

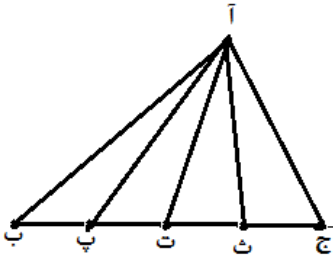
فصل ششم: حجم و مساحت



- اگر یک سطح را با واحدهای مختلف اندازه گیری کنیم، عددهای متفاوتی بدست خواهد آمد. برای یکسان شدن اعداد حاصل، نیاز به واحدهای ثابت و همیشگی و استاندارد داریم که آن را با مربعی به ابعاد یک سانتی متر مشخص می کنیم.
 - اگر یک حجم را با واحدهای مختلف اندازه گیری کنیم، عددهای متفاوتی بدست خواهد آمد. برای یکسان شدن اعداد حاصل، نیاز به واحدهای ثابت و همیشگی و استاندارد داریم که آن را با مکعبی به ابعاد یک سانتی متر مشخص می کنیم.
 - محاسبه ی اندازه ی یک سطح بوسیله ی واحدهای اندازه گیری کاری بسیار دشوار بوده و خیلی از اوقات پاسخ ها بصورت تقریبی به دست می آید. به همین دلیل برای محاسبه ی اندازه ی سطح ها از دستورهای محاسبه(فرمول) استفاده می کنیم.
 - محاسبه ی اندازه ی یک حجم بوسیله ی واحدهای اندازه گیری کاری بسیار دشوار بوده و خیلی از اوقات پاسخ ها بصورت تقریبی به دست می آید. به همین دلیل برای محاسبه ی اندازه ی حجم ها از دستورهای محاسبه(فرمول) استفاده می کنیم.
 - دقت و سرعت محاسبات، زمانی که از رابطه ها(فرمول ها) استفاده می کنیم بالاتر است.
 - واحد استاندارد اندازه گیری سطح «مترمربع» می باشد. برای دقیق تر شدن اندازه گیری ها می توان از واحدهای کوچکتر «دسی متر مربع»، «سانتی متر مربع» و «میلی متر مربع» استفاده کرد. همچنین برای اندازه های بسیار بزرگ می توان از کیلومتر مربع استفاده کرد.
 - واحد استاندارد اندازه گیری حجم «مترمکعب» می باشد. برای دقیق تر شدن اندازه گیری ها می توان از واحدهای کوچکتر «دسی متر مکعب»، «سانتی متر مکعب» و «میلی متر مکعب» استفاده کرد. همچنین برای اندازه های بسیار بزرگ می توان از کیلومتر مکعب استفاده کرد.
 - بوسیله ی جدول تناسب می توان واحدهای اندازه گیری سطح را به یکدیگر تبدیل کرد.
 - در نمایش مساحت ها باید سعی کرد از واحدهایی استفاده کرد که عدد آنها با اعشار کمتر یا صفر کمتر نوشته شود.
 - انتخاب واحد مناسب برای نمایش مساحت و یا حجم یک جسم، از اهمیت فراوانی برخوردار است.
- محیط:** یعنی دور شکل، به دور شکل پیرامون آن نیز گفته می شود.
- مساحت:** سطح داخل محیط را مساحت گویند.
- اشکال فضایی:** به اشکالی که تمام ضلع های آنها در یک سطح قرار نگرفته و برخی از اضلاعشان در فضا قرار دارد، اشکال فضایی گفته می شود و حجم نیز مربوط به اشکال فضایی است.
- حجم:** قسمتی از فضا که توسط یک جسم اشغال می شود را گویند.
- قاعده:** قسمتی از اجسام که روی زمین قرار می گیرد.
- ارتفاع:** به فاصله ی بین دو قاعده را در شکل های هندسی گویند.
- گنجایش:** همان حجم جسم است. می توان گفت گنجایش یک ظرف، فضایی است که آن ظرف اشغال کرده است و می تواند از یک ماده دیگر که اکثرا مایع است را در خود جای دهد.

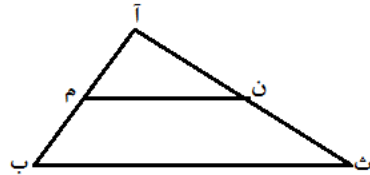
- برای اندازه گیری گنجایش اجسام نیاز به یک واحد داریم. برای اینکه عدد اندازه گیری گنجایش یکسان به دست آید از واحد استاندارد سانتی متر مکعب یعنی مکعبی که هر سه ضلع آن یک سانتی متر باشد استفاده می کنیم.
- در اجسام بسیار بزرگ یا بسیار کوچک با تبدیل واحدها می توان گنجایش را بر حسب سایر واحدهای حجم بدست آورد.
- در اجسام هندسی غیرمعروف با انتخاب یک واحد مشخص و انتقال محتویات جسم به داخل واحد ها می توان گنجایش ظرف را بدست آورد.
- برای محاسبه حجم اجسام هندسی ناشناخته می توان با انتقال محتویات جسم به داخل اجسامی با گنجایش مشخص، گنجایش پایین تر جسم اصلی را بدست آورد.
- چنانچه حجم دو جسم با هم برابر باشد آن دو جسم را متعادل می گوئیم.
- در اشکال فضایی به هر کدام از اضلاع «پال» گفته می شود. (مثلا مکعب ۱۲ بعد دارد)
- در اشکال فضایی به هر سمت یا طرف «وجه» گفته می شود. (مثلا مکعب ۶ وجه دارد)
- چند وجهی:** به هر کدام از اشکال فضایی که دارای چند وجه باشد. چند وجهی گویند. (مثلا: مکعب، مکعب مستطیل، منشور و ...)
- چند وجهی منتظم:** اگر تمام وجه های یک چند وجهی با هم مساوی باشند، آن شکل را چند وجهی منتظم گویند.
- چند وجهی غیر منتظم:** اگر تمام وجه های یک چند وجهی با هم مساوی نباشند، آن شکل را چند وجهی غیر منتظم گویند.
- واحد اندازه گیری سطح کل یا سطح جانبی بر حسب «مربع» است. (مثلا مترمربع، سانتی متر مربع)
- واحد اندازه گیری حجم بر حسب «مکعب» است. (مثلا متر مکعب، سانتی متر مکعب)
- در حجم های مساوی کمترین سطح مربوط به «کره» است.
- «هرم» دارای سه بعد و چهار وجه است.
- در بین اشکال فضایی چند وجهی ، «هرم» دارای کمترین وجه است.
- شکل های فضایی علاوه بر طول و عرض ، ارتفاع نیز دارند.
- قاعده در شکل فضایی سطحی است که روی صفحه قرار می گیرد.
- قاعده در شکل مسطح پاره خطی است که ارتفاع بر آن عمود می شود.
- اندازه ی محیط دایره تقریبا ۳ برابر قطر دایره است.
- هر گاه قطر دایره ای را A برابر کنیم، محیط آن نیز A برابر می شود.
- اگر ابعاد مربعی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر ابعاد مربعی را ۴ برابر کنیم، عدد مساحت و محیط آن برابر خواهد بود.

- هرگاه ابعاد مربعی را نصف کنیم، اندازه ی مساحت آن $\frac{1}{4}$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد مربعی را A برابر کنیم، اندازه ی محیط آن A برابر می شود.
- اگر طول مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز A برابر خواهد شد.
- اگر طول مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز A برابر خواهد شد.
- اگر طول مستطیلی را A برابر و عرض آن را B برابر کنیم، مساحت آن نیز $B \times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه طول و عرض مستطیلی را A برابر کنیم، اندازه ی محیط آن فقط به اندازه ی A برابر خواهد شد.
- اگر ارتفاع متوازی الاضلاعی را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر قاعده ی متوازی الاضلاعی را A برابر و ارتفاع آن را B برابر کنیم، مساحت آن نیز $B \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر ابعاد متوازی الاضلاعی را A برابر کنیم، محیط آن A برابر خواهد شد.
- اگر قاعده و ارتفاع مثلثی را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر یک قطر لوزی را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر قطرهای لوزی را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ خواهد شد.
- اگر مجموع دو قاعده ی دوزنقه ای را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر ارتفاع دوزنقه ای را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر مجموع دو قاعده و ارتفاع دوزنقه ای را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر شعاع دایره ای را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه شعاع دایره ای را نصف کنیم، اندازه ی مساحت آن $\frac{1}{4}$ برابر خواهد شد.
- اگر شعاع دایره ای A برابر کنیم، محیط آن A برابر خواهد شد.
- در تمام چندضلعی هایی که اضلاع آنها برابر است. نسبت محیط به تعداد اضلاع مقدار ثابتی است.
- هرگاه قطرهای دوزنقه ای را رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد می شود که دو به دو مساحت برابر دارند.
- هرگاه محیط چند شکل مختلف با هم برابر باشند؛ مساحت شکلی بیشتر است که خط تقارن بیشتری دارد.
- هرگاه مساحت چند شکل مختلف برابر باشند؛ محیط شکلی بیشتر است که خط تقارن کمتری دارد.
- اگر در چند شکل تعداد اضلاع برابر باشد مساحت شکلی بیشتر است که منظم باشد.
- مساحت هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر است.
- کایت(بادکنک): چهار ضلعی است که اضلاع مجاور آن دو به دو مساویند. توجه فرمایید که در هر کایت فقط یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. مساحت آن برابر نصف حاصلضرب دو قطر است.



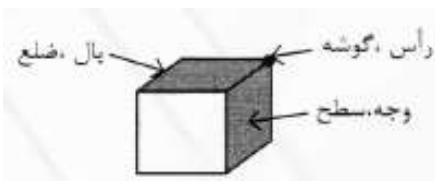
- اگر روی قاعده ی مثلثی پاره خط های مساوی وجود داشته باشد و از رأس به سر آن پاره خط ها وصل کنیم. مساحت مثلث های حاصل با هم برابر است.

- مساحت چهار مثلث داخلی که درون مثلث (آ ب ج) قرار گرفته اند با هم برابر است. بنابراین اگر مساحت مثلث بزرگ بطور مثال ۶۰ سانتی متر مربع باشد. مساحت هر یک از مثلث های کوچک برابر با ۱۵ سانتی متر مربع خواهد بود.



- اگر دو ضلع مثلثی را به نسبت های مشخصی از اضلاع قطع کنیم و پاره خط های بدست آمده را به هم وصل کنیم. مساحت مثلث ایجاد شده بصورت زیر به دست می آید.

$$\text{نسبت ضلع آن به آث} \times \text{نسبت ضلع آ م به آ ب} = \frac{\text{مساحت مثلث (آ ث ب)}}{\text{مساحت مثلث (آ ن م)}}$$



مکعب

- شش وجهی منتظم نام دیگر آن است.
- هر مکعب ۸ رأس دارد.
- هر مکعب ۲۴ زاویه قائمه دارد.
- هر مکعب ۶ وجه برابر دارد.
- هر مکعب ۱۲ ضلع یا ۱۲ یال برابر دارد.
- هر مکعب ۴ قطر برابر دارد.
- در هر مکعب سه بعد آن (طول، عرض، ارتفاع) برابرند.
- گسترده هر مکعب ۱۴ ضلع دارد.
- گسترده ی چهار وجهی منتظم محور تقارن بیشتری دارد.
- اگر از گوشه های یک مکعب، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب جدید با مساحت کل مکعب اولیه برابر است.
- اگر از وسط ابعاد یک مکعب، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب جدید از مساحت کل مکعب اولیه برابر است.
- هر گاه ابعاد مکعبی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A \times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه ابعاد مکعبی را A برابر کنیم، مساحت کل آن به اندازه $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد مکعبی را ۱۰۰٪ افزایش دهیم، یعنی دو برابر کرده ایم؛ پس حجم آن ۸ برابر می شود.
- هرگاه ابعاد مکعبی را ۱۰۰٪ افزایش دهیم، یعنی دو برابر کرده ایم؛ پس مساحت کل آن ۴ برابر می شود.
- هرگاه ابعاد قاعده ی مکعبی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A$ برابر خواهد شد.

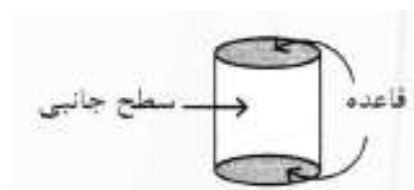
مکعب مستطیل

- سه بعد (طول، عرض، ارتفاع) دارد.

- در مکعب مستطیل تمام وجه ها الزاما مستطیل نیستند.
- هر مکعب مستطیل ۶ وجه یا ۶ طرف دارد.
- هر مکعب مستطیل دارای ۴ طول برابر، ۴ عرض برابر، ۴ ارتفاع برابر و ۴ قطر برابر دارد.
- در گسترده ی این شکل فضایی ۶ مستطیل وجود دارد که دو به دو با هم برابرند.
- به وجه های بالا و پایین آن قاعده و به وجه های دور آن وجوه جانبی می گویند. قاعده ها با هم و وجوه جانبی روبرو با هم مساویند.
- اگر از گوشه های یک مکعب مستطیل، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب مستطیل جدید با مساحت کل مکعب مستطیل اولیه برابر است.
- اگر از وسط ابعاد یک مکعب مستطیل، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب مستطیل جدید از مساحت کل مکعب مستطیل اولیه برابر است.
- هر گاه ابعاد مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A \times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه ابعاد مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت کل آن به اندازه $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد قاعده ی مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه بخواهیم حجم مکعب مستطیل به بیشترین مقدار برسد، به کوچک ترین بعد آن مقداری اضافه می کنیم.
- هرگاه بخواهیم کمترین تغییر در حجم مکعب مستطیل ایجاد شود، به بزرگترین ضلع آن مقداری اضافه می کنیم.

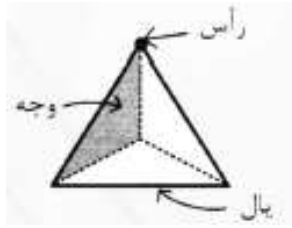
استوانه

- هر گاه شعاع قاعده ی استوانه ای را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه شعاع قاعده و ارتفاع استوانه ای را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A \times A \times A$ برابر خواهد شد.



مخروط

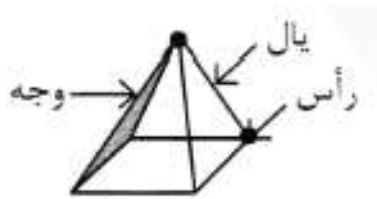




هرم قاعده مثلث

- به هرم با قاعده مثلث، چهاروجهی منتظم نیز می گویند.
- دارای چهاروجه مساوی که مثلث متساوی الاضلاع هستند می باشد.
- ۴ رأس و ۶ بعد(ضلع) دارد.
- ۴ رأس و ۴ وجه دارد.

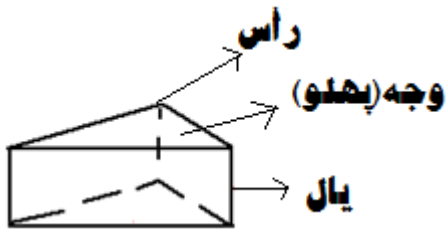
هرم قاعده مربع



۵ رأس و ۵ وجه دارد.

منشور

- هر جسمی که دارای قاعده بالا و پایین یکسان باشد و پهلوهای آن از مربع یا مستطیل ساخته شده باشد را منشور قائم می گویند. که معروف ترین آنها مکعب، مکعب مستطیل و استوانه است.
- تعداد یال های هر منشور سه برابر تعداد پهلوهای آن است.
- هر وجه منشور یک متوازی الاضلاع است.
- اگر قاعده ی منشور یک چندضلعی باشد آنگاه :



تعداد یال ها = $3 \times$ تعداد اضلاع تعداد پهلوها = تعداد اضلاع قاعده ها + ۲

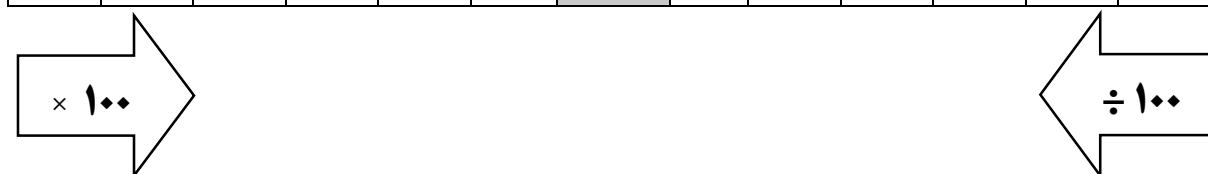
واحد های طول

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	متر	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو
-----	------	-----	------	------	-----	-----	-----	-------	------	-------	------	------



واحدهای سطح

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	متر مربع	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو
-----	------	-----	------	------	-----	----------	-----	-------	------	-------	------	------



واحدهای حجم

۱سانتی متر مکعب = ۱سی سی = ۱میلی متر = ۳۰قطره
۱دسی متر مکعب = ۱لیتر

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	مترمکعب	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو
-----	------	-----	------	------	-----	---------	-----	-------	------	-------	------	------

واحدهای گنجایش

۱ متر مکعب = ۱۰۰۰دسی متر مکعب = ۱۰۰۰لیتر = ۱۰۰۰۰۰۰۰سانتی متر مکعب = ۱۰۰۰۰۰۰۰سی سی

واحدهای جرم

۱ تن = ۱۰۰۰کیلوگرم
۱کیلوگرم = ۱۰۰۰گرم
۱تن = ۱۰۰۰۰۰۰گرم

فرمول مساحت و محیط اشکال هندسی

مربع و مکعب

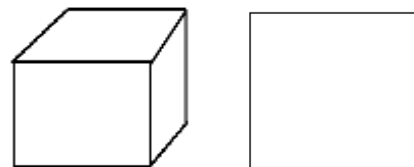
(۱) مساحت مربع = یک ضلع × خودش

محیط مربع = یک ضلع × ۴

مساحت کل مکعب = ۶ × یک ضلع × یک ضلع

مساحت جانبی مکعب = ۴ × یک ضلع × یک ضلع

حجم مکعب = یک ضلع × یک ضلع × یک ضلع = ارتفاع × مساحت قاعده = طول یال × مساحت یک وجه



مستطیل و مکعب مستطیل

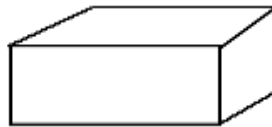
(۲) مساحت مستطیل = طول × عرض

محیط مستطیل = (طول + عرض) × ۲

مساحت جانبی مکعب مستطیل = محیط قاعده \times ارتفاع

مساحت کل مکعب مستطیل = مساحت جانبی + دو برابر مساحت قاعده = دو برابر مجموع مساحت های جانبی و فوقانی و زیری

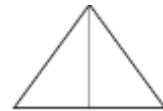
حجم مکعب مستطیل = طول \times عرض \times ارتفاع



مثلث

(۳) مساحت مثلث = (قاعده \times ارتفاع) $\div 2$

محیط مثلث = مجموع سه ضلع



(۴) مساحت مثلث متساوی الاضلاع = (قاعده \times ارتفاع) $\div 2$

محیط مثلث متساوی الاضلاع = یک ضلع $\times 3$

(۵) مساحت مثلث متساوی الساقین = (قاعده \times ارتفاع) $\div 2$

محیط مثلث متساوی الساقین = مجموع سه ضلع

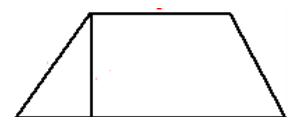
(۶) مساحت مثلث قائم الزاویه = (قاعده \times ارتفاع) $\div 2$

محیط مثلث قائم الزاویه = مجموع سه ضلع

دوزنقه

(۷) مساحت دوزنقه = (قاعده بزرگ + قاعده کوچک) \times ارتفاع $\div 2$

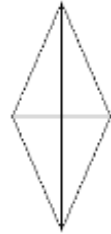
محیط دوزنقه = مجموع چهار ضلع



لوزی

$$(۸) \text{ مساحت لوزی} = (\text{قطر بزرگ} \times \text{قطر کوچک}) \div ۲$$

$$\text{محیط لوزی} = \text{یک ضلع} \times ۴$$



متوازی الاضلاع

$$(۹) \text{ مساحت متوازی الاضلاع} = \text{ارتفاع} \times \text{قاعدۀ}$$

$$\text{محیط متوازی الاضلاع} = \text{مجموع دو ضلع متوالی} \times ۲$$



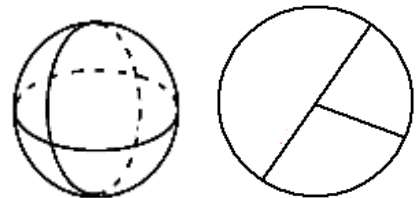
دایره ، کره و بیضی

$$(۱۰) \text{ مساحت دایره} = \text{عدد پی} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} = \text{عدد پی} \times \text{مجذور شعاع}$$

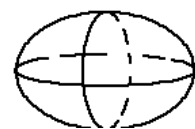
$$\text{محیط دایره} = \text{عدد پی} \times \text{قطر}$$

$$\text{مساحت کره} = \text{چهار عدد پی} \times \text{مجذور شعاع} = ۴ \times \text{عدد پی} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع}$$

$$\text{حجم کره} = \text{چهار سوم عدد پی} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times \text{شعاع}$$



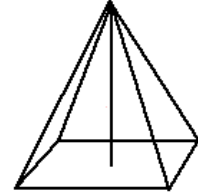
$$(۱۱) \text{ مساحت بیضی} = (\text{نصف قطر بزرگ} \times \text{نصف قطر کوچک}) \times \text{عدد پی}$$



هرم

۱۲) حجم هرم = مساحت قاعده \times ارتفاع \times یک سوم

مساحت کل هرم (با قاعده مثلث) = مساحت یک وجه $\times 4$



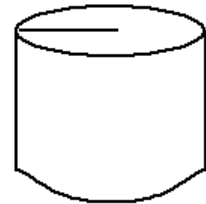
استوانه

۱۳) مساحت جانبی استوانه = محیط قاعده \times ارتفاع

حجم استوانه = مساحت قاعده \times ارتفاع = مجذور شعاع در ارتفاع در عدد پی

سطح کل استوانه = سطح دو قاعده + مساحت جانبی (مساحت مجموع دو قاعده + ارتفاع \times پیرامون قاعده)

مساحت استوانه = دو برابر شعاع در ارتفاع در عدد پی



مخروط

۱۴) حجم مخروط = مساحت قاعده \times یک سوم \times ارتفاع

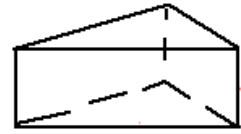
مساحت مخروط = شعاع در مولد مخروط در عدد پی



منشور

۱۵) مساحت جانبی منشور = مجموع مساحت سطوح جانبی = محیط قاعده \times ارتفاع

مساحت کلی منشور = مجموع مساحت دو قاعده + مجموع مساحت سطوح جانبی

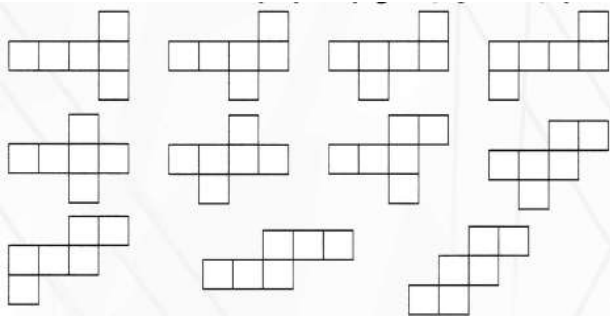


(۱۶) حجم متوازی السطوح = مساحت قاعده در ارتفاع

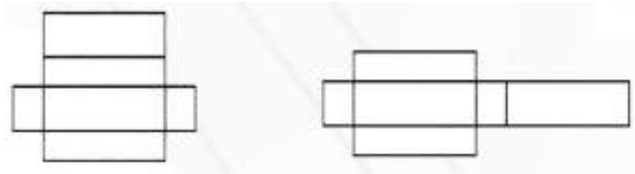
(۱۷) محیط چند ضلعی منتظم = یک ضلع × تعداد اضلاعش

گسترده ی حجم های هندسی

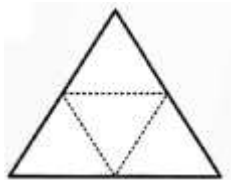
مکعب



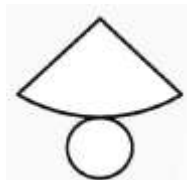
مکعب مستطیل



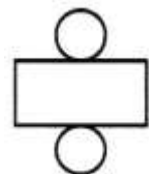
هرم قاعده مثلث



مخروط



استوانه



منشور



هرم قاعده مربع

