mathbf{k}$ و S سطح کل کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ باشد. همچنین فرض کنید γ خم ساده و بسته حاصل از تلاقی کره و صفحه $z = 1$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده و \mathbf{n} برداریکه نرمال رو به خارج کره باشد.

الف: مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.