

شامل دوم: کسر



مفهوم کسر: کسر یعنی تکه تکه کردن یا خورد کردن یا شکستن. کسر از سه قسمت اصلی تشکیل شده که عبارتند از:

- ۱- صورت
- ۲- مخرج
- ۳- خط کسری که وسط صورت و مخرج قرار می گیرد

انواع کسر

- کسر مساوی صفر: به کسری گفته می شود که صورت آن صفر باشد.
- کسر مساوی صورت: به کسری گفته می شود که مخرجش یک باشد.
- کسر مساوی واحد: کسری که صورت و مخرج آن برابر باشد. در این صورت کسر مساوی ۱ است.
- کسر کوچکتر از واحد: به کسری گفته می شود که صورت از مخرج کوچکتر باشد.
- کسر بزرگتر از واحد: به کسری گفته می شود که صورت از مخرج بزرگتر باشد.
- کسرهای مساوی: به کسری گفته می شود که صورت و مخرج به یک اندازه اضافه شوند.
- کسرهای مساوی با یک کسر، کاربردهای بسیاری دارند که یکی از آنها در جمع و تفریق کسرها می باشد. محاسبه ی مخرج مشترک دو کسر به همین صورت انجام می پذیرد.
- اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی (غیر از صفر) مثل ۳ ضرب کنیم. مجموع و تفاضل صورت و مخرج هم در همان عدد ۳ ضرب شده است. و کسر حاصل مساوی با آن است. و مقدار آن تغییری نمی کند. مانند:

$$\frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12+15-27 \\ 27-(4+5) \times 3 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} 15-12-3 \\ 3-(5-4) \times 3 \end{array} \right.$$

- اگر صورت و مخرج یک کسر را بر عددی (غیر از صفر) مثل ۳ تقسیم کنیم. مجموع و تفاضل صورت و مخرج هم بر همان عدد ۳ تقسیم شده است. و کسر حاصل مساوی با آن است. و مقدار آن تغییری نمی کند.
- مقایسه کسرها:** برای مقایسه کردن دو کسر سه حالت وجود دارد:

- ۱- کسرهایی با مخرج های مساوی: کسری بزرگ تر است که صورت آن بزرگ تر باشد $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$
- ۲- کسرهایی با صورت های مساوی: کسری بزرگتر است که مخرجش کوچکتر باشد. $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$
- ۳- کسرهایی با مخرج های نامساوی: باید آن ها را هم مخرج کرد تا بتوان مقایسه ی کسرها را مثل نمونه اول انجام داد.

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$



- برای مقایسه کسرها روش سریع تری نیز وجود دارد در این روش به صورت ضرب طرفین وسطین عمل میکنیم.
- یعنی مخرج یک کسر را در صورت کسر دیگر ضرب می کنیم. حاصل ضرب بیشتر، کسر بزرگتر را نشان می دهد.

جمع کسرها:

برای جمع کردن دو کسر ابتدا باید آنها را هم مخرج کرد بعد یکی از مخرج ها را نوشته و صورت ها را با هم جمع می کنیم.

به روش معمول

- در جمع کسرها ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم
- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را با هم جمع می کنیم.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا با هم جمع می‌کنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج‌ها نگاه می‌کنیم

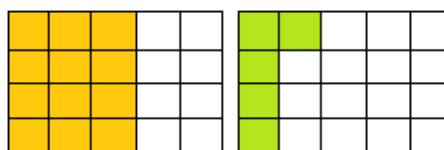
$$\frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$$

به کمک شکل

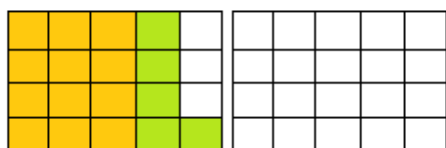
برای کشیدن شکل دو راه وجود دارد:

- بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل شکل می‌کشیم. برای کشیدن شکل نگاه می‌کنیم مخرج کسرها حاصلضرب کدام دو عدد هستند. در این مثال 4×5 است. به همین دلیل طول مستطیل را به 5 و عرض آن را به 4 قسمت تقسیم می‌کنیم. و سپس هر شکل را به تعداد یکی از عامل‌ها رنگ می‌کنیم.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} + \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$$



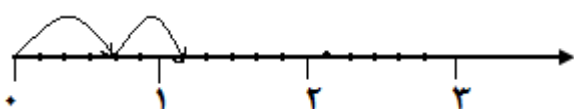
- بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل شکل می‌کشیم. و سپس عامل اول را روی شکل نشان داده و عامل دوم را در ادامه آن روی همان شکل نشان می‌دهیم و اگر از یک شکل بیشتر شد ادامه را روی شکل دوم نشان می‌دهیم.



$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} + \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$$

به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. (در جمع دو کسر محور را حداکثر تا 3 واحد کامل تقسیم بندی می‌کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می‌کنیم و سپس به اندازه کسر دوم از محل کسر اول به جلو می‌رویم.



$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = 1 \frac{1}{6}$$

تفریق کسرها :

برای تفریق کسرها نیز مانند جمع آنها عمل می‌کنیم .

به روش معمول

در تفریق کسرها ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می‌کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج‌ها را نوشته و سپس صورت‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

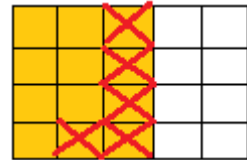
- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا از هم کم می‌کنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج‌ها نگاه می‌کنیم

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

به کمک شکل

- بعد از هم منفرجه کردن، برای **عامل اول** شکل می کشیم. و سپس شکل را به اندازه کسر اول رنگ کرده و به اندازه کسر دوم از قسمت های رنگی کم می کنیم.

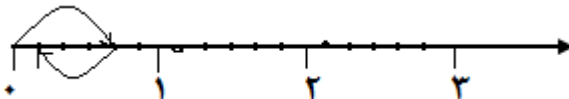
$$\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$$



به کمک محور

- بعد از هم منفرجه کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد منفرجه به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (در تفریق دو کسر محور را حداکثر تا ۳ واحد کامل تقسیم بندی می کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس به اندازه کسر دوم از محل کسر اول به سمت عقب حرکت می کنیم.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$



کردن کسرها:

ساده

۱. برای ساده کردن کسرها، باید عددی از صورت و عددی از منفرجه را انتخاب کرده و هر دو را بر یک عدد ثابت تقسیم کرد. ترتیب انتخاب اعداد مهم نیست. یعنی میتوان صورت یک کسر را با منفرجه کسر دیگر ساده کرد به شرطی که بین دو کسر عمل ضرب باشد.
۲. ساده کردن در کسرها زمانی امکان دارد که بین اعداد فقط عمل ضرب باشد، به یاد داشته باشید که صورت با صورت و منفرجه با منفرجه هرگز ساده نمی شود.
۳. در ساده کردن کسرها، صورت و منفرجه ها را تا حد ممکن ساده می کنیم.
۴. با ساده کردن کسرها به اعداد کوچکتر می رسیم که استفاده از آنها در محاسبات، کار را بسیار آسان می کند.

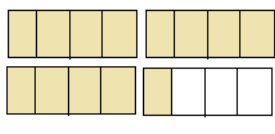
• حل مسئله: راهبرد رسم شکل

برای مثال: $\frac{1}{3}$ نمازگزاران یک مسجد آقایان و $\frac{2}{3}$ بقیه خانم ها هستند. چه کسری از نمازگزاران کودکان هستند؟
با توجه به شکل، $\frac{1}{6}$ نمازگزاران را کودکان تشکیل می دهند.

خانم ها	آقایان
کودکان	

درس اول: عدد مخلوط

عدد مخلوط: به کسری گفته می شود که تشکیل شده از چهار جزء که عبارتند از:



- ۱- عدد صحیح که پشت خط کسری قرار می گیرد. (واحد کامل)
 - ۲- صورت
 - ۳- منفرجه
 - ۴- خط کسری.
- شکل مقابل یک عدد مخلوط را نشان می دهد. ۳ واحد و $\frac{1}{4}$ از یک واحد (کسر کوچکتر از واحد)

۳

از طرفی می توان گفت، $\frac{1}{4}$ برابر با $\frac{13}{4}$ یا $\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{4}$ است

تبدیل کسر به عدد مخلوط

الف) روش گسترده (طولانی)

$$\frac{9}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ب) روش تقسیم کردن (کوتاه)

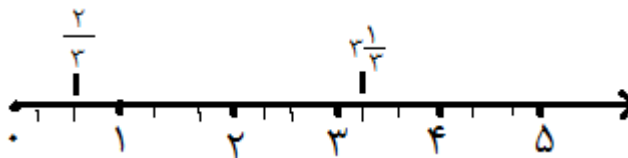
$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

تبدیل عدد مخلوط به کسر

$$2\frac{1}{4} = \frac{(2 \times 4) + 1}{4} = \frac{8 + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

نمایش روی محور

- برای نشان دادن یک کسر روی محور اعداد ابتدا باید هر واحد را به اندازه مخرج کسر تقسیم کرد. یعنی اگر کسر $\frac{2}{4}$ بود، ابتدا هر واحد را به 4 قسمت تقسیم کرده و سپس از صفر شروع کرده و 3 قسمت شمرده و علامت می گذاریم.
- برای نشان دادن عدد مخلوط روی محور، ابتدا هر واحد را به تعداد کل قسمت ها (مخرج کسر) تقسیم کرده، سپس از واحد کامل به تعداد قسمت های صورت کسر (ریز واحدها) به آن اضافه می کنیم.
- به قسمت بین دو عدد کامل پشت سر هم یک واحد کامل گفته می شود. مثلاً بین 1 و 2 یک واحد کامل است. هرگاه واحدی را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم. آن قسمت های کوچک، هر یک «ریز واحد» نامیده می شوند.



درس دوم: جمع و تفریق اعداد مخلوط

جمع اعداد مخلوط

- اصل مهم در جمع اعداد مخلوط، هم مخرج بودن اعدادی است که می خواهیم با هم جمع کنیم.

به روش معمول

جمع دو عدد مخلوط:

در جمع اعداد مخلوط ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، اعداد صحیح را با هم جمع کرده یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را با هم جمع می کنیم.

$$2\frac{3}{5} + 3\frac{1}{5} = 5\frac{4}{5}$$

✓ اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا با هم جمع می کنیم.

$$2\frac{3}{5} + 3\frac{2}{10} = 2\frac{3 \times 2}{5 \times 2} + 3\frac{2}{10} = 2\frac{6}{10} + 3\frac{2}{10} = 5\frac{8}{10}$$

جمع عدد مخلوط با عدد صحیح:

- اعداد صحیح را با هم جمع کرده و کسر را در جلوی پاسخ آن دو می نویسیم.

$$2\frac{3}{5} + 5 = 7\frac{3}{5}$$

به کمک شکل

بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل عامل شکل می کشیم. و سپس هر عامل را روی شکل های جداگانه نمایش می دهیم. (نیازی به تقسیم بندی واحدهای کامل نیست).

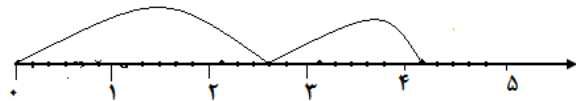
$$2\frac{3}{5} + 1\frac{1}{4} = 2\frac{3 \times 4}{5 \times 4} + 1\frac{1 \times 5}{4 \times 5} = 2\frac{12}{20} + 1\frac{5}{20} = 3\frac{17}{20}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس عامل دوم را به کسر تبدیل کرده و به اندازه صورت از محل عامل اول به جلو می رویم.

$$2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} = 2\frac{2 \times 2}{3 \times 2} + 1\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = 2\frac{4}{6} + 1\frac{3}{6} = 3\frac{7}{6} = 4\frac{1}{6}$$



تفریق اعداد مخلوط

• اصل مهم در تفریق اعداد مخلوط، هم مخرج بودن اعدادی است که می خواهیم آن ها را از هم کم کنیم.

به روش معمول

✓ تفریق دو عدد مخلوط:

• کسر عدد دوم کوچکتر از کسر عدد اول باشد

در تفریق اعداد مخلوط ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را از هم کم می کنیم.

$$3\frac{3}{5} - 2\frac{1}{5} = 1\frac{2}{5}$$

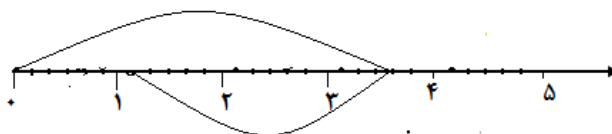
- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا از هم کم می کنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج ها نگاه می کنیم

$$2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{10} = 2\frac{3 \times 2}{5 \times 2} - 1\frac{2}{10} = 2\frac{6}{10} - 1\frac{2}{10} = 1\frac{4}{10}$$

• کسر عدد دوم بزرگتر از کسر عدد اول باشد.

- در این حالت پس از هم مخرج کردن، یک واحد از عدد صحیح اول کم کرده و به اندازه مخرج به صورت آن اضافه می کنیم. و سپس عملیات تفریق را انجام می دهیم.

$$4\frac{2}{5} - 2\frac{2}{3} = 4\frac{2 \times 4}{5 \times 4} - 2\frac{2 \times 5}{4 \times 5} = 4\frac{8}{20} - 2\frac{10}{20} = 3\frac{28}{20} - 2\frac{10}{20} = 1\frac{18}{20}$$



✓ تفریق عدد مخلوط از عدد صحیح:

- برای تفریق عدد مخلوط از عدد صحیح، ابتدا باید عدد صحیح را به یک عدد مخلوط تبدیل کرد. به این ترتیب که یک واحد از عدد صحیح کم کرد و سپس با توجه به مخرج کسر بعدی یک کسر واحد جلوی عدد جدید نوشت. و تفریق را طبق اصل بالا انجام می دهیم.

$$5 - 2\frac{3}{10} = 4\frac{10}{10} - 2\frac{3}{10} = 2\frac{7}{10}$$

$$3 - \frac{3}{7} = 2\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 2\frac{4}{7}$$

✓ تفریق عدد صحیح از عدد مخلوط:

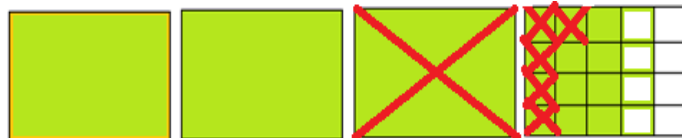
- برای تفریق عدد صحیح از عدد مخلوط، ابتدا اعداد صحیح را از هم کم کرده و سپس کسر را در مقابل حاصل می نویسیم.

$$3\frac{2}{5} - 2 = 1\frac{2}{5}$$

به کمک شکل

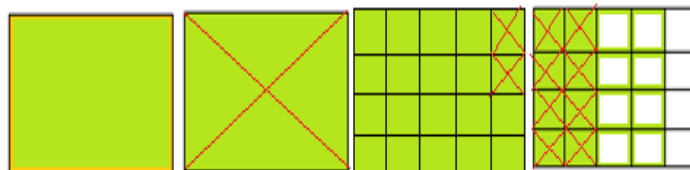
- بعد از هم مخرج کردن، برای عامل اول شکل می کشیم. و سپس شکل را به اندازه عدد مخلوط اول رنگ کرده و سپس به اندازه عدد مخلوط دوم از قسمت های رنگی کم می کنیم.

$$3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{4} = 3\frac{2 \times 4}{5 \times 4} - 1\frac{1 \times 5}{4 \times 5} = 3\frac{8}{20} - 1\frac{5}{20} = 2\frac{7}{20}$$



- اگر کسر دوم از کسر اول بزرگتر بود، یکی از واحد های کامل را تقسیم بندی می کنیم.

$$3\frac{2}{5} - 1\frac{2}{3} = 3\frac{2 \times 4}{5 \times 4} - 1\frac{2 \times 5}{4 \times 5} = 3\frac{8}{20} - 1\frac{10}{20} = 2\frac{28}{20} - 1\frac{10}{20} = 1\frac{18}{20}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (در تفریق دو عدد مخلوط محور را حداکثر تا ۱ واحد کامل بیشتر از عدد صحیح عامل اول تقسیم بندی می کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس عامل دوم را به صورت کسر در آورده و به اندازه صورت کسر حاصل از محل عامل اول به سمت عقب حرکت می کنیم.

$$3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 3\frac{2 \times 2}{3 \times 2} - 2\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = 3\frac{4}{6} - 2\frac{3}{6} = 1\frac{1}{6}$$

درس سوم: ضرب کسرها

ضرب کسر در کسر

به روش معمول

- در ضرب دو کسر هم مخرج بودن آنها مهم نیست.
- برای ضرب دو کسر ابتدا نگاه می کنیم آیا قابل ساده شدن هستند یا خیر؟ اگر ساده شد ابتدا ساده کرده و سپس ضرب را انجام می دهیم.

برای ضرب کسرها، صورت ها را در هم و مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

$$\frac{15}{18} \times \frac{12}{25} = \frac{15}{18} \times \frac{12}{25} = \frac{3}{18} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{6} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

به کمک شکل

- ابتدا یک مستطیل کشیده:
- مستطیل را از طول به اندازه مخرج کسر دوم تقسیم کرده و سپس به اندازه صورت آن قسمت های تقسیم شده را بصورت عمودی رنگ می کنیم.
 - عرض مستطیل را به اندازه مخرج کسر اول تقسیم کرده و سپس به اندازه صورت آن قسمت های تقسیم شده را بصورت افقی رنگ می کنیم.
 - حاصل ضرب برابر است با کسری که صورت آن برابر قسمتهای دو رنگ و مخرج آن برابر کل قسمت های مستطیل است.

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$



کسر در عدد صحیح

روش معمول

- در ضرب دو کسر هم مخرج بودن آنها مهم نیست.
- برای ضرب ابتدا نگاه می کنیم آیا قابل ساده شدن هستند یا خیر؟ اگر ساده شد ابتدا ساده کرده و سپس ضرب را انجام می دهیم.
- برای ضرب کسر در عدد صحیح ، به عدد صحیح مخرج یک داده و سپس صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

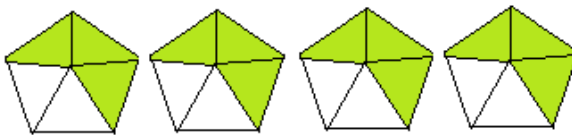
$$\frac{15}{18} \times 27 = \frac{15}{18} \times \frac{27}{1} = \frac{15}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} \times \frac{4}{1} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

به کمک شکل

- به تعداد عدد صحیح شکل می کشیم.
- شکل ها را به اندازه مخرج کسر تقسیم کرده و به اندازه صورت آن رنگ می کنیم.

- حاصل ضرب برابر است با کسری که صورت آن برابر مجموع قسمت های رنگی و مخرج آن برابر کل قسمت های یکی از شکل ها است.

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$



بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج های مساوی تقسیم می کنیم. و سپس کسر مشخص کرده از صفر یک کمان به محل

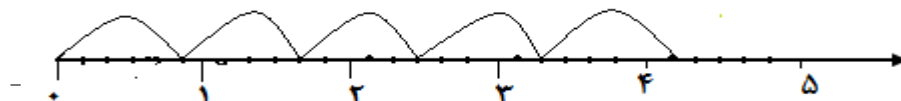
به کمک محور

- ابتدا کسر به قسمت را روی محور

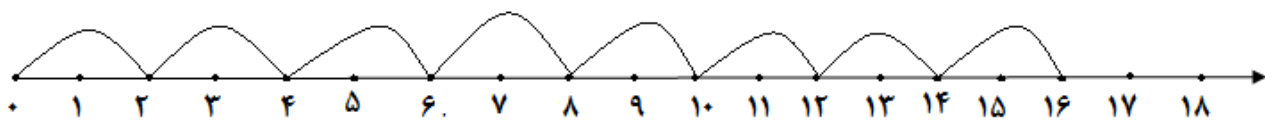
مورد نظر وصل می کنیم و بعد از آن به تعداد عدد صحیح کان را تکرار می کنیم.

$$\frac{5}{6} \times 5 = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

نوع دیگری از محور نیز



وجود دارد. که به شکل زیر است:



در این نوع از محور باید حاصلضرب یا صورت کسر را داده تا ما بتوانیم جاهای خالی را پر کنیم.

$$12 = \frac{6}{8} \times \dots \quad \text{یا} \quad \frac{6}{8} \times 16 = 12$$

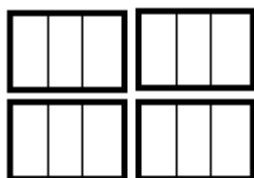
شماره کمانی که روی عدد مدنظر فرود آمده
تعداد کل کمان ها

عدد مد نظر یا حاصل = عددی که آخرین کمان روی آن فرود آمده ×

درس چهارم: تقسیم کسرها

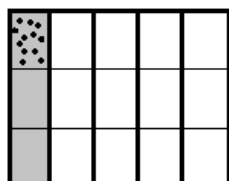
برای انجام تقسیم کسرها دو روش وجود دارد:

✓ ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و سپس آن را حل می کنیم. برای تبدیل تقسیم به ضرب به روش زیر عمل می کنیم: کسر اول را نوشته، علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و سپس کسر دوم را معکوس می کنیم و عمل ضرب را انجام می دهیم.



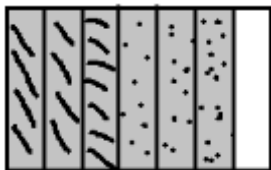
- $4 \div \frac{1}{3} =$ یعنی در 4 واحد کامل چندتا $\frac{1}{3}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این

تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $4 \times \frac{3}{1} = \frac{12}{1} = 12$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:

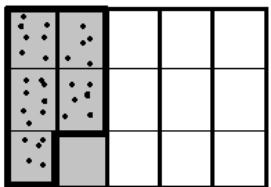


- $3 = \frac{1}{5} \div \frac{1}{5}$ اگر $\frac{1}{5}$ شکلی را به 3 قسمت مساوی تقسیم کنیم، چه کسری از کل شکل می شود؟

با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:



- $\frac{6}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{6}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$ یعنی در $\frac{6}{15}$ چند تا $\frac{3}{5}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{6}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:



- ابتدا مخرج ها را یکی کرده: $\frac{6}{15} \div \frac{3}{5} = \frac{6}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$ چندتا $\frac{5}{15}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{6}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم: حال می بینیم که در $\frac{6}{15}$ یک عدد $\frac{5}{15}$ وجود دارد و $\frac{1}{5}$ باقی می ماند. دور در دور و نزدیک در نزدیک: از این روش، فقط در مواقعی که لازم باشد استفاده می کنیم. ✓

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{4 \times 7}{2 \times 5} = \frac{2 \times 7}{1 \times 5} = \frac{14}{5} = 2 \frac{4}{5}$$

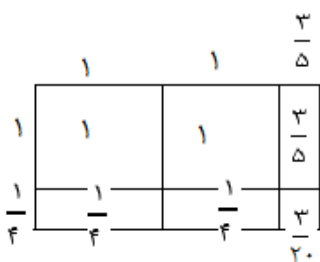
- اگر جای صورت و مخرج کسری را عوض کنیم، کسر حاصل را «معکوس» یا «وارون» کسر اول می نامند.
- اعداد مخلوط را ابتدا به کسر تبدیل کرده، سپس معکوس می کنیم.
- در تقسیم کسرها کافی است کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب کنیم.
- تقسیم برعکس ضرب می باشد، یعنی می توان هر تقسیمی را به ضرب تبدیل کرد.
- معکوس معکوس یک کسر برابر با خود آن کسر است.
- حاصلضرب یک کسر در معکوسش برابر یک می باشد.
- صفر معکوس ندارد. زیرا برای معکوس کردن صفر باید آن را بصورت $\frac{1}{0}$ درآوریم و اگر بخواهیم جای صورت و مخرج را عوض کنیم، صفر به مخرج می رود و این قابل قبول نیست. یعنی کسر تعریف نشده می شود.

درس پنجم: ضرب عددهای مخلوط

برای ضرب اعداد مخلوط ابتدا آن ها را به کسر تبدیل کرده و سپس حل می نماییم.

$$2 \frac{3}{5} \times 1 \frac{1}{4} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{13}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{4} = 3 \frac{1}{4}$$

ضرب عدد های مخلوط با روش مساحتی (مساحت مستطیل / به کمک شکل)



ابتدا مستطیلی رسم کرده، سپس عدد های مخلوط را روی ضلع های آن مشخص می کنیم. آن گاه مساحت قسمت های ایجاد شده را بدست آورده سپس مجموع آنها را محاسبه می کنیم. عدد حاصل، حاصلضرب دو عدد مخلوط داده شده می باشد.

$$1 \frac{1}{4} \times 2 \frac{3}{5} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = 2 + \frac{5}{20} + \frac{5}{20} + \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = 2 + \frac{25}{20} = 2 + 1 \frac{5}{20} = 3 \frac{5}{20}$$

مقایسه اعداد مخلوط

برای مقایسه اعداد مخلوط باید این اصل را در نظر گرفت که عدد مخلوطی بزرگ تر است که قسمت صحیح بزرگتری داشته باشد.

اگر دو عدد مخلوط دارای قسمت صحیح برابری باشند قسمت کسری آن ها را با هم مقایسه می کنیم.

نکات تکمیلی

✓ نوشتن چند کسر بین دو کسر

چهار روش برای پیدا کردن چند بین دو کسر مشخص وجود دارد:

• روش اول: هم مخرج کردن

برای پیدا کردن دو کسر بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{8}$: ابتدا با هم خرج کردن معلوم می کنیم کدام کسر بزرگتر است. برای این کار صورت

$$\text{و مخرج هر کسر را در مخرج کسر دیگر ضرب می کنیم.} \quad \frac{1}{3} = \frac{8}{24} \quad \text{و} \quad \frac{1}{8} = \frac{3}{24} \quad \text{پس:} \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{24} > \frac{7}{24} > \frac{6}{24} > \frac{5}{24} > \frac{4}{24} > \frac{3}{24}$$

فرمول پیدا کردن تعداد مشخصی کسر بین دو کسر متوالی: صورت و مخرج هر دو کسر را در «یکی بیشتر از تعداد خواسته شده» ضرب کرده سپس می توان به تعداد خواسته شده بین آن دو کسر نوشت.

• روش دوم: کسر بین دو کسر متوالی

$$\text{برای پیدا کردن دو کسر بین} \quad \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{: ابتدا هم خرج میکنیم} \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \quad \text{پس:} \quad \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$$

ظاهراً بین $\frac{15}{15}$ و $\frac{6}{15}$ کسری وجود ندارد ولی اگر صورت و مخرج کسرها را در ۳ ضرب کنیم. بین آنها دو کسر خواهیم یافت.

$$\frac{18}{45} > \frac{17}{45} > \frac{16}{45} > \frac{15}{45} \quad \frac{18}{45} = \frac{6}{15} \quad \text{و} \quad \frac{15}{45} = \frac{5}{15}$$

• روش سوم: جمع صورت ها و مخرج ها

برای پیدا کردن کسرها بین دو کسر با مخرج نا مشخص:

$$\text{مجموع صورت دو کسر} = \frac{\text{مجموع صورت دو کسر}}{\text{مجموع مخرج دو کسر}} = \text{کسریین دو کسر}$$

اگر بخواهیم چند کسر بنویسیم این کار را میتوان چندین بار تکرار کرد.

$$\frac{1}{2} > \frac{3}{7} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8} > \frac{1}{3} \quad \leftarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{8} > \frac{1}{3} \quad \leftarrow \quad \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{1}{3} \quad \text{: برای پیدا کردن دو کسر بین} \quad \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}$$

• روش چهارم: میانگین دو کسر

میانگین هر دو عدد بین آن دو قرار دارد.

$$\text{برای پیدا کردن دو کسر بین} \quad \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{:} \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15} \quad \frac{11}{15} \div 2 = \frac{11}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{30}$$

✓ تفکیک کسرها

می دانید اگر در صورت یک کسر دو یا چند عدد با هم جمع یا از هم کم شده باشند میتوان آن را بصورت چند کسر تفکیک شده نوشت. اما دقت کنید این قاعده برای زمانی که در صورت یک کسر ضذب یا تقسیم وجود دارد کاربرد ندارد.

$$\frac{11 \div 3}{15} \neq \frac{11}{15} \div 3 \quad \frac{11 \times 3}{15} \neq \frac{11}{15} \times 3 \quad \frac{2-1}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \quad \frac{2+1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

• اگر در یک عبارت بین اعداد پرانتز یا گروه قرار داده نشده باشد و در آن عمل های ضرب، تقسیم، جمع و تفریق وجود داشته باشد. عمل ضرب و تقسیم نسبت به جمع و تفریق زودتر باید انجام شوند. (تقدم ضرب)

➤ کسر مسلسل

این نوع کسر ها که به کسرهای مسلسل یا طبقاتی مشهورند در مخرج یا صورتشان میتوان کسرهای دیگری هم پیدا کرد که بصورت طبقه ای قرار گرفته اند. معمولا برای حل این نوع کسرها از آخرین کسر موجود در مخرج یا صورت عملیات را شروع می کنیم تا به ساده ترین کسر اولیه برسیم. =

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4+3}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{7+4}{7}} = \frac{1}{\frac{11}{7}} = \frac{7}{11}$$

• هرگاه روی یک کسر صورت یک قرار بگیرد، آن کسر معکوس خواهد شد.

✓ اگر دو کارگر یک کار را در زمانهای مختلفی یکی در A دقیقه و دیگری در B دقیقه انجام دهند در صورتی که کار را به هر دوی آنها بسپاریم، زمان انجام کار بصورت زیر خواهد شد:

$$\frac{B \times A}{B + A} = \text{زمان انجام کار هر دو با هم} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{حاصلضرب زمان انجام کار ۲ کارگر}}{\text{مجموع زمان انجام کار ۲ کارگر}} = \text{زمان انجام کار هر دو با هم}$$

اگر تعداد افراد بیش از دو نفر باشد از این فرمول استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{\text{انجام زمان کار}} = \frac{1}{\text{زمان کار نفر اول}} + \frac{1}{\text{زمان کار نفر دوم}} + \frac{1}{\text{زمان کار نفر سوم}} + \dots$$

✓ چنانچه دو نفر کاری را با هم در A دقیقه و یکی از آنها به تنهایی آن کار را در B دقیقه انجام دهد. اگر بخواهیم بدانیم دیگری کار را در چه مدت تمام خواهد کرد از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{B \times A}{B - A} = \text{زمان انجام کار کارگر دوم}$$

✓ اگر منبع آبی دارای دو شیر ورودی و یک شیر خروجی باشد. و هم زمان هر سه شیر را باز کنیم پر شدن منبع بصورت زیر بدست می آید.

$$\frac{1}{\text{زمان پر شدن منبع}} = \frac{1}{\text{زمان شیر خروجی اول}} + \frac{1}{\text{زمان شیر ورودی دوم}} - \frac{1}{\text{زمان شیر ورودی اول}}$$

✓ استخری به تنهایی توسط شیر آب اول در A ساعت، توسط شیر دوم به تنهایی در B ساعت، ... پر می شود. همچنین توسط چاه تخلیه اول به تنهایی در X ساعت، توسط چاه تخلیه دوم در Y ساعت، ... خالی می شود. اگر همه با هم باز باشند، زمان پر شدن آن از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{\text{زمان پر شدن منبع}} = \left(\frac{1}{\text{زمان شیر ورودی اول}} + \frac{1}{\text{زمان شیر ورودی دوم}} + \dots \right) - \left(\frac{1}{\text{زمان شیر خروجی اول}} + \frac{1}{\text{زمان شیر خروجی دوم}} + \dots \right)$$