WWW.ME2CH.ROZBLOG.COM

به نام خدا

گروه مهندسیME2CH

رمز گذاشته شده

برای فایلهای رمزدار

WWW.ME2CH.COM

منبع این کتاب:

WWW.ME2CH.ROZBLOG.COM

& @ME2CH

تغییرشکل ها در سازه ها:

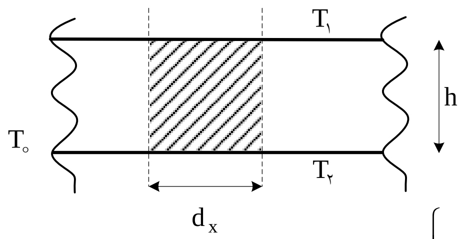
ابتدا به بررسی روش های محاسبه تغییر شکل ها در سازه ها می پردازیم:

- روش بار واحد معین: اگر سازه ای از N عضو تشکیل شده باشد، تحت یک بارگذاری خاص داریم:

$$1\times\Delta(\theta \text{ یا }) + W_R = \sum_{i=1}^{N}\left\{\int_{li}\frac{N_i n_i dx}{EA} + \int_{li}\frac{M_i m_i dx}{EI} + \int_{li}\frac{f_s V_i v_i dx}{GA} + \int_{li}\frac{T_i t_i dx}{GJ}\right\}$$

در رابطه بالا Δ (یا θ) تغییر مکان (یا چرخش) در نقطه مورد نظر سازه، W_R اثر نشست تکیه گاهی (که عبارتست از نشست تکیه گاه در سازه اصلی ضربدر مقدار عکس العمل تکیه گاهی در سازه بار واحد)، T_i, V_i, M_i, N_i به ترتیب نیروی محوری، لنگرخمشی، نیروی برشی و پیچش در عضو i ام در سازه اصلی و t_i, v_i, m_i, n_i همان کمیت ها در سازه بار واحد می باشند. f_s ضریب شکل در برش می باشد که برای مستطیل برابر است با ۱/۲ و برای دایره $\frac{10}{9}$ می باشد.

- در تیرها و قاب ها، معمولا به دلیل کوچکتر بودن صلبیت خمشی (EI) نسبت به صلبیت های برشی و محوری (EA, GA) (و در نتیجه بزرگتر بودن تغییر شکل های خمشی نسبت به تغییر شکل های برشی و محوری) از جملات در برگیرنده اثرات برشی و محوری صرفنظر می‌شود و فقط اثرات خمش و پیچش در نظر گرفته می شود.

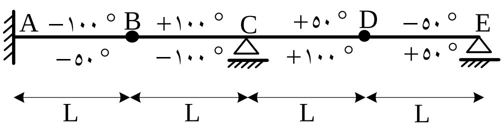


- در سازه معین بر اثر تغییر درجه حرارت، تغییر مکان داریم ولی تنش نداریم.
که اثر تغییر درجه حرارت به صورت دو جمله که اثرات خمشی و محوری را در بردارند به جملات قبلی اضافه می شود:

$$\text{تغییر مکان در اثر تغییر درجه حرارت} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\underbrace{\int_{li} n_i\alpha\left(\frac{T_1+T_2}{2}-T_0\right)dx}_{\text{اثر محوری}} + \underbrace{\int_{li}\frac{m_i\left(T_2-T_1\right)}{h}dx}_{\text{اثر خمشی}}\right\}$$

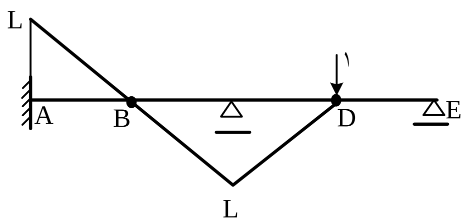
که در این رابطه، T_0 دمای محیط، T_1 دمای تار بالای عضو و T_2 دمای تار پایین عضو، h ارتفاع مقطع عضو، α ضریب انتقال حرارتی مصالح عضو، m_i و n_i به ترتیب لنگر خمشی و نیروی محوری عضو در سازه بار واحد می باشند.

مثال) در سازه روبرو بر اثر تغییر درجه حرارت مقدار تغییر مکان قائم D چقدر است؟ ($T_0 = 0$ و $h = 0/2$)



(سازه اصلی)

در سازه بار واحد فقط لنگر خمشی داریم $(n = 0)$



(دیاگرام m، لنگر خمشی در سازه بار واحد)

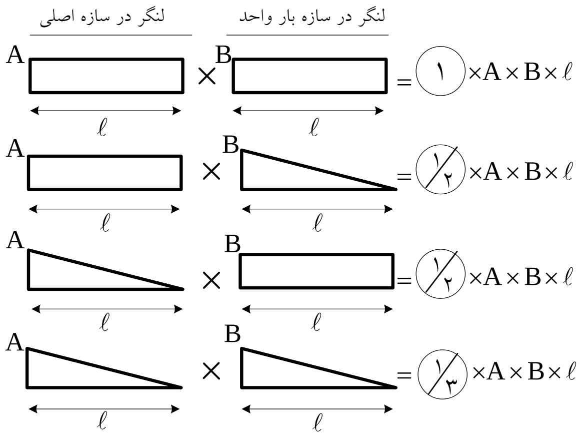
$$\begin{cases} M_{CD}=-۱\times x=-x \\ M_{BC}=۱(l-x) \\ M_{AB}=+۱\times x=x \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱\times\Delta_D=\int_\circ^l \frac{\alpha(-x)(۱۰۰^\circ-۵۰^\circ)}{۰/۲}dx+\int_\circ^l \frac{\alpha(l-x)(-۱۰۰^\circ-۱۰۰^\circ)}{۰/۲}dx+\int_\circ^l \frac{\alpha(x)(-۵۰^\circ+۱۰۰^\circ)}{۰/۲}dx=۵۰۰\alpha l^۲$$

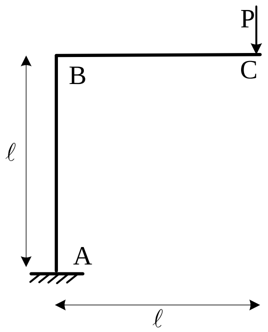
– در محاسبه انتگرال ها می توان از قضایا و روابط زیر جهت سهولت کار استفاده نمود:

– قضیه مور: مقدار انتگرال حاصلضرب لنگر خمشی سازه اصلی در سازه بار واحد برابر است با مساحت زیر نمودار لنگر خمشی سازه اصلی ضربدر مقدار لنگر در مرکز ثقل دیاگرام لنگر سازه بار واحد.

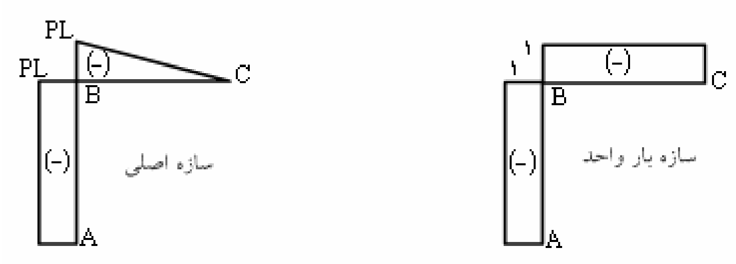
– حالت های زیر را به خاطر بسپارید:



مثال) در سازه روبرو چرخش نقطه c را به دست آورید:



حل نمودارهای لنگر خمشی در سازه اصلی و سازه بار واحد (که ناشی از اعمال لنگر واحد در نقطه C است) به صورت زیر می باشد.

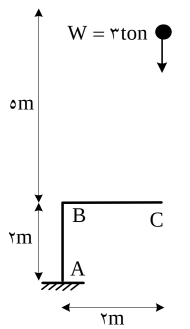


طبق روابط ذکر شده داریم:

$$\theta_C=\frac{۱}{۲}\frac{(-pl)(-۱)(l)}{EI}+۱\times\frac{(-pl)(-۱)(l)}{EI}=\frac{۳}{۲}\frac{pl^۲}{EI}$$

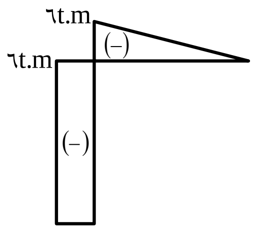
– در مسائلی که بار به صورت ضربه ای وارد می شود, ابتدا باید تغییر مکان مربوطه را با فرض استاتیکی بودن بار محاسبه کرد (Δ_{st}) و سپس مقدار به دست آمده را در ضریب ضربه ضرب نمود: $\beta=۱+\sqrt{۱+\frac{۲h}{\Delta_{st}}}=۱+\sqrt{۱+\frac{V^۲}{۲g\Delta_{st}}}$ (ضریب ضربه).

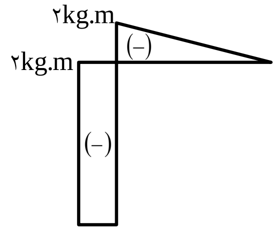
که در این رابطه،h ارتفاع سقوط وزنه، V سرعت در لحظه برخورد و g شتاب ثقل می باشد.



مثال) در سازه زیر اگر وزنه ۳ تنی از ارتفاع ۵ متری رها شود، مقدار تغییر مکان افقی نقطه B را به دست آورید: $\left(EI=۲\times۱۰^{۱۰}kg.cm^۲\right)$

حل: ابتدا باید نمودار لنگر سازه اصلی (بر اثر بار استاتیکی ۳ تنی روی نقطه C) و سازه بار واحد (بر اثر بار واحد روی نقطه C) را رسم و سپس مقدار ضریب ضربه را محاسبه نمود:

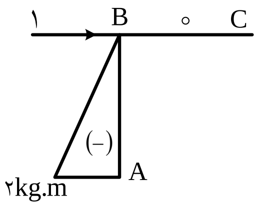




$$\Rightarrow (\Delta_{st})_C = \frac{1}{3}\times\frac{6\times10^5\times200\times200}{2\times10^{10}} + 1\times\frac{6\times10^5\times200\times200}{2\times10^{10}} = 1/6\ \text{cm}$$

$$\beta = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{(\Delta_{st})_C}} = 1+\sqrt{1+\frac{10\times100}{1/6}} = 26$$

حالا باید نمودار لنگر سازه بار واحد را (تحت اثر یک بار بار واحد افقی در نقطه B) رسم و از ضرب کردن آن در نمودار لنگر سازه اصلی مقدار $(\Delta_{st})_B$ را به دست آورد.



$$\Rightarrow (\Delta_{st})_B = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{6\times10^5\times200\times200}{2\times10^{10}} = 0/6\ \text{cm}$$

$$\Rightarrow \Delta_B = \beta.(\Delta_{st})_B = 26\times0/6 = 15/6\ \text{cm}$$

– **قضیه اول کاستیلیانو:** اگر انرژی موجود در سازه بر حسب Δ و θ گره های سازه بیان شود داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_i} = M_i$$

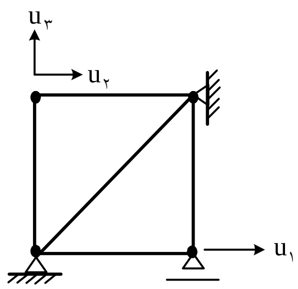
– **قضیه دوم کاستیلیانو:** اگر انرژی موجود در سازه بر حسب نیروها (F_i) و لنگرهای (M_i) گره های سازه بیان شود داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i$$

که در روابط فوق، U انرژی سازه، F_i و M_i به ترتیب نیرو و لنگر گروه i ام سازه و Δ_i و θ_i به ترتیب، تغییر مکان و چرخش گره i ام سازه می باشند.

– استفاده ازروابط سازگاری تغییر شکل ها، هم توصیه می شود. (به خصوص در سازه های نامعین). کلاً هرچه سازه نامعین تر باشد، تحلیل آن به روش های تغییر مکانی (روش هایی که در آنها ابتدا تغییر شکل ها به دست می آیند و از روی آنها مقدار نیروها و لنگرهای سازه به دست می آید) بهتر است، چون با افزایش درجات نامعین استاتیکی سازه، درجات آزادی سینماتیکی سازه (تعداد مجهولات تغییر مکانی) کاهش یافته و تحلیل سازه آسانتر خواهد شد. پس به عنوان توصیه، در مسائل نامعین، روش های سازگاری تغییر شکل ها و کاستیلیانو را به روش بار واحد ترجیح دهید.

– در خرپای روبرو (برای مثال) سازه به لحاظ استاتیکی ۲ درجه (۲ مجهول) و به لحاظ سینماتیکی ۳ درجه (۳ درجه آزادی و ۳ مجهول) نامعین می باشد.



و کلاً در خرپاها داریم:

در خرپاهای مسطح $\leftarrow n_C = 2j - r$ (درجه نامعینی سینماتیکی)

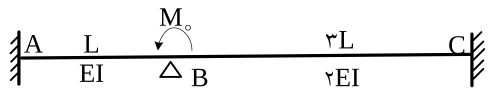
در خرپاهای فضایی $\leftarrow n_C = 3j - r$

که در روابط فوق j تعداد گره های خرپا و r تعداد عکس العمل های تکیه گاهی می باشند.

– اگر عضو در انتهای اول به اندازه $\theta_۱$ و در انتهای دوم به اندازه $\theta_۲$ بچرخد و δ اختلاف تغییر مکان (عمود بر محور عضو) در دو سر آن باشد. انرژی موجودی در آن عبارتست از:

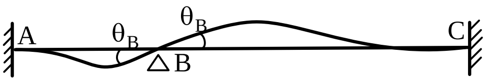
$$U = \frac{۲EI}{l}(\theta_۱^۲ + \theta_۱\theta_۲ + \theta_۲^۲) - \frac{۶EI}{l^۲}\delta(\theta_۱ + \theta_۲) + \frac{۶EI}{l^۳}\delta^۲$$

مثال) در سازه روبرو مقدار چرخش گره B را به دست آورید:



حل

مساله به لحاظ استاتیکی ۳ درجه نامعین است ولی به لحاظ سینماتیکی فقط یک درجه نامعین می باشد (چرخش گره B تنها درجه آزادی سازه است). ابتدا انرژی سازه را بر حسب مجهولات تغییر مکانی به دست می آوریم:



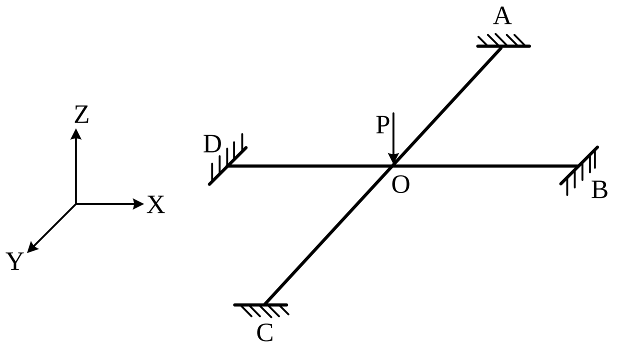
$$U_{AB} = \frac{۲EI}{l}(\theta_B)^۲ \quad , \quad U_{BC} = \frac{۲(۲EI)}{۳l}(\theta_B)^۲ \Rightarrow U = \left(۲ + \frac{۴}{۳}\right)\frac{EI}{l}\theta_B^۲ = \frac{۱۰}{۳}\frac{EI}{l}\theta_B^۲$$

از قضیه اول کاستیلیاتو داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_B} = M_\circ \Rightarrow \frac{۲۰}{۳}\frac{EI}{l}\theta_B = M_\circ \Rightarrow \theta_B = \frac{۳M_\circ l}{۲۰EI}$$

مثال) در شبکه مقابل درجات آزادی و مقدار آنها را به دست آورید: (طول اعضا l و GJ و EI)

حل شبکه به سازه افقی می گویند که تمام نیروهای آن عمود بر سازه می باشد. در این شبکه بـه علـت تقـارن موجـود در سـازه, هـیچ دورانی نداریم و اعضاء دچار پیچش هم نمی شوند.

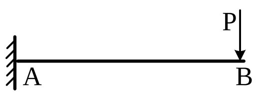


تنها درجه آزادی سازه، تغییر مکان نقطه O در راستای z می باشد. پس:

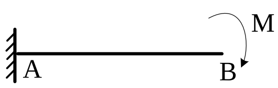
$$U_{OA} = U_{OB} = U_{OC} = U_{OD} = \frac{۶EI}{l^۳}\Delta_\circ^۲ \Rightarrow U = ۴ \times \frac{۶EI}{l^۳}\Delta_\circ^۲ = \frac{۲۴EI}{l^۳}\Delta_\circ^۲$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_\circ} = p \Rightarrow \Delta_\circ = \frac{pl^۳}{۴۸EI}$$

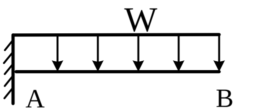
– اشکال و روابط زیر را حتماً به خاطر بسپارید:



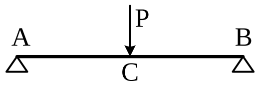
$$\Delta_B = \frac{pl^۳}{۳EI} \;, \; \theta_B = \frac{pl^۲}{۲EI}$$



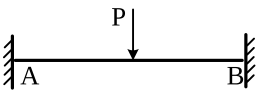
$$\Delta_B = \frac{Ml^۲}{۲EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{Ml}{EI}$$



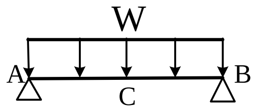
$$\Delta_B = \frac{Wl^۴}{۸EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{Wl^۳}{۶EI}$$



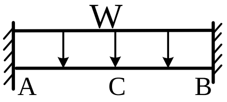
$$\Delta_C = \frac{pl^۳}{۴۸EI} \quad , \quad \theta_A = \theta_B = \frac{pl^۲}{۱۶EI}$$



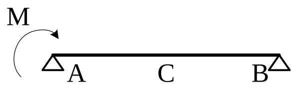
$$\Delta_C = \frac{pl^۳}{۱۹۲EI} \quad , \quad M_A = \frac{pl}{۸} = M_B = M_C$$



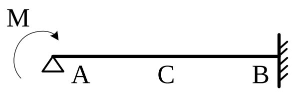
$$\Delta_C = \frac{۵Wl^۴}{۳۸۴EI} \quad , \quad \theta_A = \theta_B = \frac{Wl^۳}{۲۴EI}$$



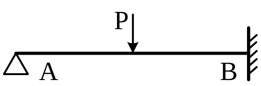
$$\Delta_C = \frac{Wl^۴}{۳۸۴EI} \quad , \quad M_A = M_B = ۲M_c = \frac{Wl^۲}{۱۲}$$



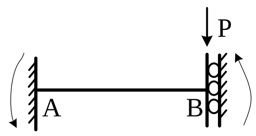
$$\Delta_C = \frac{Ml^۲}{۱۶EI} \quad , \quad \theta_A = ۲\theta_B = \frac{Ml}{۳EI}$$



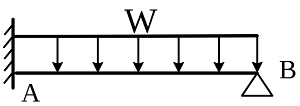
$$\theta_A = \frac{Ml^۲}{۴EI} \quad , \quad M_B = \frac{M}{۲}$$ (در جهت M)



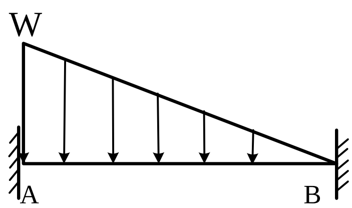
$$\theta_A = \frac{pl^۲}{۳۲EI} \quad , \quad M_B = \frac{۳pl}{۱۶}$$



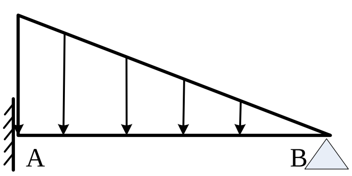
$$\Delta_B = \frac{pl^۳}{۱۲EI}$$



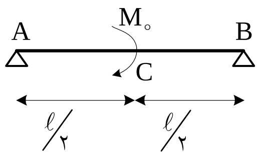
$$\theta_B = \frac{Wl^۳}{۴۸EI} \quad , \quad M_A = \frac{Wl^۲}{۸}$$



$$M_A = \frac{Wl^۲}{۲۰} \quad , \quad M_B = \frac{Wl^۲}{۳۰}$$



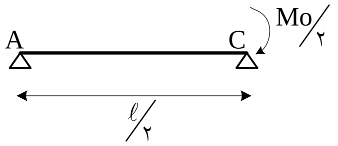
$$M_A = \frac{Wl^۲}{۱۵}$$



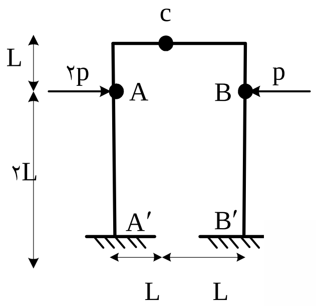
مثال) مطلوبست θ_A در سازه مقابل:

حل از آنجا که شکل متقارن است، می توان نیمی ازآن را تحلیل نمود:

و با توجه به روابط ذکر شده θ_A در این حالت برابر است با:



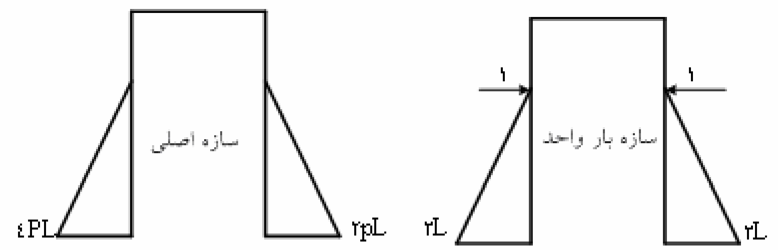
$$\theta_A=\frac{Ml}{۶EI}=\frac{\left(\frac{M_\circ}{۲}\right)\left(\frac{l}{۲}\right)}{۶EI}=\frac{M_\circ l}{۲۴EI}$$



مثال) (کنکور ارشد ۸۳): مقدار نزدیک شدن دو نقطه A و B در سازه زیر برابر است با:

۱) $\frac{pl^۳}{۳EI}$ ۲) $\frac{۸pl^۳}{EI}$ ۳) $\frac{۲pl^۳}{۳EI}$ ٤) $\frac{۳pl^۳}{EI}$

حل سازه معین است و پس از تحلیل داریم: (روش بار واحد معین)

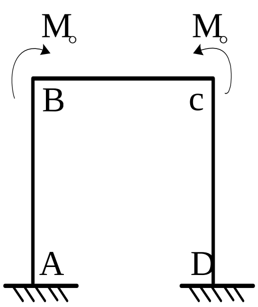


$$\Delta_A\to B=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴pl\times۲l}{EI}\times۲l+\frac{۱}{۳}\times\frac{۲pl\times۲l}{EI}\times۲l=\frac{۸pl^۳}{EI}$$

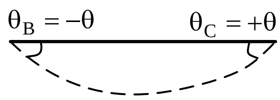
راه حل ساده تر: از همان ابتدا مشخص است که اعضای BC و AC صفر نیرویی اند و در نتیجه اعـضای AA' و BB' بـصورت تیـر طـره عمل می‌کنند. با استفاده از رابطه معروف $\Delta=\frac{pl^۳}{۳EI}$ برای تیرهای طره داریم:

$$\Delta=\Delta_{AA'}+\Delta_{BB'}=\frac{(۲p)(۲l)^۳}{۳EI}+\frac{(p)(۲l)^۳}{۳EI}=\frac{۲۴pl^۳}{۳EI}=\frac{۸pl^۳}{EI}$$

مثال) در سازه روبرو θ_B را به دست آورید: (از تغییر طول محوری اعضاء صرفنظر شود)



حل با استفاده از تقارن می دانیم تیر BC بصورت زیر خم می شود و چرخش دو سر آن با هم برابر ولی در خلاف جهت هم و تغییر مکان دو سر آن نسبت به هم صفر است. و با توجه به صلب بودن گره های B و C، میزان چرخش این گره ها در اعضای AB و CD هم همین مقادیر را دارد.



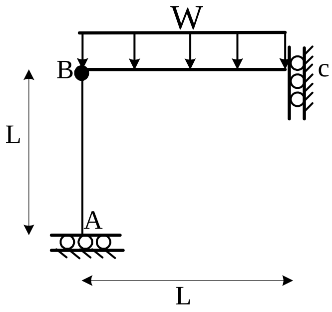
$$U_{AB}=\frac{2EI}{l}(\theta_B)^2=\frac{2EI}{l}(-\theta)^2$$

$$U_{BC}=\frac{2EI}{l}\left(\theta_B^2+\theta_B\theta_C+\theta_c^2\right)=\frac{2EI}{l}\left((-\theta)^2+(-\theta)(+\theta)+\theta^2\right)$$

$$U_{CD}=\frac{2EI}{l}(\theta_c)^2=\frac{2EI}{l}\theta^2\Rightarrow U=U_{AB}+U_{BC}+U_{CD}=3\times\frac{2EI}{l}\theta^2=\frac{6EI}{l}\theta^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta}=2M_\circ\Rightarrow\frac{12EI}{l}\theta=2M_\circ\Rightarrow\theta=\frac{M_\circ l}{6EI}$$

مثال) (کنکور ارشد ۸۴) در قاب شکل مقابل صلبیت خمشی اعضا EI می باشد دوران سمت راست مفصل B چقدر است؟



۱) $\frac{wl^3}{3EI}$ ۲) $\frac{wl^3}{2EI}$

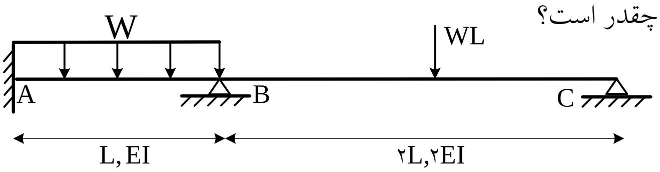
۳) $\frac{wl^3}{4EI}$ ٤) $\frac{wl^3}{6EI}$

حل) با کمی دقت مشخص می شود، لنگر خمشی عضو AB صفر است در نتیجه به جای سازه فوق می توان سازه زیر را تحلیل نمود:

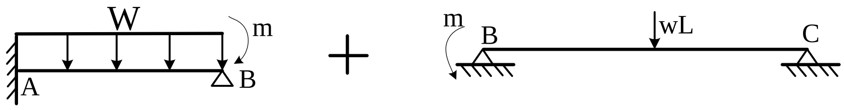
$$\Rightarrow\quad\theta_B=\frac{W(2L)^3}{24EI}=\frac{WL^3}{3EI}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال) در سازه مقابل $\left|\frac{\theta_C}{\theta_B}\right|$ چقدر است؟



حل) سازه را تفکیک کرده و معادلات سازگاری شیب را در گره B می نویسیم (لنگر در گره B را مجهول فرض می کنیم):



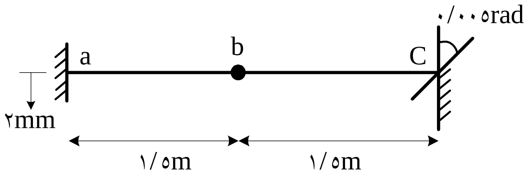
$$AB:\theta_B=\frac{Wl^3}{48EI}-\frac{ml}{4EI}$$

$$BC:\theta_B=\frac{m(2l)}{3(2EI)}-\frac{(Wl)(2l)^2}{16(2EI)}=\frac{ml}{3EI}-\frac{Wl^3}{8EI}\quad\Rightarrow\quad\frac{Wl^3}{48}-\frac{ml}{4}=\frac{ml}{3}-\frac{Wl^3}{8}\Rightarrow\frac{7}{48}Wl^2=\frac{7}{12}m\Rightarrow m=\frac{Wl^2}{4}$$

$$\Rightarrow\theta_B=\frac{ml}{3EI}-\frac{Wl^3}{8EI}=\frac{wl^3}{12EI}-\frac{Wl^3}{8EI}\Rightarrow|\theta_B|=\frac{Wl^3}{24EI}$$

$$\theta_C=\frac{m(2l)}{6(2EI)}-\frac{(wl)(2l)^2}{16(2EI)}=\frac{Wl^2}{4\times6EI}-\frac{Wl^2}{8EI}\Rightarrow|\theta_c|=\frac{Wl^3}{12EI}\quad\Rightarrow\left|\frac{\theta_C}{\theta_B}\right|=2$$

مثال (کنکور ارشد ۸۳): در تیر شکل مقابل تحت نشست و چرخش تکیه گاهی نشان داده شده Mab بر حسب kg.m کدام است؟

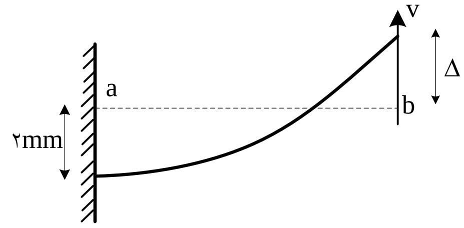


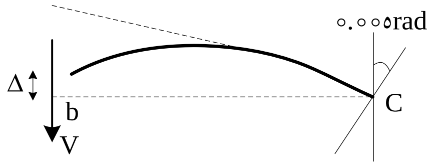
EI = ۱۳۵ton.m

۱) ۴۰۵
۲) ۴۹۵
۳) ۸۵۵
۴) ۹۴۵

حل این مثال به روش شیب افت قابل حل است که بسیار طولانی می باشد. نیروی برشی را در طرفین مفصل، V فرض کنیم. با فرض جابجا شدن مفصل b به اندازه دلخواه به طرف بالا (میتوانیم به طرف پایین هم فرض کنیم) خواهیم داشت:

$$ab:\frac{Vl^3}{۳EI}=\Delta+۰/۰۰۲\Rightarrow\frac{V\times ۱/۵^۳}{۳\times ۱۳۵}=\Delta+۰/۰۰۲ \qquad (۱)$$





$$bc:l\theta-\frac{Vl^3}{۳EI}=\Delta\Rightarrow ۱/۵\times۰/۰۰۵-\frac{V\times ۱/۵^۳}{۳\times ۱۳۵}=\Delta \qquad (۲)$$

با حذف Δ از طرفین داریم:

$$\frac{V\times ۱/۵^۳}{۳\times ۱۳۵}-۰/۰۰۲=۱/۵\times۰/۰۰۵-\frac{V\times ۱/۵^۳}{۳\times ۱۳۵}\Rightarrow V=۰/۵۷ton=۵۷۰\ \ kg\ \ \Rightarrow\ M_{ab}=vl=۵۷۰\times۱/۵=۸۵۵\ kg.m$$

گزینه۳ صحیح است.