

ریاضیات ۲
دوم ریاضی تجربی افنی
پانچ کامل مسائل کتاب درسی

مؤلف: محمد حسین مصلحی

دبیر رسمی آموزش پرورش اصفهان



Email : info@riazisara.com

phone : ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

هرگونه انتشار بدون تغییر در صفحات مجاز است.

فهرست مطالب:

در صفحه	حل تمرین	در صفحه	حل تمرین
۳۱	صفحه ۹۵	۴	صفحه ۵
۳۴	صفحه ۱۱۵	۵	صفحه ۹
۳۶	صفحه ۱۱۷	۷	صفحه ۱۲
۴۰	صفحه ۱۲۸	۹	صفحه ۱۶
۴۱	صفحه ۱۳۳	۱۱	صفحه ۲۱
۴۴	صفحه ۱۳۸	۱۲	صفحه ۲۳
۴۶	صفحه ۱۵۱	۱۳	صفحه ۳۱
۴۹	صفحه ۱۵۷	۱۵	صفحه ۴۰
۵۱	صفحه ۱۶۷	۱۶	صفحه ۴۲
۵۲	صفحه ۱۷۳	۱۷	صفحه ۴۵
۵۴	صفحه ۱۸۱	۱۸	صفحه ۵۱
۵۵	صفحه ۱۸۵	۲۱	صفحه ۶۱
۵۶	صفحه ۱۹۰	۲۳	صفحه ۶۳
		۲۴	صفحه ۷۰
		۲۹	صفحه ۸۳



دروبر مردمانی که در مقابل ظلم سکوت ذلت بار اختیار نکردند.
دروبر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه در اختیار اوست.
دروبر دانش آموز، تنها امید بر آینده ای روشن.

این کتاب الکترونیکی پیشگویی است به حضور فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

- ۱- استفاده برفی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.
 - ۲- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار.
 - ۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم مزبور متهم به بد درس دادن و پیچیده کردن حل مساله می گردد .. پاسنهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.
 - ۴- برفی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صعب سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.
- به دلایلی که برفی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم. تلاش بر این است در ویرایشهای بعدی مطالب و تمریناتی به این کتاب افزوده گردد.

مشتاخانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصلحی

دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

دی ماه سال ۱۳۹۲

www.riazisara.com

info@riazisara.com

۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

آدرس سایت

آدرس پست الکترونیکی

شماره همراه جهت تماس (sms)

$$a_n = 2 + 4n \text{ یعنی } 6, 10, 14, 18, 22, \dots - 2 \quad a_n = 4n \text{ یعنی } \begin{array}{c|cccc} n & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline a_n & 4 & 8 & 12 & \dots & 4n \end{array} - 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a_n & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array} \Rightarrow a_n = 2^n - 2 \quad a_n = 3n \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a_n & 3 & 6 & 9 & 12 \end{array} - 3$$

$$\text{الف)} \quad a_n = \frac{2n}{n+1}, a_1 = \frac{2(1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1, a_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{2(3)}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} - 5$$

$$a_4 = \frac{2(4)}{4+1} = \frac{8}{5} \Rightarrow 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots$$

$$\text{ب)} \quad a_n = 3n^2 - \frac{1}{n}, a_1 = 3(1)^2 - \frac{1}{1} = 2, a_2 = 3(2)^2 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

$$a_3 = 3(3)^2 - \frac{1}{3} = \frac{80}{3}, a_4 = 3(4)^2 - \frac{1}{4} = \frac{191}{4} \Rightarrow 2, \frac{23}{2}, \frac{80}{3}, \frac{191}{4}, \dots$$

$$\text{ج)} \quad a_n = 2^n - n^2, a_1 = 2^1 - 1^2 = 1, a_2 = 2^2 - 2^2 = 0$$

$$a_3 = 2^3 - 3^2 = -1, a_4 = 2^4 - 4^2 = 0 \Rightarrow 1, 0, -1, 0, \dots$$

$$\frac{3n}{n+2} \Rightarrow 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \dots \quad (-3)^{n-1} \Rightarrow 1, -3, 9, \dots \quad n^2 + 5n \Rightarrow 6, 14, 24, \dots - 6$$

$$-7 \text{ فیبر - زیرا ضابطه اعداد } \frac{n}{n+1} \text{ است } \frac{1}{2} + n \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1, -\frac{1}{2} + 2, -\frac{1}{2} + 3, \dots \Rightarrow \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$$\begin{array}{c|cccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline a_n & 800 & 1200 & 1400 & 1500 \end{array} \Rightarrow - 8$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1600 + a_n), a_1 = 800 \quad \text{ابطه بین } a_{n+1}, a_n \text{ برابر}$$

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - a_{n-1}}{2}, n \geq 2, a_1 = 800, a_2 = 1200 \quad \text{شکل دیگر، ابطه}$$

$$a_n = \frac{800 + (2^{n-1} - 1)(1600)}{2^{n-1}}, n \geq 1 \quad \text{و ابطه مستقیم}$$

$$-۱) \text{ دنباله حسابی نیست} \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب) دنباله حسابی است با قدر نسبت } -۳ \Rightarrow -۳ = -۳ \Rightarrow -۱۸ - (-۵) = -۲۱ - (-۱۸) \Rightarrow -۱۸ - (-۵) = -۲۱ - (-۱۸)$$

$$\text{ج) دنباله حسابی نیست} \Rightarrow \frac{1}{6} \neq \frac{1}{۱۲} \Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$$

$$\text{د) دنباله حسابی است با قدر نسبت } \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$d = 3 - 10 = -7 \Rightarrow 10, 3, -4, -11, -18, \dots$$

$$d = 10 - 3 = 7 \Rightarrow 3, 10, 17, 24, 31, 38, \dots$$

-۲ دو حالت می توان در نظر گرفت

$$-۳) \text{ قدر نسبت } a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow a_n - a_{n-1} = d \text{ تعریف دنباله حسابی}$$

$$-۴) x, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{3} - x = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{۱۲}$$

$$-۵) \text{ تعریف دنباله حسابی } x, y, z \Rightarrow y - x = z - y \Rightarrow 2y = x + z \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + z)$$

$$\begin{cases} a_5 = 17 \\ a_{12} = 52 \\ a_n = ? \end{cases}, a_n = a + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_5 = a + (5-1)d \Rightarrow a + 4d = 17 \\ a_{12} = a + (12-1)d \Rightarrow a + 11d = 52 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - 4d = -17 \\ a + 11d = 52 \end{cases} \Rightarrow 7d = 35 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow a + 4(5) = 17 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow a_n = -3 + (n-1)(5) = -3 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n - 8$$

$$\begin{cases} a = 1 - x \\ b = 2 + x \\ c = 1 + 2x \end{cases}, a + c = 2b \Rightarrow 1 - x + 1 + 2x = 2(2 + x) \Rightarrow x + 2 = 4 + 2x \Rightarrow x = -2$$

$\times p$

$$a_1, a_2, a_3, \dots \Rightarrow a_1 p, a_2 p, a_3 p, \dots$$

-۸

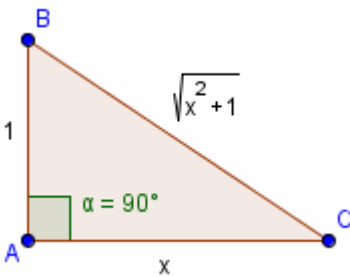
$$\text{فرض مسابی بودن} \Rightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d \Rightarrow \begin{cases} a_2 p - a_1 p = (a_2 - a_1) p = dp \\ a_3 p - a_2 p = (a_3 - a_2) p = dp \end{cases}$$

بنابراین دنباله جدید نیز مسابی با قدر نسبت dp خواهد بود.

$$x, y, z \Rightarrow x + z = 2y, x + y + z = 180$$

-۹

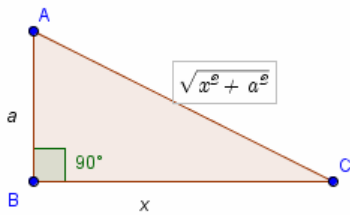
$$\Rightarrow 2y + y = 180 \Rightarrow 3y = 180 \Rightarrow y = 60$$



$$x - 1 = \sqrt{x^2 + 1} - x \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1, \frac{4}{3}, \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1} \Rightarrow 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \text{ اضلاع مثلث}$$



$$a = \sqrt{x^2 + a^2} - x \Rightarrow 2x - a = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow 4x^2 - 4ax + a^2 = x^2 + a^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4ax = 0 \Rightarrow x(3x - 4a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{4a}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a, \frac{4a}{3}, \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + a^2} \Rightarrow a, \frac{4a}{3}, \frac{5a}{3} \text{ اضلاع مثلث}$$

$$q = -\frac{1}{5} \Rightarrow \text{از جملات دنباله } 5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \dots \quad -1$$

$$x, 3, 4 \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \quad -2$$

$$q = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{از جملات دنباله } a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \dots \quad -3$$

$$x, y, z \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow y^2 = xz \quad \text{تعریف دنباله هندسی} \quad -4$$

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_7 = 8, a_n = aq^{n-1} \\ a_n = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = aq^3 = 1 \\ a_7 = aq^6 = 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{aq^6}{aq^3} = \frac{8}{1} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2 \quad -5$$

$$\Rightarrow a(2)^3 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{8}\right)(2^{n-1}) \Rightarrow a_n = \frac{2^{n-1}}{2^3} = 2^{n-4} \Rightarrow a_n = 2^{n-4}$$

$$\begin{cases} a = 1 - x \\ b = x, ac = b^2 \Rightarrow (1-x)(1+x) = x^2 \Rightarrow \\ c = 1 + x \end{cases} \quad -6 \text{ دو جواب}$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷- شعاع دایره اولیه r ، در مرحله دوم شعاع دایره $\frac{r}{2}$ و در مرحله سوم برابر $\frac{r}{4}$ است پس

$$S_1 = \pi r^2, S_2 = 2\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{2}, S_3 = 4\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}, \dots \Rightarrow S_n = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

هر جمله از ضرب جمله قبل در $\frac{1}{2}$ به دست می آید، $q = \frac{1}{2}$ ، $a = \pi r^2$

$$-۸ \quad \text{جملات دنباله هندسی } a_1, a_2, a_3, \dots \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$$

جملات دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots ضرب کنیم c در c جملات را $\Rightarrow a_1c, a_2c, a_3c, \dots$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_2c}{a_1c} = \frac{a_2}{a_1} = q \\ \frac{a_3c}{a_2c} = \frac{a_3}{a_2} = q \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله جدید نیز هندسی با قدر نسبت } q \text{ خواهد بود}$$

$$-۹ \quad \text{جملات دنباله هندسی } a_1, a_2, a_3, \dots \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$$

جملات دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots برسانیم ۲ توان را به توان $\Rightarrow a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_2^2}{a_1^2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = q^2 \\ \frac{a_3^2}{a_2^2} = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 = q^2 \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله جدید نیز هندسی با قدر نسبت } q^2 \text{ خواهد بود}$$

$$-۱۰ \quad \text{حسابی } a, b, c \Rightarrow a + c = 2b \text{ و هندسی } a, b, c \Rightarrow a \times c = b^2$$

$$a + c = 2b \Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 4b^2 = 4(ac) \Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = c, a + c = 2b \Rightarrow c + c = 2b \Rightarrow 2c = 2b \Rightarrow c = b \Rightarrow a = b = c$$

پس دنباله ثابت هم حسابی و هم هندسی است.

$$-۱۱ \quad \frac{a_3 a_5}{a_1 a_3} = \frac{16}{4} \Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = 4 \Rightarrow \frac{aq^4}{a} = 4 \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{4} = \pm \sqrt{2}$$

$$, a_1 a_3 = 4 \Rightarrow a(aq^2) = 4 \Rightarrow a^2 q^2 = 4 \Rightarrow aq = \pm 2 \Rightarrow a = \frac{\pm 2}{\pm \sqrt{2}} = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2}, q = \sqrt{2} \\ \text{or} \\ a = -\sqrt{2}, q = -\sqrt{2} \end{cases}$$

الف) ۱- به ۱ نزدیک می شود ، چون دنباله تفاضلات به صفر نزدیک می گردد.

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
$L - a_n$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱

ب) به ۳ نزدیک می شود ، چون دنباله تفاضلات به صفر نزدیک می گردد.

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹
$L - a_n$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱

ج) به ۵ نزدیک می شود ، چون دنباله تفاضلات به صفر نزدیک می گردد.

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۵/۰۵	۵/۰۰۵	۵/۰۰۰۵	۵/۰۰۰۰۵
$L - a_n$	-۰/۰۵	-۰/۰۰۵	-۰/۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۵

د) به ۱/۲ نزدیک می شود ، چون دنباله تفاضلات به صفر نزدیک می گردد.

n	۱	۲	۳	۴
a_n	۱/۱۹	۱/۱۹۹	۱/۱۹۹۹	۱/۱۹۹۹۹
$L - a_n$	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱

۲- چون جملات دنباله مسابی به میزان ثابت کم و یا زیاد می شوند ، بنابراین از هر عدد مورد نظر می توانند کوچکتر یا بزرگتر شوند پس تنها در حالتی به عدد ثابتی نزدیک می شوند که ثابت باشند یعنی $d = 0$

۳- چون اعداد بزرگتر از ۱ هر چه توانشان بزرگتر شود ، مقدار آنها افزایش می یابد ، پس با افزایش n مقدار a_n افزایش می یابد و از هر عددی مشخص می تواند بزرگتر شود. ($a_n = aq^{n-1}$)

۴- در اینصورت جملات دنباله مساوی خواهند بود و جملات به همان عدد ثابت نزدیک می شوند.

$$\begin{cases} 2x + 1 < 8/1316 \Rightarrow x < \frac{7/1316}{2} \Rightarrow x < 3/5658 \\ 4 - x < 0/4343 \Rightarrow x > 3/5657 \end{cases} \Rightarrow 3/5657 < x < 3/5658 \quad -5$$

$$\begin{cases} 2x + 1 < 8/1316 \Rightarrow x < \frac{7/1316}{2} \Rightarrow x < 3/5658 \Rightarrow 3/5657 < x < 3/5658 \\ 4 - x < 0/4343 \Rightarrow x > 3/5657 \end{cases} \quad -5$$

\Rightarrow جملات دنباله $3/5, 3/56, 3/565, 3/5657$

$$\left. \begin{aligned} 1/4 < \sqrt{2} < 1/5 &\Rightarrow a_1 = 1/4 \\ 1/41 < \sqrt{2} < 1/42 &\Rightarrow a_2 = 1/41 \\ 1/414 < \sqrt{2} < 1/415 &\Rightarrow a_3 = 1/414 \\ 1/4142 < \sqrt{2} < 1/4143 &\Rightarrow a_4 = 1/4142 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{جملات دنباله } 1/4, 1/41, 1/414, 1/4142 \quad -6$$

$$r = \frac{m}{n} \Rightarrow a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a} = 1 \quad -۱$$

$$r = \frac{m}{n} \Rightarrow a^{-r} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\frac{a^m}{a^n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^r} \quad -۲$$

$$\sqrt[12]{64} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^6}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \quad -۳$$

$$\text{الف) } \sqrt[4]{5^3} \sqrt[5]{5} = \sqrt[4]{5^3 \times 5^1} = \sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5 \quad -۴$$

$$\text{ب) } \sqrt[6]{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{14}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{98}} = \sqrt[6]{98} \quad -۵$$

$$\text{ج) } \sqrt[5]{4} \div \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{\frac{4}{8}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \quad -۶$$

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \times a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n+m}} \quad -۷$$

$$a > 1, \text{ مثبت } a \Rightarrow a(a) > 1(a) \Rightarrow a^2 > a \Rightarrow a^2(a) > a(a) \quad -۸$$

$$\Rightarrow a^3 > a^2 \Rightarrow a^3 > a^2 > a > 1$$

$$a < 1, \text{ مثبت } a \Rightarrow a(a) < 1(a) \Rightarrow a^2 < a \Rightarrow a^2(a) < a(a)$$

$$\Rightarrow a^3 < a^2 \Rightarrow a^3 < a^2 < a < 1$$

$$\text{الف) } ۲\sqrt{۳} \times ۲\sqrt{۳} = ۲^۲\sqrt{۳} \quad -۱$$

$$\text{ب) } (\sqrt{۳}\sqrt{۳})\sqrt{۱۲} = \sqrt{۳}\sqrt{۳۶} = \sqrt{۳}^۶ = (۳^۲)^{۳} = ۳^۳ = ۲۷$$

$$\text{ج) } (\sqrt{۱۵}(۲-\sqrt{۲}))(۲+\sqrt{۲}) = \sqrt{۱۵}(۴-\sqrt{۴}) = \sqrt{۱۵}^۲ = ۱۵$$

$$\text{د) } \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} \times \frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۴}-۱} = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۱} = \sqrt{۲}+۱$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱) \times (\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۲}+۱) = (\sqrt{۹}-\sqrt{۴})(\sqrt{۲}+۱) = ۱(\sqrt{۲}+۱) = ۱$$

$$x\sqrt{۲} = ۲ \Rightarrow (x\sqrt{۲})\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x\sqrt{۴} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ = ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow (x^۲)^{\frac{۱}{۲}} = (۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x^۱ = ۲^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow x = ۲^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \quad -۲$$

$$\sqrt{a^b} = a^{\frac{b}{۲}} = a^{\frac{۱}{۲} \times b} = (a^{\frac{۱}{۲}})^b = (\sqrt{a})^b = \sqrt{a^b} \quad -۳$$

$$a^{-b} \times a^b = a^{-b+b} = a^0 = ۱ \Rightarrow a^{-b} = \frac{۱}{a^b} \quad -۴$$

$$\frac{a^b}{a^d} = a^b \times \frac{۱}{a^d} = a^b \times a^{-d} = a^{b-d}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^b = (a \times \frac{۱}{c})^b = a^b \times \left(\frac{۱}{c}\right)^b = a^b \times (c^{-۱})^b = a^b \times c^{-b} = a^b \times \frac{۱}{c^b} = \frac{a^b}{c^b}$$

-۵ چون a مثبت است بنابراین $a^{\frac{b}{۲}}$ تعریف شده است پس

$$a^b = a^{\left(\frac{b}{۲} \times ۲\right)} = \left(a^{\frac{b}{۲}}\right)^۲ > ۰ \Rightarrow a^b > ۰$$

۱- در هر یک از موارد ذکر شده به مجموعه اول دقیقاً یک عضو از مجموعه دوّم نظیر می شود مثلاً هر فرد دقیقاً یک اندازه قد دارد و یا هر مستطیل دقیقاً یک محیط مشخص دارد.

تابع) رابطه بین دانش آموز و معدل پایان سال ، رابطه بین دانش آموز و سن پدر در حال حاضر ،
رابطه بین دانش آموز و تعداد کتب درسی ، رابطه بین دانش آموز و تعداد معلم در سال جاری
غیر تابع) رابطه بین دانش آموز و تعداد دوستان همکلاسی اش ، رابطه بین دانش آموز و غذای مصرفی
رابطه بین دانش آموز و تعداد معلمان

۲-

ی	ط	ح	ز	و	ه	د	ج	ب	الف	نمودار
x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	x	✓	تابع

۳-

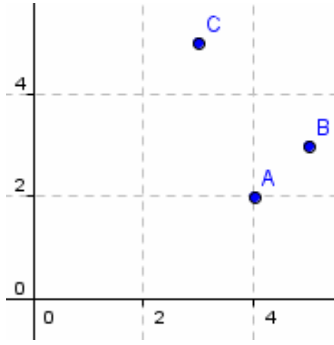
د	ج	ب	الف	جدول
x	x	✓	✓	تابع

۴-

د	ج	ب	الف	نمودار ون
✓	✓	x	✓	تابع

۵-

و	ه	د	ج	ب	الف	نمودار
✓	x	✓	✓	✓	x	تابع



$$(5, a - 2) = (5, 3) \Rightarrow a - 2 = 3 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow f = \{(4, 2), (5, 3), (3, b + 3), (3, 5), (5, 3)\} \quad -6$$

$$\Rightarrow b + 3 = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f = \{(4, 2), (5, 3), (3, 5)\}$$

۷- بلی، بیشترین ۲۶ و کمترین ۲۰ ، بین ساعات ۱۱ تا ۱۲ صبح ، از دمای مورد نظر روی محور y ها به موازات محور x ها رسم کرده ، در اینصورت طول مثل بر فرود با نمودار ، زمان مورد نظر است.

۸- اولین نمودار از سمت راست است.

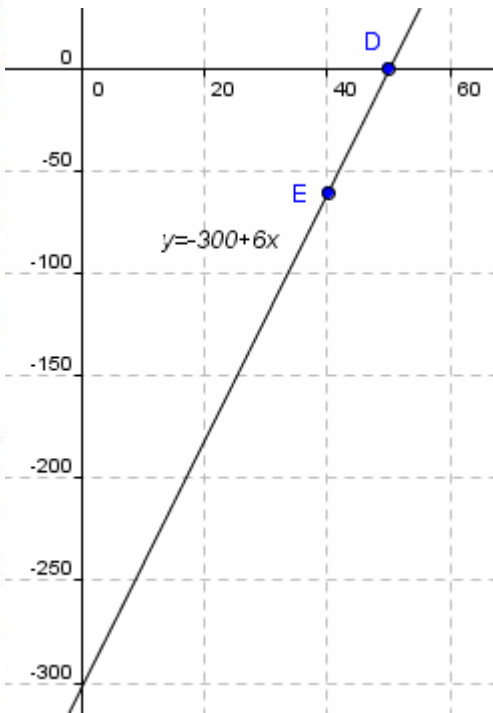
نمودار وسط حرکت با سرعت ثابت یا در جا زدن دانش آموز در یک نمره در طول ترم .
نمودار سمت چپ ارتفاع از زمین یک پتر باز هنگام فرود .
بلی ، هر سه نمودار نشاندهنده یک تابعند.

۱- الف) درست ب) نادرست ج) درست

۲- پیش بینی ۱۲۰ اسباب بازی پس از یک ساعت.

الف) ۵۰ ب) ۳۵ دقیقه تعداد ۷۰ ، ۴۵ دقیقه تعداد ۹۰ ، ۵۵ دقیقه تعداد ۱۱۰ .

ج) $y = 2x$ (د) برای هر زمان مشخص دقیقاً یک تعداد تولید اسباب بازی وجود دارد.



۳- الف) $y = -300 + 6x \Rightarrow$

x	۵۰	۴۰
y	۰	-۶۰

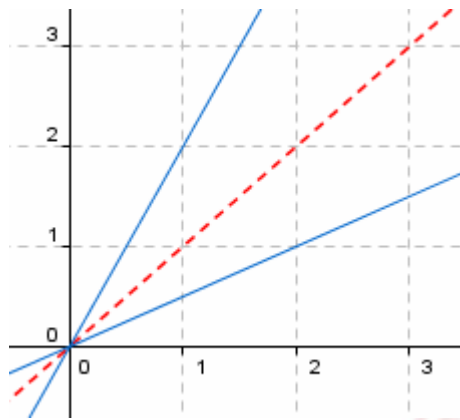
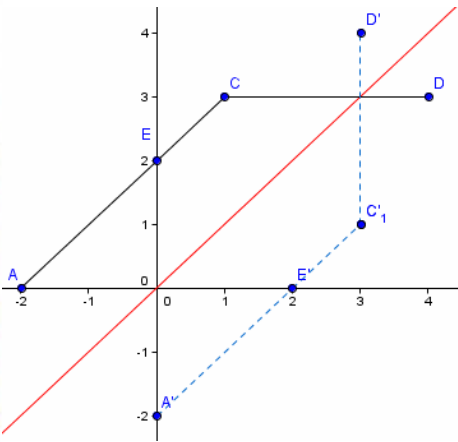
ب) $x = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow y = -300 + 6(۱۰۰۰۰) = ۵۹۷۰۰$

$x = ۱۰۰۰۰۰ \Rightarrow y = -300 + 6(۱۰۰۰۰۰) = ۵۹۹۷۰۰$

ج) $y = ۰ \Rightarrow ۰ = -300 + 6x \Rightarrow x = ۵۰$

مداقل تعداد تولید ($x = ۵۰$) تا شرکت ضرر نکنند.

۱- اولی از سمت راست، خود و وارون آن تابع است.



۲- الف + ب)

از چپ و از بالا به پائین تابع نیست $R = \{(-2,0), (-2,1), (1,1), (1,2), (1,-1)\}$ (اولی)

تابع نیست $R^{-1} = \{(0,-2), (1,-2), (1,1), (2,1), (-1,1)\}$

تابع هست $R = \{(-2,-1), (-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)\}$ (دومی)

تابع هست $R^{-1} = \{(-1,-2), (0,-1), (1,0), (2,1), (3,2)\}$

تابع هست $R = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25)\}$ (سومی)

تابع هست $R^{-1} = \{(5,1), (10,2), (15,3), (20,4), (25,5)\}$

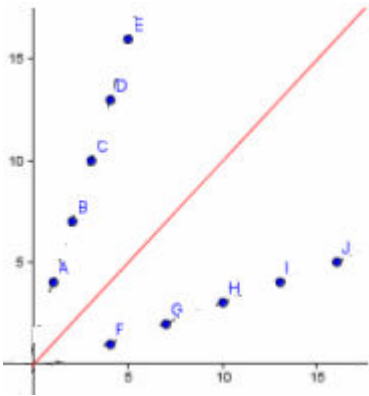
تابع هست $R = \{(-3,4), (2,8), (0,8), (7,10)\}$ (چهارمی)

تابع نیست $R^{-1} = \{(4,-3), (8,2), (8,0), (10,7)\}$

ج) همیشه اینگونه نیست، مانند مثال سوم و چهارم بالا

۳- وارون f تابع است ولی وارون g تابع نیست. $g^{-1} = \{(2,7), (2,5)\}$

۱- تابعهای ب، ه، و، ح یک به یک می باشند.



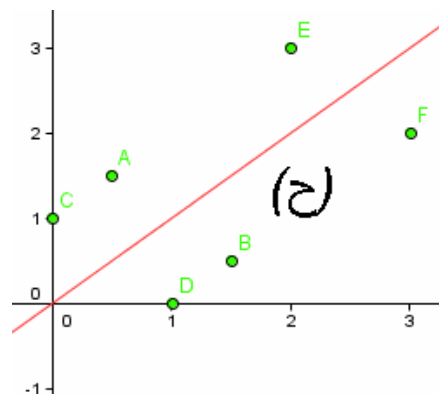
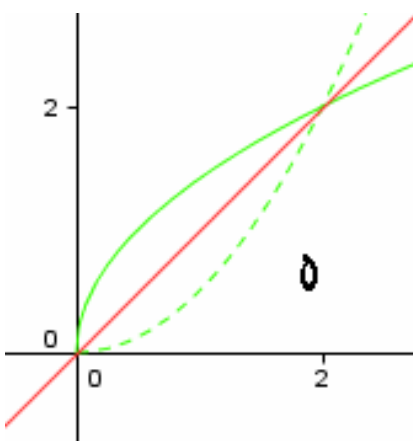
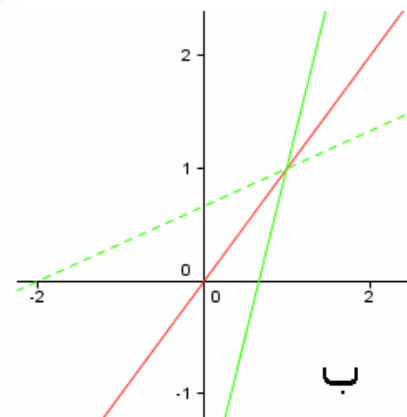
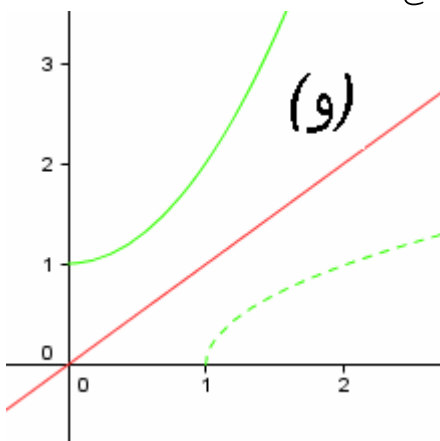
-۲

بلی ۱-۱ هست و ضابطه آن $y = 3x + 1$ است. (الف)

$$\text{ب) } R^{-1} = \{(4,1), (7,2), (10,3), (13,4), (16,5)\} \Rightarrow y = \frac{x-1}{3}$$

پ) رسم سمت چپ

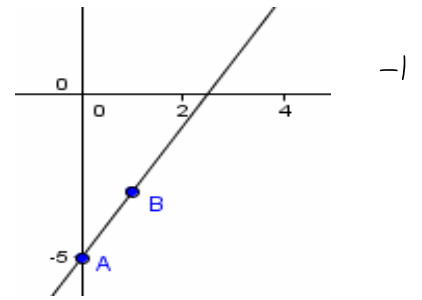
۳- هر کدام که یک به یک هستند وارون پذیرند. یعنی ب، ه، و، ح



۴- هر فرد دقیقاً یک کد ملی دارد و هر کد ملی اختصاص به یک نفر دارد.

الف) $f(x) = 2x - 5 \Rightarrow$

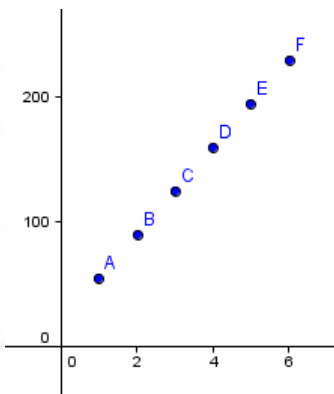
x	۰	۱
y	-۵	-۳



ب)

x	۲	۳	۰	-۷	$\frac{۵}{۲}$	$\sqrt{۷}$
y = f(x)	-۱	۱	-۵	-۱۹	۰	$۲\sqrt{۷} - ۵$

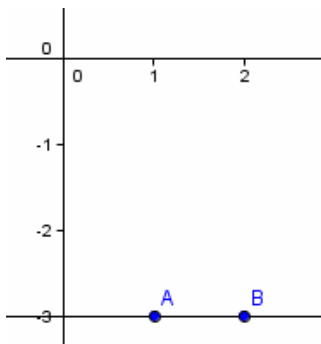
۲- $m = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$, $b = ۳ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۳$



۳- الف) نظیر هر عمق یک دمای منجمد به فرد وجود دارد پس تابع است.

ب) $m = \frac{۹۰ - ۵۵}{۲ - ۱} = \frac{۳۵}{۱} = ۳۵$, $y - ۵۵ = ۳۵(x - ۱) \Rightarrow y = ۳۵x + ۲۰$

ج) $x = ۱۰ \Rightarrow y = ۳۵(۱۰) + ۲۰ = ۳۷۰$



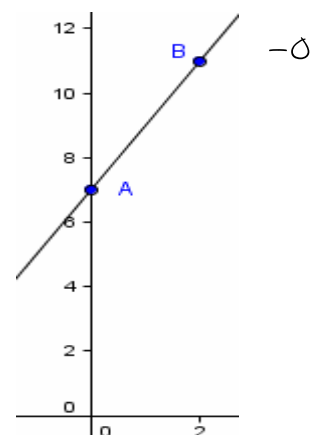
۴- $f(۲) = f(۱۰۰) = f(-۵) = -۳$

$(۲, ۱۱), (۰, ۷) \in f \Rightarrow$

$m = \frac{۱۱ - ۷}{۲ - ۰} = \frac{۴}{۲} = ۲$, $y - ۷ = ۲(x - ۰) \Rightarrow y = ۲x + ۷$

چون یک به یک است وارون پذیر است و وارون آن

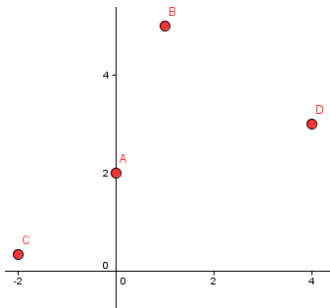
$x \leftrightarrow y \Rightarrow x = ۲y + ۷ \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x - ۷}{۲}$



۶- نظیر هر x فقط یک y موجود است ، پس تابع است.

۷- قسمت (ب) صحیح است. $f(t) = 0.12t$

t	۱	۲	۳	۴
$f(t)$	۰.۱۲	۰.۲۴	۰.۳۶	۰.۴۸



۸- $g = \{(0, 2), (1, 5), (-2, \frac{1}{3}), (4, 3)\}$

نظیر هر x دقیقاً یک y وجود دارد و بالعکس پس تابع یک به یک است.

۹- تابع خطی است چون به میزان ثابت کاهش یافته بنابراین $(0, 9), (1, 7) \in f$

$$\Rightarrow m = \frac{9-7}{0-1} = -2, \quad y-9 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x+9$$

و تابعی یک به یک است (توابع خطی $(y = ax + b)$ به شرط $a \neq 0$ همگی یک به یک هستند)

۱۰- الف) $F = \frac{9}{5}c + 32, c = -20 \Rightarrow F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -36 + 32 = -4$

ب) $F = 10.4 \Rightarrow 10.4 = \frac{9}{5}c + 32 \Rightarrow \frac{9}{5}c = 72 \Rightarrow c = \frac{5 \times 72}{9} = 40$

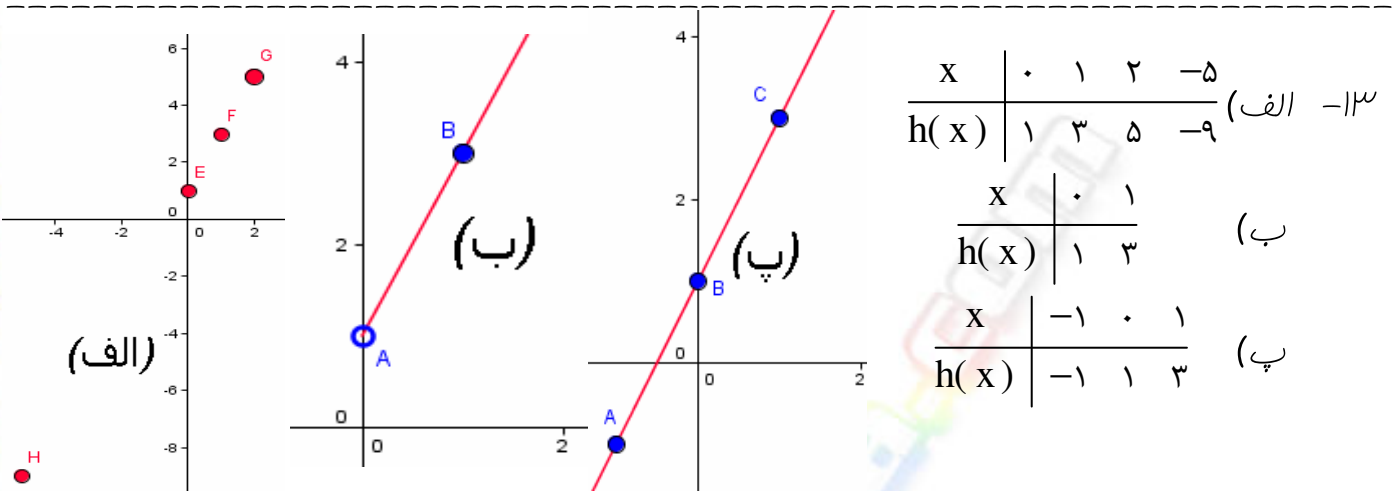
ج) $F = \frac{9}{5}c + 32 \Rightarrow \frac{9}{5}c = F - 32 \Rightarrow c = \frac{F - 32}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}(F - 32)$

د) بلی ، تابع خطی است

۱۱- $x = \text{طول} = y = \text{عرض}$

$$x = y + 3, p = 2(x + y) \Rightarrow p = 2(y + 3 + y) \Rightarrow p(y) = 4y + 6$$

۱۲- خیر، در توابع یک به یک اگر دامنه منتهی باشد برد هم منتهی و تعداد عضوهای آنها باید با هم برابر باشد، زیرا نظیر هر عضو از دامنه عضوی منحصر به فرد از برد نظیر آن وجود دارد.



$$y = ax + 0 \Rightarrow y = ax, (3, 15) \in f \Rightarrow 15 = a(3) \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow y = 5x, (15, 3) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$$

-۱۴

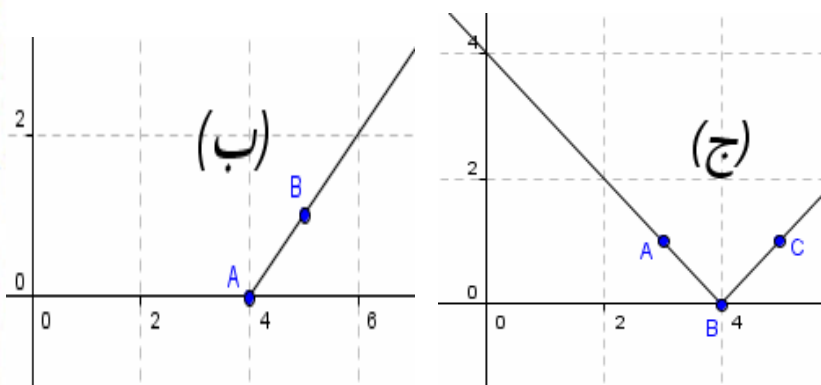
الف) $f = \{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$

ب) $f(x) = |x-4|, D_f = [4, +\infty) \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 4 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

ج) $f(x) = |x-4|, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$



-۱

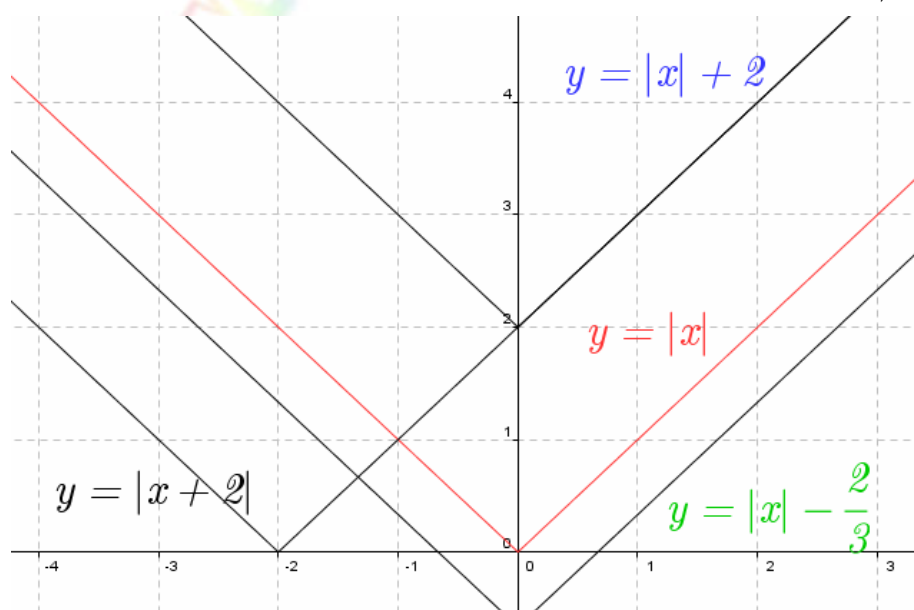


$f(x) = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$

-۲

برای رسم $f(x) = |x| + 2$ باید نمودار $f(x) = |x|$ را دو واحد به بالا انتقال داد.
 برای رسم $g(x) = |x+2|$ باید نمودار $f(x) = |x|$ را دو واحد به چپ انتقال داد.
 برای رسم $h(x) = |x| - \frac{2}{3}$ باید نمودار $f(x) = |x|$ را $\frac{2}{3}$ واحد به پایین انتقال داد.

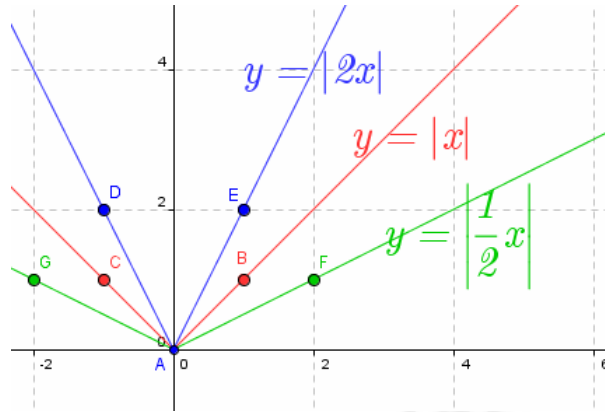
$D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$, $R_f = [2, +\infty)$, $R_g = [0, +\infty)$, $R_h = [-\frac{2}{3}, +\infty)$



$$f(x) = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$f(x) = |2x| \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

$$f(x) = \left| \frac{1}{2}x \right| \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -2 & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



-۳

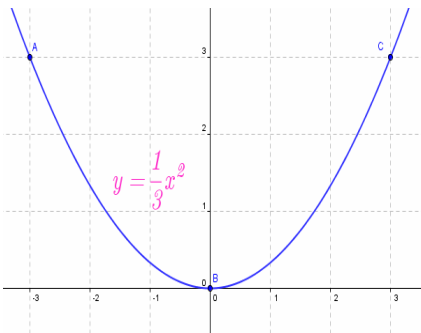
در تابع $y = |ax|$ با افزایش $|a|$ دو نیم خط تابع قدر مطلق به محور y ها نزدیک میشوند. (زاویه تندتر) و بالعکس با کاهش $|a|$ دو نیم خط تابع قدر مطلق به محور x ها نزدیک میشوند. (زاویه بازتر)

الف+ب -۱ $f(x) = (x-3)^2 + 1, D_f = R, R_f = [1, +\infty)$ (بالا چپ)

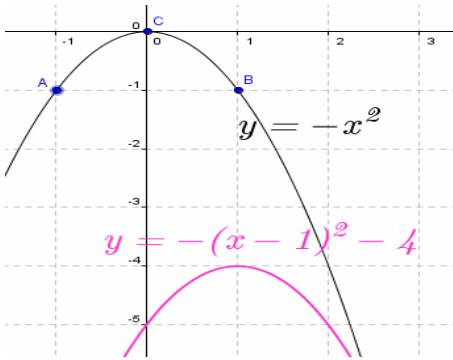
(بالا راست) $f(x) = (x+1)^2 - 1, D_f = R, R_f = [-1, +\infty)$

(پائین چپ) $f(x) = -(x+1)^2 + 3, D_f = R, R_f = (-\infty, +3]$

(پائین راست) $f(x) = (x-5)^2 - 2, D_f = R, R_f = [-2, +\infty)$



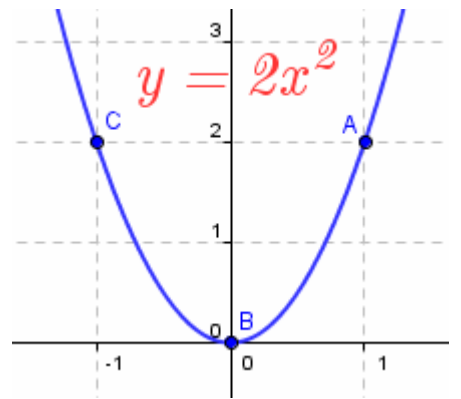
-۲ $f(x) = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -3 & 0 & 3 \\ \hline y & 3 & 0 & 3 \end{array}$



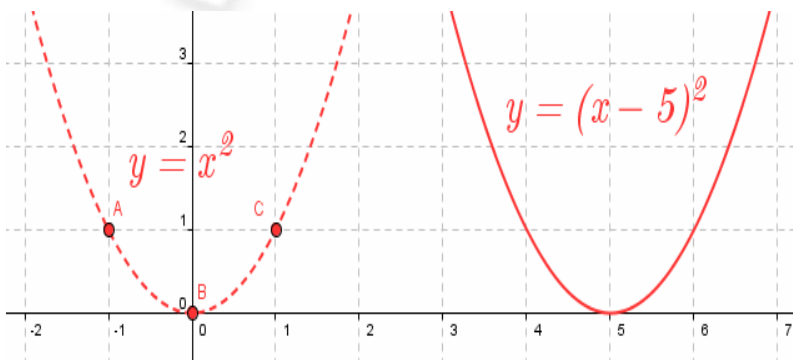
نمودار $f(x) = -x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 & -1 \end{array}$ و

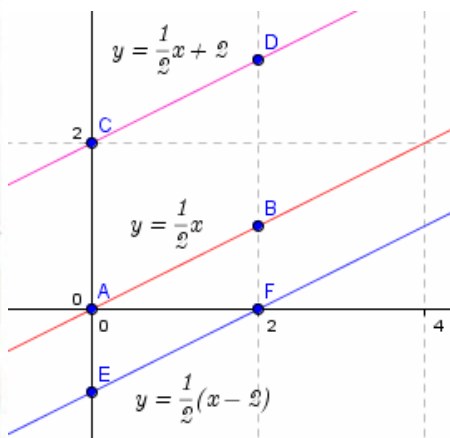
یک واحد به راست و چهار واحد به پائین انتقال می دهیم.

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 0 & 2 \end{array}$



نمودار $f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$ و پنج واحد به سمت راست انتقال می دهیم.





$$f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot -1 \end{array}, \quad \begin{cases} D_f = D_g = D_h = \mathbb{R} \\ R_f = R_g = R_h = \mathbb{R} \end{cases}^{-1}$$

هر سه تابع فنی هستند.

$$y = \sqrt{2x}, \quad 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{-5 + x}, \quad -5 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D_f = [5, +\infty)$$

$$y = \sqrt{-x + 3}, \quad -x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x - 2} + 1, \quad x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x + 3}, \quad x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_g = [-3, +\infty)$$

$$h(x) = -\sqrt{x + 1}, \quad x \geq 0 \Rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{-2x + 7}, \quad -2x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{7}{2}]$$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [-1, +\infty) \quad \text{الف) نادرست زیرا}$$

$$R_f = [-\frac{1}{3}, +\infty) \quad \text{ب) نادرست زیرا}$$

ج) درست

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3, \quad f(2) = 2(2) + 1 = 5 \Rightarrow f(1) \neq \frac{f(2)}{2} \quad \text{د) نادرست زیرا}$$

$$f(\cdot) = 2(\cdot) - 3 = -3, \quad f(1) = 2(1) - 3 = -1, \quad f(\frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2}) - 3 = 0$$

$$f(a) = 2a - 3, \quad f(2x) = 2(2x) - 3 = 4x - 3, \quad f(x+1) = 2(x+1) - 3 = 2x - 1$$

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{5}x - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

-۵

$$h(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}, x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 2 \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$y = \frac{3x^2 - x + 7}{x^2 - 2x - 3}, x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ or } x = -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3, -1\}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = \frac{2x-7}{4}, 4 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x^2+1 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(z) = \frac{z+2}{\sqrt{z-2}}, z-2 > 0 \Rightarrow z > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}, \begin{cases} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1, +\infty) - \{0\}$$

$$f(x) = ax + b, \begin{cases} f(0) = -3 \Rightarrow a(0) + b = -3 \Rightarrow b = -3 \\ f(-4) = 3 \Rightarrow a(-4) + b = 3 \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

-۶

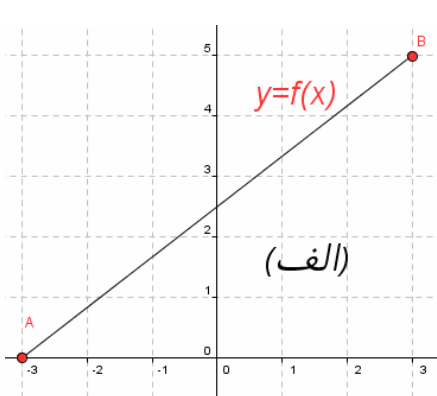
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = -\frac{3}{2}(-1) - 3 = -\frac{3}{2} \\ f(-4) = -\frac{3}{2}(-4) - 3 = 3 \end{cases}$$

-۷ دو تابع $f(x) = x$, $g(x) = x+1$ هر دو دارای دامنه و برد \mathbb{R} هستند و نمودار آنها موازی است و نقطه مشترک ندارند.

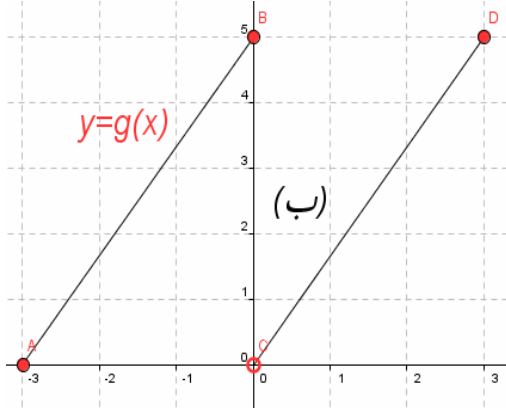
$$f(x-1) = 5x, x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow f(t) = 5(t+1) \Rightarrow f(7) = 5(7+1) = 40$$

-۸

-۹



$$f(x) = \frac{5}{6}(x+3)$$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}(x+3) & -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{5}{3}x & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

الف -۱۰ هزار تومان $8 - 0.1 \cdot 5(100 - 80) = 7$ = نرخ عمل و نقل

ب) هزار تومان $7 \times 100 = 700$

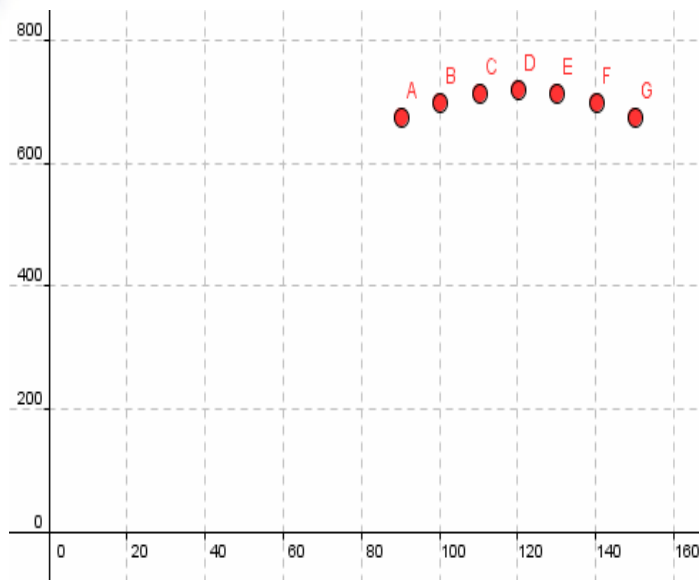
ج) $R(n) = n(8 - 0.1 \cdot 5(n - 80))$, $D_R = \{90, 100, \dots, 150\}$ نفر n برای

n	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
R(n)	۶۷۵	۷۰۰	۷۱۵	۷۲۰	۷۱۵	۷۰۰	۶۷۵

بیشترین تقاضای مسافران در بستی احتمالا گروههای

۱۲۰ نفری اند که برای آنها هزینه را ماکسیمم

نموده است ، تا سود بیشتری به دست آید.



الف) نادرست $g(a+b) = 2(a+b)+1$, $g(a)+g(b) = 2a+1+2b+1 = 2(a+b)+2$ -||
 $\Rightarrow g(a+b) \neq g(a)+g(b)$
 درست $f(a+b) = 3(a+b)$, $f(a)+f(b) = 3a+3b = 3(a+b)$
 $\Rightarrow f(a+b) = f(a)+f(b)$

ب) نادرست $g(ab) = 2(ab)+1$, $g(a).g(b) = (2a+1)(2b+1)$
 $\Rightarrow g(ab) \neq g(a).g(b)$
 نادرست $f(ab) = 3(ab)$, $f(a).f(b) = (3a)(3b) = 9(ab)$
 $\Rightarrow f(ab) \neq f(a).f(b)$

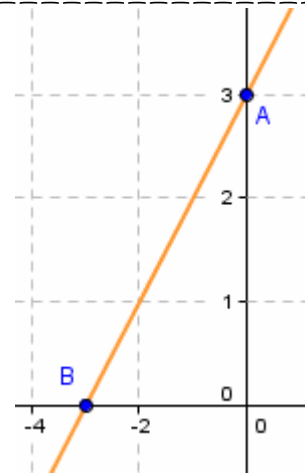
ج) نادرست $g(kx) = 2kx+1$, $k.g(x) = k(2x+1) = 2kx+k$
 $\Rightarrow g(kx) \neq k.g(x)$
 درست $f(kx) = 3kx$, $k.f(x) = k(3x) = 3kx \Rightarrow f(kx) = k.f(x)$

$$f(x+2) = f(x) + 2 \Rightarrow m(x+2) + b = mx + b + 2$$

$$\Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$f(2) = 5, m = 1 \Rightarrow (1)(2) + b = 5 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = (1)x + (3) = x + 3 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & \cdot & -3 \\ \hline y & 3 & \cdot \end{array}$$



-۱۲ (الف)

ب) اگر $m=1$ ، رابطه $f(x+2) = f(x) + 2$ برقرار است .

یعنی ضابطه تابع باید $f(x) = x + b$, $b \in \mathbb{R}$ باشد .

-۱۳ $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم دو نیم کره و $V_1 = \pi r^2 h = 3 \cdot \pi r^2$ حجم استوانه

$$f(r) = 3 \cdot \pi r^2 + \frac{4}{3} \pi r^3, r > 0$$



$$-۱۴ \quad f \text{ تابع } f \text{ یک به یک نیست و } f(۰) = ۴ > ۱ = f(۲) \text{ , } f = \{(۰, ۴), (۲, ۱), (۵, ۱)\}$$

$$-۱۵ \quad D_f = [-۲, ۵] \text{ , } R_f = [-۳, ۴]$$

$$-۱۶ \quad f(۰) = \frac{۰+۳}{۰-۴} = -\frac{۳}{۴} \text{ , } f(۱) = \frac{۱+۳}{۱-۴} = -\frac{۴}{۳} \text{ , } f(\sqrt{۲}) = \frac{\sqrt{۲}+۳}{(\sqrt{۲})^2-۴} = -\frac{\sqrt{۲}+۳}{۲}$$

$$\left. \begin{aligned} f(۱) &= ۱^۳ + ۲(۱)^۲ + a(۱) + b = ۵ \Rightarrow a + b = ۲ \\ f(-۲) &= (-۲)^۳ + ۲(-۲)^۲ + a(-۲) + b = -۱ \Rightarrow -۲a + b = -۱ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -۳a = -۳ \Rightarrow a = ۱ \text{ , } b = ۱ \Rightarrow ۳a - ۲b = ۳(۱) - ۲(۱) = ۱$$

-۱۷

$$\frac{۰-۱}{x-۲} = \frac{۱-y}{۲-۰} \Rightarrow \frac{-۱}{x-۲} = \frac{۱-y}{۲} \Rightarrow ۱-y = \frac{-۲}{x-۲} \Rightarrow y = ۱ + \frac{۲}{x-۲} = \frac{x}{x-۲}$$

$$-۱۸ \quad S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x\left(\frac{x}{x-۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{x^2}{x-۲}\right) \text{ , } x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

چون جهت مثبت محورها مورد نظر است پس $D_S = (۲, +\infty)$

$$-۱۹ \quad \text{تنها تابع } k \text{ چون یک به یک است وارون پذیر است.}$$

$$۲x^2 - ۲x + ۱ \geq 0, \Delta = (-۲)^2 - ۴(۲ \times ۱) = ۴ - ۸ = -۴ < 0, a = ۲ > 0 \quad -۱$$

$$۲x^2 - ۲x + ۱ \geq 0 \text{ بنابراین}$$

$$a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \textcircled{1} \quad -۲$$

رابطه ① همواره برقرار است چون مخرج مثبت و صورت آن نامنفی است.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \textcircled{1} \quad -۳$$

رابطه ① طبق تمرین قبل برقرار است. $(a, b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b}, \frac{b}{a} > 0)$

(در تمرین قبل به جای a عبارت $\frac{a}{b}$ قرار دهید)

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{-۲x^2 - ۳x + ۱}, \Delta = (-۳)^2 - ۴(-۲ \times ۱) = ۹ + ۸ = ۱۷ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۷}}{-۴} \quad -۴$$

x	$-\infty$	$\frac{۳ + \sqrt{۱۷}}{-۴}$	$\frac{۳ - \sqrt{۱۷}}{-۴}$	$+\infty$	
	-	•	+	•	-

$$\Rightarrow D_f = \left[\frac{۳ + \sqrt{۱۷}}{-۴}, \frac{۳ - \sqrt{۱۷}}{-۴} \right]$$

$$\text{ب) } g(x) = \sqrt{x^2 + ۱}, x^2 + ۱ \geq ۱ > 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$\text{ج) } h(x) = \sqrt{x(x-۳)^2}, x(x-۳)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = ۳$$

x	$-\infty$	0	۳	$+\infty$
	-	•	+	+
$(x-۳)^2$	+	+	•	+
P	-	•	+	+

$$\Rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$i) i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}, \quad x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	•	+	+
$x-2$	-	-	•	+
P	+	•	-	+

$$\Rightarrow D_i = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$$

۵- برای مقادیری که $f(x)$ یعنی مقدار y مثبت یا صفر است (قسمتی از نمودار بالا و بر روی محور x ها)

$$D\sqrt{f(x)} = (-\infty, -4/5] \cup [1, 4] \cup [6, +\infty) \text{ برابر دامنه } \sqrt{f(x)} \text{ است.}$$

۶- برای همواره مثبت بودن باید $\Delta < 0, a > 0$ پس

$$\Delta = 3^2 - 4(a \times 1) = 9 - 4a < 0 \Rightarrow a > \frac{9}{4}$$

$$a > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array} \right\} \Rightarrow a > \frac{9}{4}$$

$$\Delta = (2)^2 - 4(1 \times a) = 4 - 4a \quad -7$$

معادله دارای دو ریشه متمایز است. $\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4a > 0 \Rightarrow a < 1$

معادله دارای دو ریشه مساوی (ریشه مضاعف) است. $\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1$

معادله دارای ریشه حقیقی نیست. $\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4a < 0 \Rightarrow a > 1$

۸- ارتفاع یعنی y پس برای برقراری شرط مسأله باید $g(t) > h(t)$.

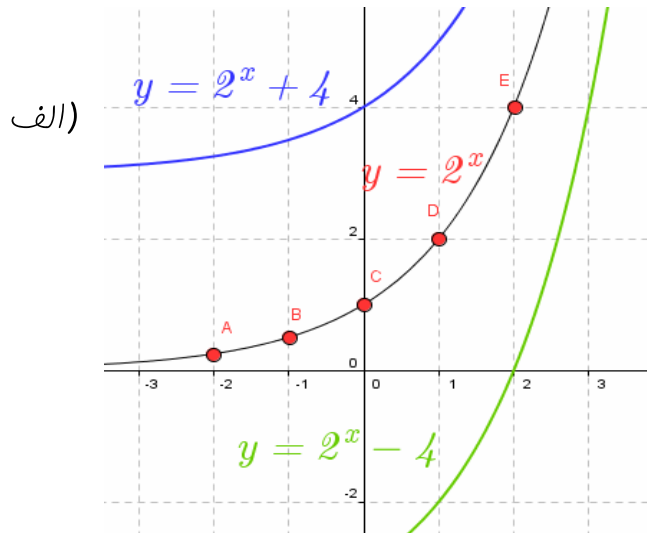
$$-3t^2 + 18t > -t^2 + 10t \Rightarrow -2t^2 + 8t > 0$$

$$P = -2t^2 + 8t = -2t(t-4) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = 4$$

t	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$-2t$	+	•	-	-
$t-4$	-	-	•	+
P	-	•	+	-

مقدار P در فاصله $0 < t < 4$ مثبت است.

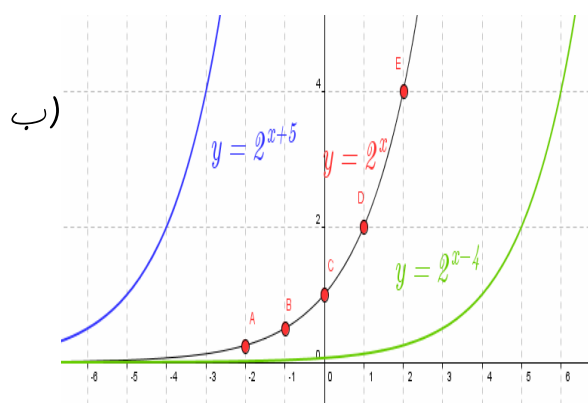
پس طی ۴ ثانیه این اتفاق می افتد.



$$y = 2^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \end{array} \quad -1$$

انتقال ۳ واحد به بالا $\rightarrow y = 2^x + 3$

انتقال ۴ واحد به پایین $\rightarrow y = 2^x - 4$



$$y = 2^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

انتقال ۵ واحد به چپ $\rightarrow y = 2^{x+5}$

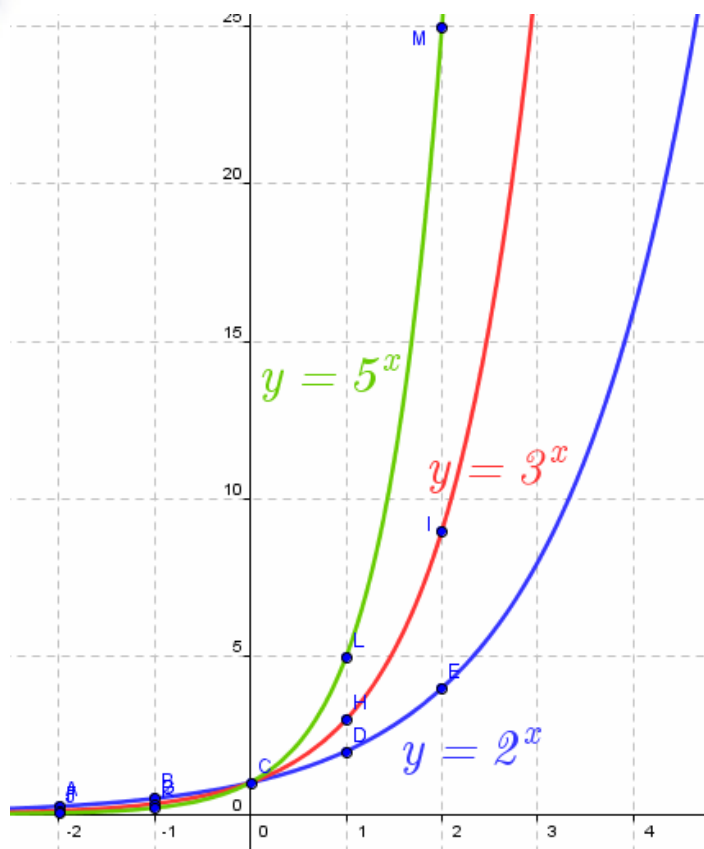
انتقال ۴ واحد به راست $\rightarrow y = 2^{x-4}$

ج)

$$y = 2^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$y = 3^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

$$y = 5^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{25} & \frac{1}{5} & 1 & 5 & 25 \end{array}$$



۲- غیر، به ازای افزایش ثابت x ، مقدار y به میزان ثابت ۶ افزوده می شود. $y = 15 + \frac{3}{5}x$

۳- الف) نمائی (ب) چند جمله ای درجه دوم (سهومی) (ج) چند جمله ای درجه اول (فظ)
 د) چند جمله ای درجه چهارم (ه) نمائی (و) چند جمله ای درجه دوم (سهومی) (ز) چند جمله ای درجه اول (فظ)

۴- با افزایش مقدار x مقدار y کاهش می یابد ($a = \frac{1}{3} < 1$) پس نرگس نمودار را درست رسم کرده است.

۵- $y = 3^x$ تابع نمائی و $y = x^3$ تابع چند جمله ای درجه سوم است.

الف) $y = 9^x \Rightarrow$

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{9}$	1	9

, $x = 0.8 \Rightarrow y = 9^{0.8} \approx 6$

ب) $y = (\frac{1}{4})^x \Rightarrow$

x	-1	0	1
y	4	1	$\frac{1}{4}$

, $x = 1.7 \Rightarrow y = (\frac{1}{4})^{1.7} \approx 0.1$

ج) $y = 10^x \Rightarrow$

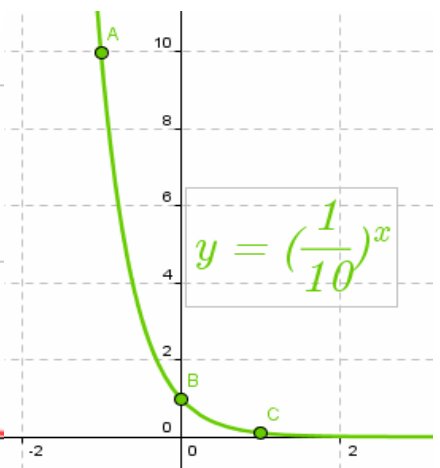
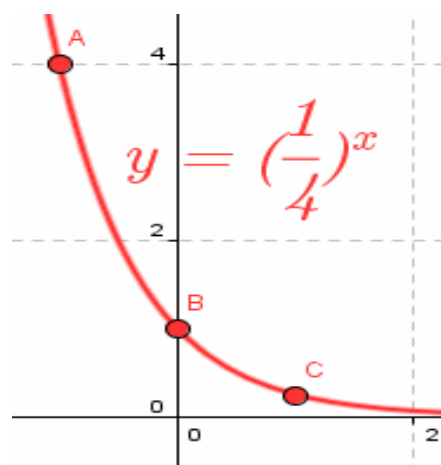
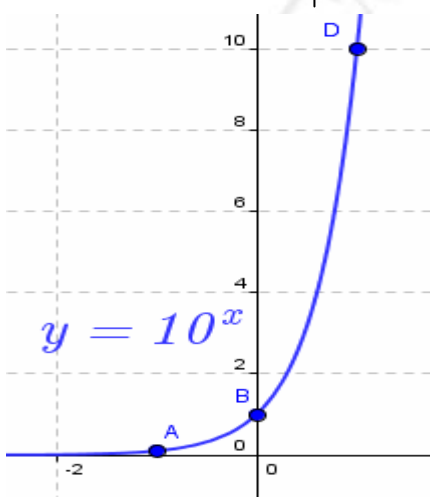
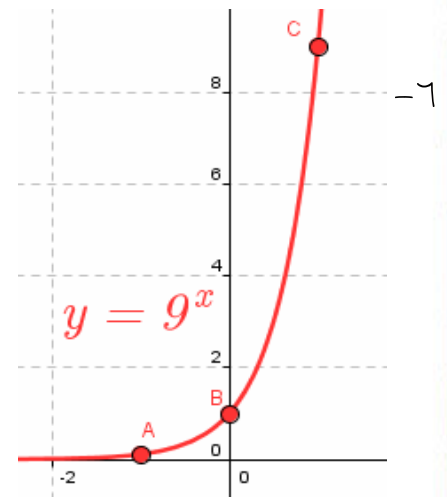
x	-1	0	1
y	$\frac{1}{10}$	1	10

, $x = 0.3 \Rightarrow y = 10^{0.3} \approx 2$

د) $y = (\frac{1}{10})^x \Rightarrow$

x	-1	0	1
y	10	1	$\frac{1}{10}$

, $x = -1.3 \Rightarrow y = (\frac{1}{10})^{-1.3} \approx 2$



- ۷- نمائی، زیرا به ازای افزایش یک واحد x مقدار y ، ۶ برابر می شود. (الف) $y = 6^x$
- خطی، زیرا به ازای افزایش دو واحد x مقدار y ، ۴ واحد افزوده می شود. (ب) $y = 2x - 3$
- خطی، زیرا به ازای کاهش یک واحد x مقدار y ، ۳ واحد کاهش می یابد. (ج) $y = 3x + 1$
- نمائی، زیرا به ازای افزایش یک واحد x مقدار y ، نصف می شود. (د) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- نمائی، زیرا به ازای افزایش ده واحد x مقدار y ، $\frac{3}{4}$ برابر می شود. (ه) $y = \frac{64}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^x$
- نه خطی و نه نمائی زیرا به ازای افزایش یک واحد x نه با عدد ثابت جمع و نه در عددی ثابت ضرب شده است. (و)

- ۱- (چند جمله ای درجه اول) خطی (ج) (چند جمله ای درجه دوم) سهمی (ب) نمائی (الف)
- چند جمله ای درجه دوم (سهمی) (و) (چند جمله ای درجه اول) خطی (ه) نمائی (د)

$$\log_c abd = \log_c (ab)d = \log_c ab + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d \quad -۱$$

$$\log ۳^۵ = \log(۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳) = \log ۳ + \log ۳ + \log ۳ + \log ۳ + \log ۳ = ۵ \times \log ۳ \quad -۲$$

$$\log_c a^n = \log_c \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n = \log_c a + \log_c a + \dots + \log_c a = n \log_c a \quad -۳$$

$$۱) \log_{۱۰} ۱۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۲ = ۲ \log_{۱۰} ۱۰ = ۲ \times ۱ = ۲ \quad ۲) \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۳ = ۳ \log_{۱۰} ۱۰ = ۳ \times ۱ = ۳ \quad -۴$$

$$۳) \log_{۱۰} ۴ + \log_{۱۰} ۲۵ = \log_{۱۰} ۴ \times ۲۵ = \log_{۱۰} ۱۰۰ = \log_{۱۰} ۱۰^۲ = ۲ \log_{۱۰} ۱۰ = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۴) ۲ \log_{۱۰} ۴ + \log_{۱۰} ۴ = ۳ \log_{۱۰} ۴ = ۳ \log_{۱۰} ۲^۲ = ۶ \log_{۱۰} ۲$$

$$۱) \log_{۱۰} ۱۸ = \log_{۱۰} ۲ \times ۳^۲ = \log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۳^۲ = \log_{۱۰} ۲ + ۲ \log_{۱۰} ۳ = m + ۲n \quad -۵$$

$$۲) \log_{۱۰} ۳۲ + \log_{۱۰} ۲۷ = \log_{۱۰} ۲^۵ + \log_{۱۰} ۳^۳ = ۵ \log_{۱۰} ۲ + ۳ \log_{۱۰} ۳ = ۵m + ۳n$$

$$\log_{۴} ۳۲ = \log_{۴} ۲^۵ = ۵ \log_{۴} ۲ = ۵ \left(\frac{۱}{۵} \right) = ۱ \quad -۶$$

$$۱) \log_{۲} ۱۶ = \log_{۲} ۲^۴ = ۴ \log_{۲} ۲ = ۴(۱) = ۴ \quad -۷$$

$$۲) \log_{۷} \frac{۱}{۴۹} = \log_{۷} \frac{۱}{۷^۲} = \log_{۷} ۷^{-۲} = -۲ \log_{۷} ۷ = -۲(۱) = -۲$$

$$\text{۳) } \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2^3} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{\frac{1}{2}} 2 = \frac{3}{2} (1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{۴) } \log_{\frac{1}{3}} \frac{5^4}{2} = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} 3^3 = 3 \log_{\frac{1}{3}} 3 = 3(1) = 3$$

$$\text{۵) } \log_{\frac{1}{10}} 25 + \log_{\frac{1}{10}} 4 = \log_{\frac{1}{10}} 100 = \log_{\frac{1}{10}} 10^2 = 2 \log_{\frac{1}{10}} 10 = 2(1) = 2$$

$$\text{۶) } \log_{\frac{1}{10}} 4 + \log_{\frac{1}{10}} 250 = \log_{\frac{1}{10}} 1000 = \log_{\frac{1}{10}} 10^3 = 3 \log_{\frac{1}{10}} 10 = 3(1) = 3$$

$$\text{۷) } \log_{\frac{1}{9}} \frac{2^4 \times 125}{1} = \log_{\frac{1}{9}} 100 = \log_{\frac{1}{9}} 10^2 = 2 \log_{\frac{1}{9}} 10 = 2(1) = 2$$

$$\text{۸) } \log_{\frac{1}{25}} \frac{(\sqrt[3]{4})^3}{25} = \log_{\frac{1}{25}} \frac{4}{25} = \log_{\frac{1}{25}} \frac{16}{100} = \log_{\frac{1}{25}} 16 - \log_{\frac{1}{25}} 100 = \log_{\frac{1}{25}} 2^4 - \log_{\frac{1}{25}} 10^2 = 4 \log_{\frac{1}{25}} 2 - 2$$

$$۱) \log_9^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^2 \cdot 3 = 3^3 = 27 \Rightarrow x = 27 \text{ ق ق} \quad -۱$$

$$۲) x+1 = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x+1 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5} - 1 \text{ ق ق}$$

$$۳) \log(4-x) = \log\left(\frac{6-x}{x}\right) \Rightarrow \frac{4-x}{1} = \frac{6-x}{x} \Rightarrow 4x - x^2 = 6 - x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ ق ق}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = 3$$

$$۴) \log_3^{5x} = \log_3^{10} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2 \text{ ق ق}$$

$$۵) \log_4^{9a} = \log_4^{27} \Rightarrow 9a = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{9} \Rightarrow a = 3 \text{ ق ق}$$

$$۶) \log_{10}^{\frac{16}{2x}} = \log_{10}^2 \Rightarrow \frac{16}{2x} = 2 \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{4} = 4 \text{ ق ق}$$

$$۷) \log_{x+5}^{\frac{24}{7}} = \log_{x+5}^{\frac{8}{1}} \Rightarrow \frac{24}{x+5} = \frac{8}{1} \Rightarrow x+5 = \frac{24}{8} = 3 \Rightarrow x = 3 - 5 = -2 \text{ ق ق}$$

$$۸) \log_2^n = \log_{16}^{\frac{1}{2}} + \log_2^{49} = \log_2^{2 \times 49} \Rightarrow n = 2 \times 49 = 98 \text{ ق ق}$$

$$۹) \log_a^{4n} - \log_a^{x^2} = \log_a^x \Rightarrow \log_a^{\frac{4n}{x^2}} = \log_a^x \Rightarrow \frac{4n}{x^2} = x = \frac{x}{1} \Rightarrow x^3 = 4n \Rightarrow x = \sqrt[3]{4n} \text{ ق ق}$$

$$۱۰) \log_b^{\frac{1}{b}} + \log_b^{n^3} = \log_b^{(x-1)^3} \Rightarrow \frac{1}{bn} = (x-1)^3 \Rightarrow \frac{1}{bn} = (x-1)^3 \Rightarrow 2n = x-1 \Rightarrow x = 2n+1 \text{ ق ق}$$

$$۱۱) \log_{10}^{z(z+3)} = 1 \Rightarrow z(z+3) = 10^1 = 10 \Rightarrow z^2 + 3z - 10 = 0 \Rightarrow (z+5)(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow z+5 = 0 \text{ or } z-2 = 0 \Rightarrow z = -5 \text{ or } z = 2$$

که $z = -5$ قابل قبول نیست، چون \log_{10}^{-5} تعریف نشده است.

تذکره: در تمام معادلات لگاریتمی جواب به دست آمده باید در معادله اصلی امتحان شوند.

$$۱۲) \log_{\frac{1}{6}}(a^2 + 2) = 2 \Rightarrow 2(a^2 + 2) = 6^2 \Rightarrow a^2 + 2 = \frac{36}{2} = 18$$

$$\Rightarrow a^2 = 18 - 2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

به ازای $a = \pm 4$ عبارت $a^2 + 2$ مثبت پس هر دو قابل قبولند.

$$۱۳) \log_{\frac{1}{2}}(t+2)(t-2) = 1 \Rightarrow t^2 - 4 = 1 \Rightarrow t^2 = 5 \Rightarrow t = \pm\sqrt{5}$$

به ازای $t = -\sqrt{2}$ عبارت $t - 2$ منفی پس غیر قابل قبول است.

$$۱۴) \log_{\frac{1}{4}}(x(x-6)) = 2 \Rightarrow x^2 - 6x = 4^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ or } x = -2$$

به ازای $x = -2$ عبارت $x - 6$ منفی پس غیر قابل قبول است.

$$۱۵) \log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 1) = -1 \Rightarrow x^2 - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = \left(\frac{10}{1}\right)^1 = 10 \Rightarrow x^2 = 10 + 1 = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$$

به ازای $x = \pm\sqrt{11}$ عبارت $x^2 - 1$ مثبت پس هر دو قابل قبولند.

$$۱) \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{x} + \log_{\frac{1}{c}} x = \log_{\frac{1}{c}} \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \log_{\frac{1}{c}} 1 = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{c}} \frac{1}{x} = -\log_{\frac{1}{c}} x \quad -۲$$

۲) با استفاده از قسمت ۳ این تمرین قسمت ۲، ۱ ثابت می کنیم

$$\log_e^c \times \log_c^a = \left(\log_e^c \log_c^a\right) = \log_c^a = a \Rightarrow \log_e^a = \log_e^c \times \log_c^a \Rightarrow \log_c^a = \frac{\log_e^a}{\log_e^c}$$

$$۳) c^x = a \Rightarrow \log_c^a = x \Rightarrow c^{\log_c^a} = a$$

$$۴) c^a = c^a \Rightarrow \log_c^c = a \text{ با استفاده از تعریف لگاریتم}$$

-۳

$$۱) \log_{۲۷}^۳ \times \log_{۳}^{۲۷} = \frac{\log ۳}{\log ۲۷} \times \frac{\log ۲۷}{\log ۳} = ۱$$

$$۲) \log_{۷}^{۴۹} = \log_{۷} ۷^۲ = \frac{\log ۷^۲}{\log ۷} = \frac{۲ \log ۷}{\log ۷} = ۲$$

$$۳) \log_{۲}^۸ = \log_{۲} ۲^۳ = ۳ \log_{۲} ۲ = ۳, \log_{۳}(\log_{۲} ۸) = \log_{۳} ۳ = ۱$$

$$\Rightarrow \log_{۳}(\log_{۳}(\log_{۲} ۸)) = \log_{۳} ۱ = ۰$$

۴- راه حل دوم مطابق تعریف لگاریتم و درست است.

$$۵- \text{نادرست زیرا } \log(a-b) \neq \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$\log_{۱۰}(x+۲) = \log_{۱۰} ۸ - \log_{۱۰}(x-۵) \Rightarrow x+۲ = \frac{۸}{x-۵}$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۵) = ۸ \Rightarrow x^2 - ۳x - ۱۰ = ۸ \Rightarrow x^2 - ۳x - ۱۸ = ۰$$

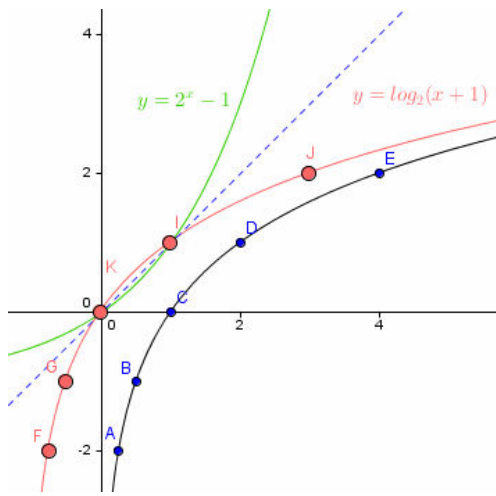
$$\Rightarrow (x-۶)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x = ۶ \text{ or } x = -۳$$

با جایگزینی داریم

$$x = ۶ \Rightarrow \log_{۱۰} ۸ = \log_{۱۰} ۸ - \log_{۱۰} ۱ \Rightarrow \checkmark$$

$$x = -۳ \Rightarrow \log_{۱۰} -۱ = \log_{۱۰} ۸ - \log_{۱۰} (-۸) \Rightarrow \times$$

۷- کافیسست نمودار تابع $y = \log_2 x$ را یک واحد به چپ انتقال دهیم تا $y = \log_2(x+1)$ به دست آید.



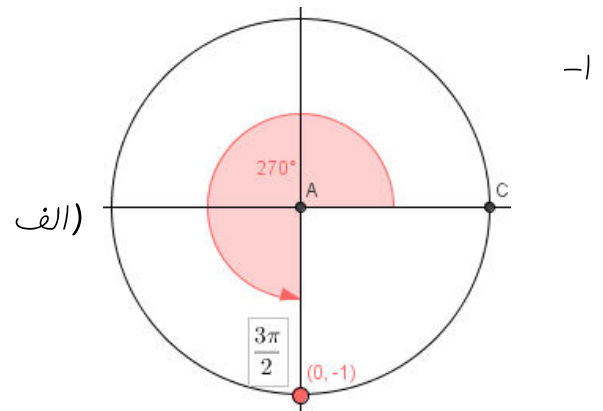
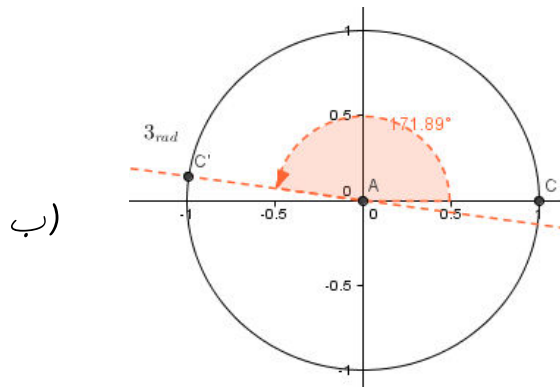
$$y = \log_2 x \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \hline y & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

۱) $\text{PH} = -\log(2/9 \times 10^{-4}) = -\log 29 - \log 10^{-5} = -1/46 + 5 = 3/54$ اسید -۱

۲) $\text{PH} = -\log(2/5 \times 10^{-11}) = -\log(25 \times 10^{-12})$ باز
 $= -\log 25 - \log 10^{-12} = -1/39 + 12 = 10/61$

۳) $\text{PH} = -\log(1 \times 10^{-7}) = -(-7) = 7$ قنطی

مقدار غلظت در آب فالفن که قنطی است برابر 10^{-7} مول بر لیتر است.



۲- 3π رادیان برابر ≈ 0.477 از $\left| \frac{-3}{2\pi} \right|$ از کُل دایره و -3π رادیان $\frac{3}{2} = 1.5$ از کُل دایره

را طی می کند.

$$\frac{\pi}{3} \left| \frac{180}{x} \right| \Rightarrow x = \frac{540}{\pi} \approx 171.892^\circ, \quad \frac{\pi}{3\pi} \left| \frac{180}{x} \right| \Rightarrow x = \frac{540\pi}{\pi} = 540^\circ$$

پس اولی معادل -171.892° و دومی معادل -540° است.

۳- زاویه بین هر دو عدد بر ساعت برابر $360^\circ \div 12 = 30^\circ$ است. پس عقربه ساعت شمار از ۱ تا ۳ بعد از ظهر $2 \times 30^\circ = 60^\circ$ را طی می کند.

$$\frac{\pi}{x} \left| \frac{180}{60} \right| \Rightarrow x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

۴

$$\frac{60 \text{ min}}{x} \left| \frac{2\pi}{2.5\pi} \right| \Rightarrow x = \frac{2.5\pi \times 60}{2\pi} = 75 \text{ min}$$

۵- فاصله بین دو کابین $\frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$ است و حرکت $x = \frac{47\pi}{10} \div \frac{\pi}{20} = 94$

چون از کابین ۳ شروع کردیم $97 = 94 + 3$ امین کابین از کابین اول جایا خواهد شد که باقیمانده آن بر ۴۰ برابر ۱۷ است. پس در اینصورت در موقعیت کابین ۱۷ قرار می گیرید.

۶

$$\frac{360^\circ}{\theta} \left| \frac{2\pi(6440) \text{ km}}{2\pi \times 6440} \right| \Rightarrow \theta = \frac{360 \times 1000}{40463} \approx 1/9$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(30^\circ) = \cos(36^\circ - 6^\circ) = \cos(6^\circ) = \frac{1}{2}$$

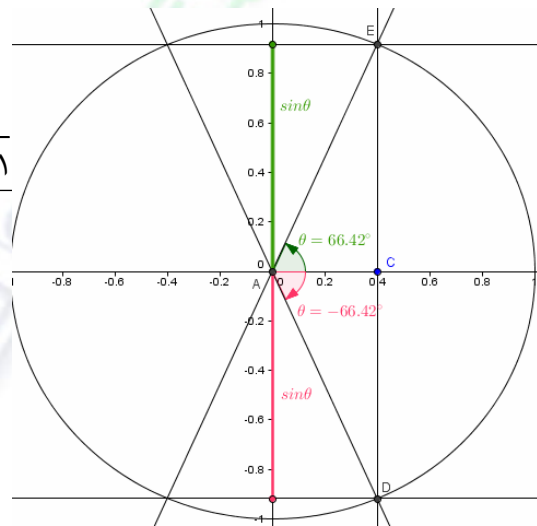
$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(135^\circ) = \sin(18^\circ - 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \frac{4}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$



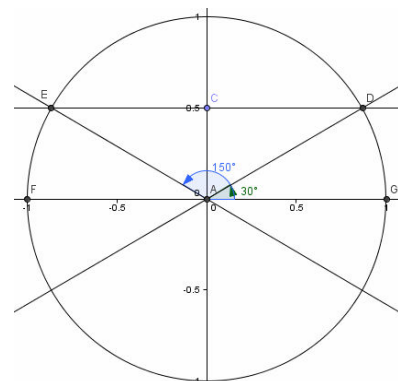
(الف -۲)

(ب)

۳- چون دایره مثلثاتی است پس $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ و بنابراین

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \div \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{الف) } \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

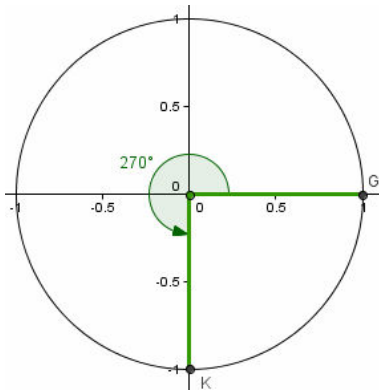
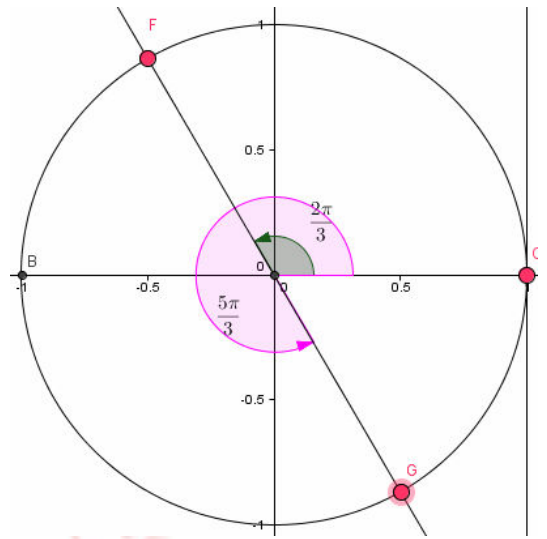


-۳

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$

ب)

$$\Rightarrow \theta_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

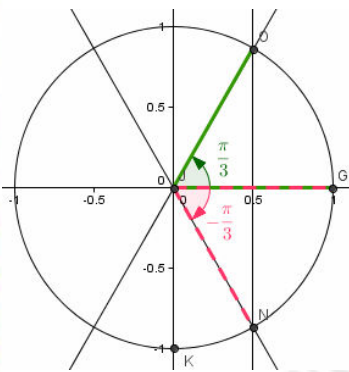


ج)

$$\cos \theta = 0, 0 < \theta < 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

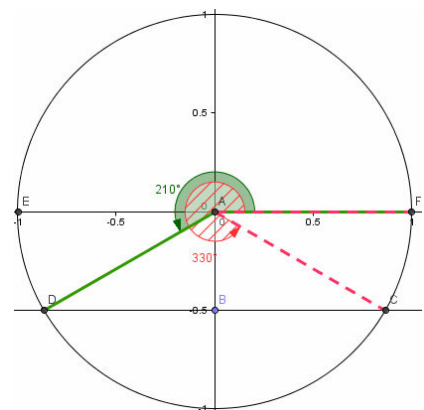
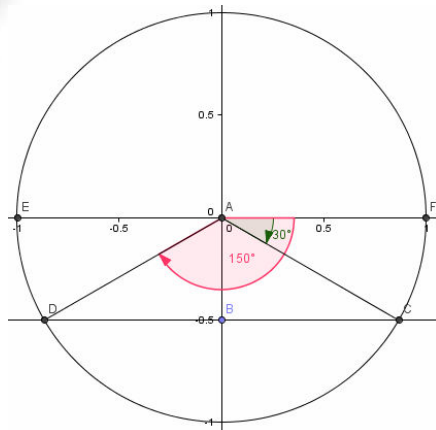
$$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -5$$

$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$



$$\cos \theta = \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ or } \theta = -\frac{\pi}{3} \quad -6$$

$$(ب) \theta = -\frac{\pi}{6}, \theta = -\frac{5\pi}{6} \quad (الف) \theta = \frac{7\pi}{6}, \theta = \frac{11\pi}{6} \quad -7$$

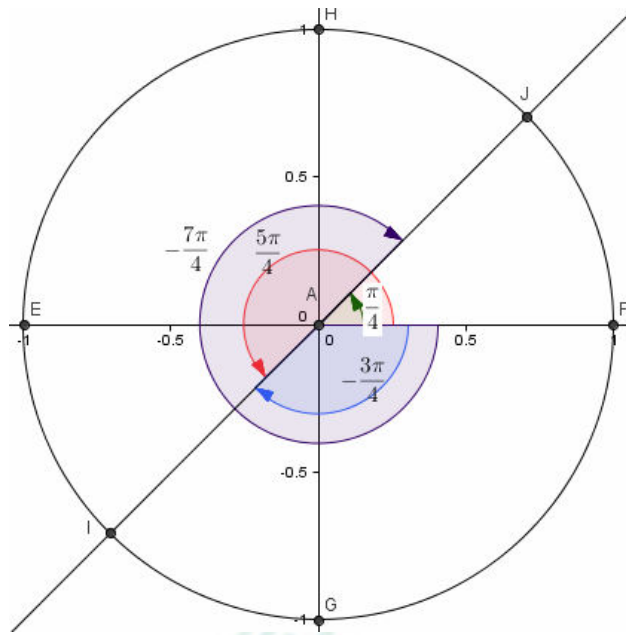


$$\sin \theta = \cos \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta_3 = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\theta_4 = -\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7\pi}{4}$$

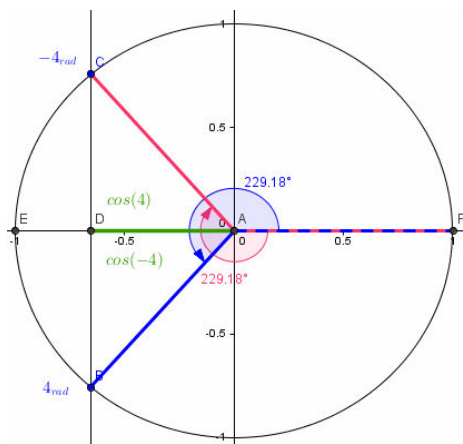


-۸

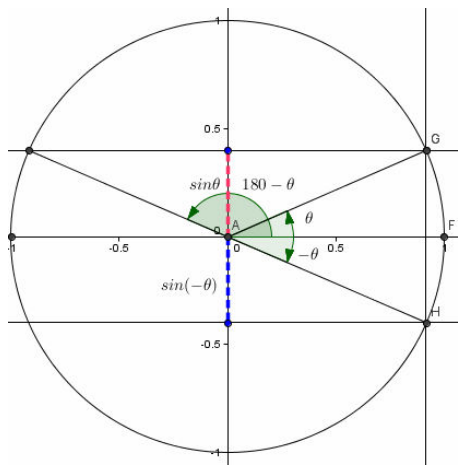
$$\text{الف) } y = 1 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2(1) = 3 \quad -1$$

$$\text{ب) } y = -1 + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 8}{8}$$

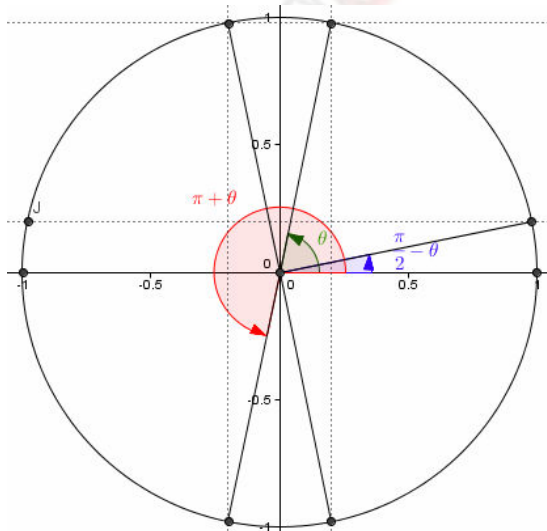
$$\text{ج) } y = 4 - \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{6} - \pi\right) = 4 - \frac{2}{3} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$



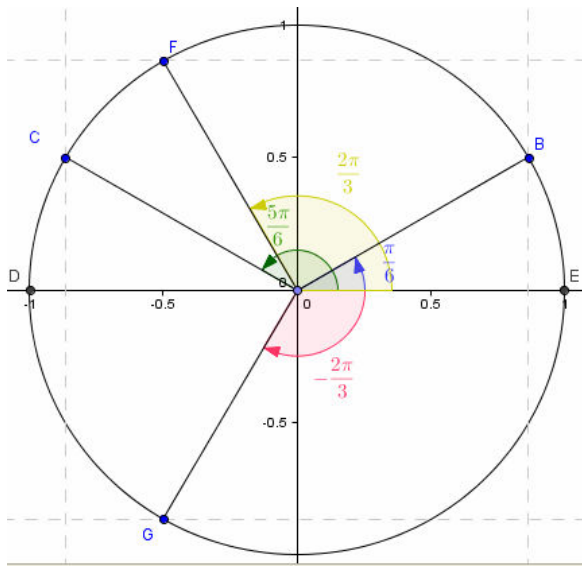
۲- با توجه به اینکه $\pi = 3/14$ پس
و همانطور که ملاحظه می‌گردد تساوی درست است.



۳- با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $\sin(-\theta)$
قرینه $\sin \theta$ و عبارت $\sin(180 - \theta)$ برابر
 $\sin \theta$ است.



۴- با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
برابر $\cos \theta$ و عبارت $\cos(\pi + \theta)$ قرینه
 $\cos \theta$ است.



۵- هر دو نادرست است زیرا

$$\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \pi - \sin \theta = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{4} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin(\pi - \theta) \neq \sin \pi - \sin \theta \quad -6$$

۷- مقدار $\cos(\pi - \theta)$ قرینه $\cos \theta$ است پس

$$\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = \cos \theta + (-\cos \theta) = 0$$

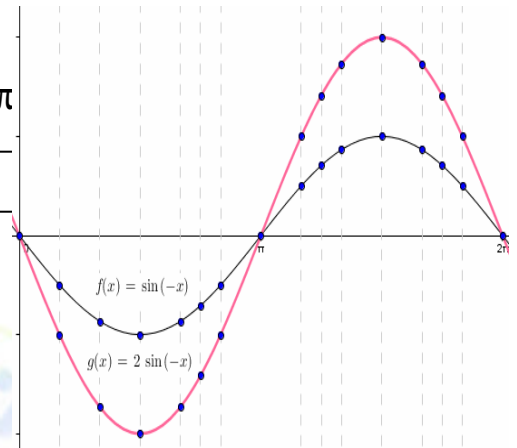
۸- چون شیب خط حاصل تقسیم ارتفاع بر مسافت افقی است پس مقدار $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ باید

$$m = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{تقسیم نمود}$$

x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(-x)$	۰	-۰/۵	-۰/۸	-۱	-۰/۸	-۰/۷	-۰/۵	۰
$2 \sin(-x)$	۰	-۱	-۱/۶	-۲	-۱/۶	-۱/۴	-۱	۰

-۱

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(-x)$	۰/۵	۰/۷	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۷	۰/۵	۰
$2 \sin(-x)$	۱	۱/۴	۱/۶	۲	۱/۶	۱/۴	۱	۰



$$y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

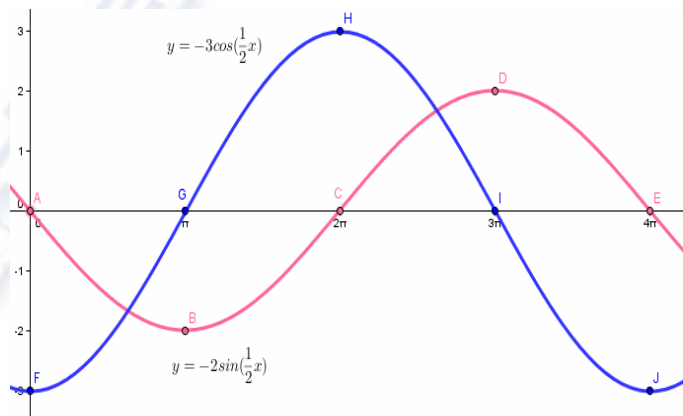
الف)

x	۰	π	2π	3π	4π
y	۰	-۲	۰	+۲	۰

$$y = -3 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

ب)

x	۰	π	2π	3π	4π
y	-۳	۰	۳	۰	-۳

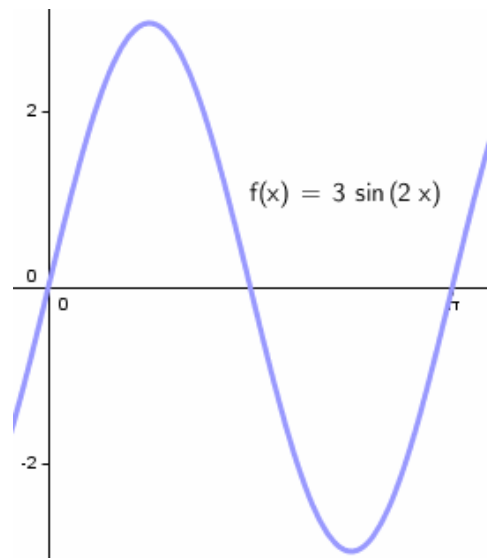


-۲

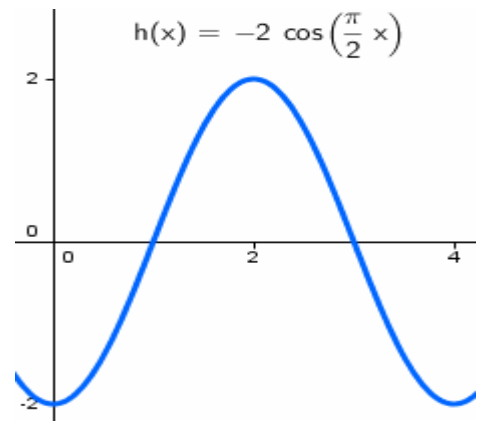
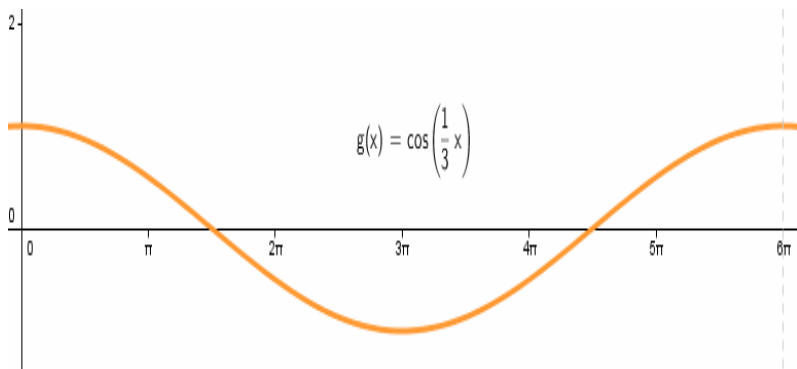
الف) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, $\text{Max}_f = 3$, $\text{min}_f = -3$

ب) $T = 2\pi \div \left(\frac{1}{3}\right) = 6\pi$, $\text{Max}_g = 1$, $\text{min}_g = -1$

ج) $T = 2\pi \div \left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $\text{Max}_h = 2$, $\text{min}_h = -2$



-۳

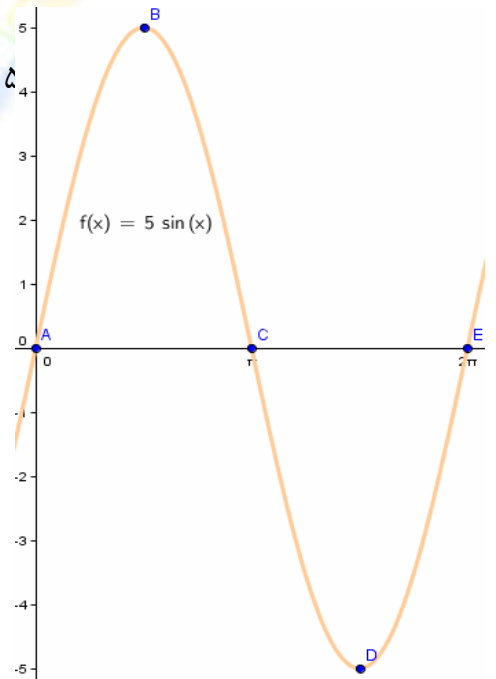


الف) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 6/5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6/5 \text{ cm} \Rightarrow \text{Max}(y) = 6/5$

ب) $\theta = 0 \Rightarrow y = 6/5 \sin(0) = 0 \text{ cm} \Rightarrow \text{min}(y) = 0$

ج) $y = 5 \sin \theta \Rightarrow$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	5	0	-5	0



۵- بالا سمت چپ (چون $b = \frac{4\pi}{\pi} \Rightarrow b = 4$) $T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$ و از طرفی

نقطه ی $A(0, 12)$ متعلق به تابع است یعنی $a = 12$ پس $y = 12 \cos(4x)$

بالا سمت راست (چون $b = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow b = 2$) $T = \pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$ و از طرفی

نقطه ی $A(0, -12)$ متعلق به تابع است یعنی $a = -12$ پس $y = -12 \cos(2x)$

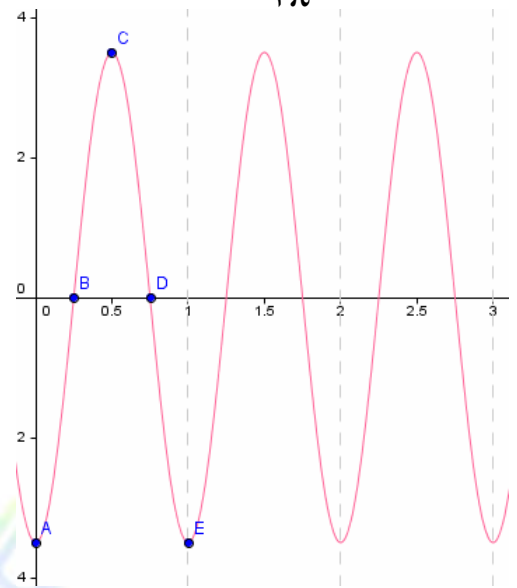
پائین (چون $b = \frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$) $T = 4\pi \Rightarrow b = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ و از طرفی

نقطه ی $A(\pi, -12)$ متعلق به تابع است یعنی $a = -12$ پس $y = -12 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

۶- چون $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ، نمودار در فاصله $[0, 1]$ رسم و سه بار تکرار تا حکم مسئله به دست آید.

الف)

t	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱
d	$-\frac{3}{5}$	۰	$\frac{3}{5}$	۰	$-\frac{3}{5}$



ب) $t = \frac{1}{4} \Rightarrow d = -\frac{3}{5} \cos(\pi) = -\frac{3}{5}(-1) = \frac{3}{5}$

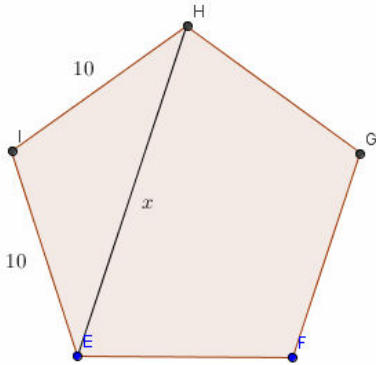
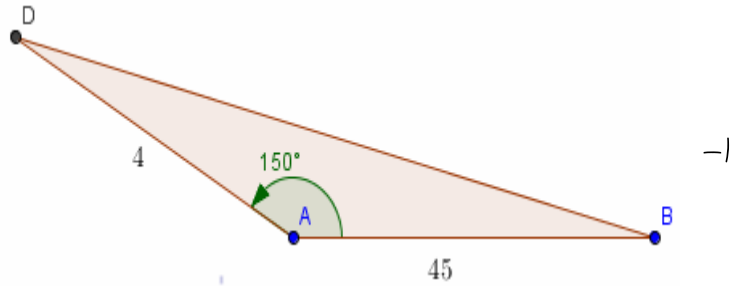
ج) $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ دوره تناوب تابع مدتی است که وزنه یک نوسان کامل دارد

$$x^2 = 40^2 + 45^2 - 2(40 \times 45) \cos(150^\circ)$$

$$= 1600 + 2025 + 1800 = 5425$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5425} \approx 73/6$$

$$\Rightarrow p = 40 + 45 + 73/6 = 158/6$$



۲- هر زاویه n ضلعی منتظم برابر $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$ است پس

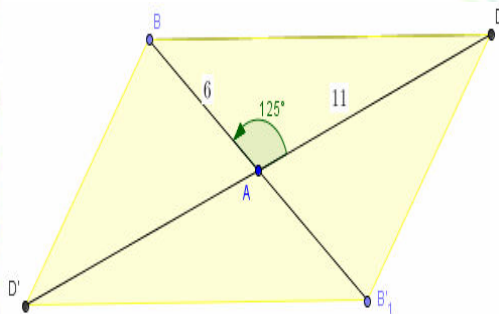
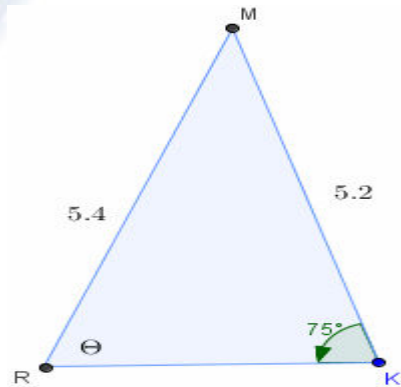
$$n = 5 \Rightarrow \theta = \frac{5-2}{5} \times 180 = 108^\circ$$

$$x^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10 \times 10) \cos(108^\circ)$$

$$\Rightarrow x^2 \approx 100 + 100 - 200(-0/3) = 260 \Rightarrow x \approx \sqrt{260}$$

$$\frac{\sin \theta}{5/2} = \frac{\sin 75^\circ}{5/4} \Rightarrow \sin \theta = \frac{5/2}{5/4} \cdot \sin 75^\circ \approx 0/93$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}(0/93) = 68/43^\circ$$

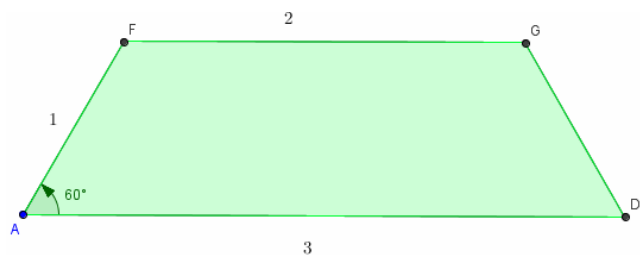


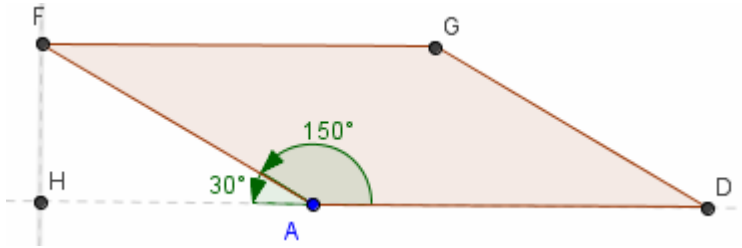
$$x^2 = 6^2 + 11^2 - 2(6 \times 11) \cos(125^\circ)$$

$$\Rightarrow x^2 \approx 36 + 121 - 132(-0/57) = 157 + 75/7 = 232/7 = BD$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} (30 + 20) (5\sqrt{3}) = 125\sqrt{3}$$





$$\sin 30^\circ = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \sin 30^\circ = 6$$

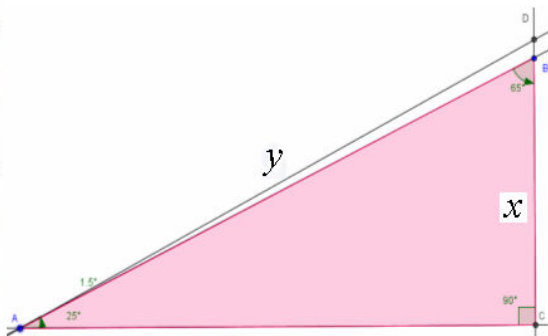
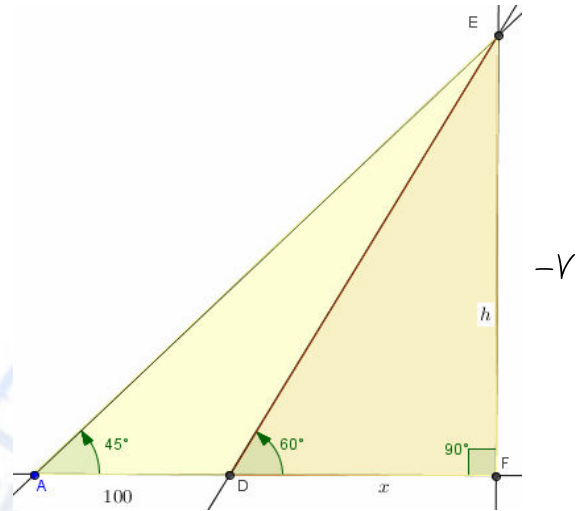
$$\Rightarrow S = 12 \times 6 = 90$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan 60^\circ} \quad \text{①}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{x+100} \Rightarrow x+100 = \frac{h}{\tan 45^\circ} \quad \text{②}$$

$$\text{①, ②} \Rightarrow \frac{h}{\tan 60^\circ} + 100 = \frac{h}{\tan 45^\circ}$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\frac{1}{\tan 45^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}} = \frac{100}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \approx 236$$



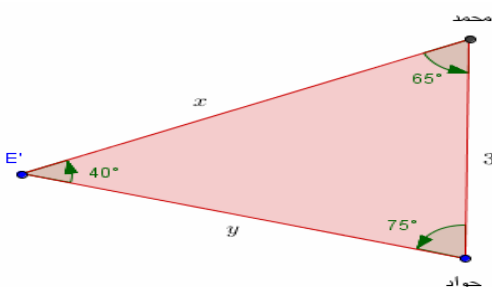
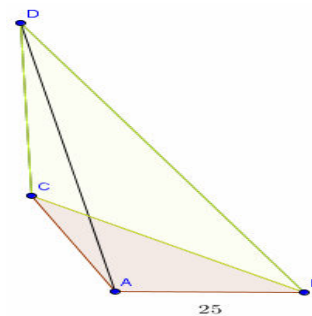
$$\frac{\sin 115^\circ}{y} = \frac{\sin 17.5^\circ}{11} \Rightarrow y = \frac{\sin 115^\circ}{\sin 17.5^\circ} \times 11 \approx 381 \text{ m}$$

$$\sin 26.5^\circ = \frac{x+11}{y} \Rightarrow x = y \cdot \sin 26.5^\circ - 11 \approx 159 \text{ m}$$

$$\Delta ABC : \frac{\sin 10^\circ}{25} = \frac{\sin 45^\circ}{AC} \Rightarrow AC = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 10^\circ} \times 25 \approx 102 \text{ m}$$

$$\Delta ADC : \tan 60^\circ = \frac{DC}{AC} \Rightarrow$$

$$DC = AC \times \tan 60^\circ = 102 \times \tan 60^\circ \approx 177$$



$$\frac{\sin 75^\circ}{x} = \frac{\sin 40^\circ}{3} \Rightarrow x = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 40^\circ} \times 3 \approx 4.5 \text{ km}$$

$$\frac{\sin 65^\circ}{y} = \frac{\sin 40^\circ}{3} \Rightarrow y = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 40^\circ} \times 3 \approx 4 \text{ km}$$

$$۱- \text{الف) } A+B = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}, B+C = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}, C+A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } ۲A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, ۳C = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۶ & ۱۵ \end{bmatrix}, ۲A+B = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}, B-C = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B+A = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix} = A+B$$

$$\text{ج) } (A+B)+C = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ ۴ & ۱۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A+(B+C) = (A+B)+C$$

رابطه جابجایی و شرکت پذیری برای عمل جمع ماتریسها برقرار است.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۹ \\ ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۱۷ & ۱۸ \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۰ & ۱۲ \\ ۱۴ & ۱۶ & ۱۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۱۷ & ۱۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۲۴ & ۲۷ \\ ۳۰ & ۳۳ & ۳۶ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۹ \\ ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ \\ ۱۶ & ۱۷ & ۱۸ \end{bmatrix} \right) \right) \\ & = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۲ & ۲۴ \\ ۲۶ & ۲۸ & ۳۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۲۴ & ۲۷ \\ ۳۰ & ۳۳ & ۳۶ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$۲- -A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}, -B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}, -C = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۱ \\ -۳ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۳- R = -P - Q = -(P+Q) = -\left(\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ -۶ & ۴ \\ ۲ & -۹ \end{bmatrix} \right) = -\begin{bmatrix} ۸ & ۹ \\ -۱ & ۳ \\ ۶ & -۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & -۹ \\ ۱ & -۳ \\ -۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$۴- \begin{cases} ۲x - ۳y = ۶ \\ x + ۳y = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۹ \Rightarrow x = ۳, ۳ + ۳y = ۹ \Rightarrow ۳y = ۶ \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۰ \end{cases}$$

$$|A| = 5 + 8 = 13, |B| = 10 - 10 = 0, |C| = 1 - 0 = 1 \quad -۱$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4+3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \quad -۲$$

چون $|B| = 0$ پس B وارون پذیر نیست. $|B| = (6 \times 1) - (-3 \times (-2)) = 6 - 6 = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}, (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, A^{-1} \times B^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & 63 \\ -10 & 37 \end{bmatrix} \quad -۳ \text{ الف) نادرست، مثال}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} \neq A^{-1} \times B^{-1}$$

ب) نادرست، مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, (A+B)^{-1} = -\frac{1}{46} \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow I^{-1} = \frac{1}{1-0} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad -۴$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(12-10)} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A \quad -۵$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (1 \times 4) - (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow 4 - a^2 + a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ or } a = -2$$

-۶

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الف)

$$= \frac{1}{6+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{7} \\ y = \frac{5}{7} \end{cases}$$

-۷

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب)

$$= \frac{1}{8-18} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{10} \\ y = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ج)

$$= \frac{1}{4-5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -29 \\ -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 36 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 29 \\ y = 36 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$$

-۸

$$\text{الف) } X + I = 2I \Rightarrow X = 2I - I = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-۹

$$\text{ب) } 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

۱- برای هر یک از ارقام دو انتخاب ۱، ۲ وجود دارد پس طبق اصل ضرب $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ حالت ممکن است.

۲- { } ↔ { ۱, ۲, ۵, ۶ } ↔ { ۱۱۰۰۱۱ } (الف)

برای هر رقم کد شش رقمی دو حالت ۰، ۱ وجود دارد، طبق اصل ضرب کل حالات $2^6 = 64$ (ب) یک عضو مشخص یا در زیر مجموعه هست یا نیست که معادل ۰، ۱ است. پس تعداد زیر مجموعه ها هم $2^6 = 64$ است.

طبق قسمت (ب) برای هر عضو دو حالت بودن یا نبودن در زیر مجموعه وجود دارد. (ج)

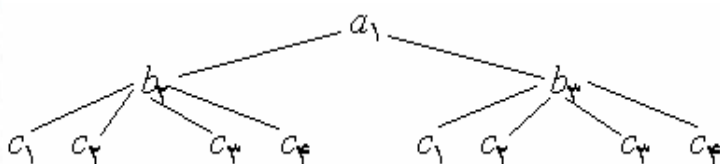
پس طبق اصل ضرب تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر $2^n = 2 \times 2 \times \dots \times 2$ است.

۳- برای رقم یکان و صدگان ۹ انتخاب یکسان { ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ } و برای رقم دهگان ۱۰ انتخاب { ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ } وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد کل حالات ممکن $9 \times 10 = 90$ است.

۴- (الف) $2 \times 3 = 6$ (ب) $3 \times 2 \times 2 = 12$

۵- برای رقم صدگان ۸ حالت { ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹ } و برای هر یک از دو رقم یکان و دهگان ۹ حالت { ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹ } ممکن است. پس $8 \times 9 \times 9 = 648$ تعداد کل حالتها است.

۶- اگر خانه ها A, B, C, D, E نامگذاری کنیم. برای A سه حالت و برای B دو حالت، چون رنگ A انمی تواند اختیار کند، و برای C هم دو حالت، چون رنگ خانه B را نمی تواند اختیار کند و ... پس تعداد حالات برابر $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ است.



۷- به همین صورت روبرو برای a_2, a_3 داریم

$22 = 6 + 8 + 8$ حالت وجود دارد.

$$۱- \quad \text{ج) } ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲ \quad \text{ب) } ۲! \times ۴! = ۲ \times ۲۴ = ۴۸ \quad \text{الف) } ۵! = ۱۲۰$$

۲- عبارت com, p, u, t, e, r را به عنوان یک شی در نظر بگیریم، تعداد جایگشتهای com, p, u, t, e, r مورد نظر است که برابر $۶! = ۷۲۰$ حالت می باشد.

۳- برای عدد ۱ ده حالت و چون تابع یک به یک است برای ۲ نه حالت و به همین ترتیب ... پس تعداد توابع یک به یک با شرایط مسئله $۱۰! = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times \dots \times ۱$ است.

۴- حالت اول) خانه ۱، ۱، ۰ قرار دهیم، خانه ۵ دارای ۹ حالت و ارقام متمایزند پس خانه های بعدی

$$\begin{array}{c} \textcircled{5} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\ \boxed{9} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{1} = ۳۰۲۴ \end{array}$$

یک واحد کم می شود،

حالت دوم) خانه ۱، ۱، رقم زوج غیر صفر قرار دهیم، خانه ۱ دارای ۴ حالت و خانه ۵ دارای ۸ حالت (یک رقم در خانه ۱ و رقم ۰ غیر مجاز) و خانه ۴ دارای ۸ حالت (دو رقم در خانه های یک و پنج استفاده شده) و خانه های بعدی یک واحد کم می شود،

$$\begin{array}{c} \textcircled{5} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\ \boxed{8} \times \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{4} = ۱۰۷۵۲ \end{array}$$

پس کل تعداد حالات $۱۰۷۵۲ + ۳۰۲۴ = ۱۳۷۷۶$ است.

$$۵- \text{مسئله ترتیب ۳ از ۲۵ است پس } P(۲۵, ۳) = \frac{۲۵!}{(۲۵-۳)!} = \frac{۲۵!}{۲۲!} = ۲۵ \times ۲۴ \times ۲۳ = ۱۳۸۰۰$$

۶- سه کتاب فیزیک یک شی در نظر گرفته، پس با چهار کتاب ریاضی پنج شی داریم که تعداد جایگشتهای آنها $۵!$ است. ولی خود سه کتاب فیزیک می توانند در کنار هم جابجا شوند به تعداد $۳!$. پس کل تعداد جایگشتهای برابر $۵! \times ۳! = ۷۲۰$ است.

۷- برای اولی ها ترتیب ۶ از ۱۰ و برای دومی ها ترتیب ۳ از ۱۰ و برای سومی ها ۱۱ صندلی در دو ردیف می ماند در مالیکه ۴ نفرند. تعداد حالات $P(۱۰, ۶) \times P(۱۰, ۳) \times P(۱۱, ۴)$ است.

۱- $\binom{n}{k}$ تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی است. و مجموع تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است (هر عضو دو حالت بودن یا نبودن در زیرمجموعه را دارد).
کل تعداد زیر مجموعه ها =

تعداد زیرمجموعه های n عضوی + ... + تعداد زیرمجموعه های ۱ عضوی + تعداد زیرمجموعه های ۰ عضوی

۲- (۱ کشتی گیر و ۲ وزنه بردار) یا (۲ کشتی گیر و ۱ وزنه بردار) یا (۳ کشتی گیر و ۰ وزنه بردار)

$$\binom{5}{0} \times \binom{7}{3} + \binom{5}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} = 1 \times 35 + 5 \times 21 + 10 \times 7 = 210$$

۳- انتخاب ۲ از ۵ داریم. در ضمن برای هر دو زبان دو فرهنگ لغت مثلا انگلیسی به فارسی و بالعکس

لازم است. تعداد فرهنگ لغات لازم برابر $2 \times \binom{5}{2} = 2 \times 10 = 20$ است.

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10} = 1 + 45 + 210 + 210 + 45 + 1 = 512$$

۵- چون هیچ سه نقطه بر دایره هم خط نیستند با هر سه تا از آنها می توان مثلثی رسم کرد.

پس انتخاب ۳ از ۷ داریم که برابر $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$ است.

۶- از بین ۵ شهر ۳ شهر انتخاب کرده و برای هر شهر ۱ دانش آموز از ۲۰ دانش آموز انتخاب می شود.

تعداد انتخاب برابر $\binom{5}{3} \times \binom{20}{1} = 10 \times 20 = 200$ است.