تشریح مسایل نظریه اساسی مدارها و شبکه ها

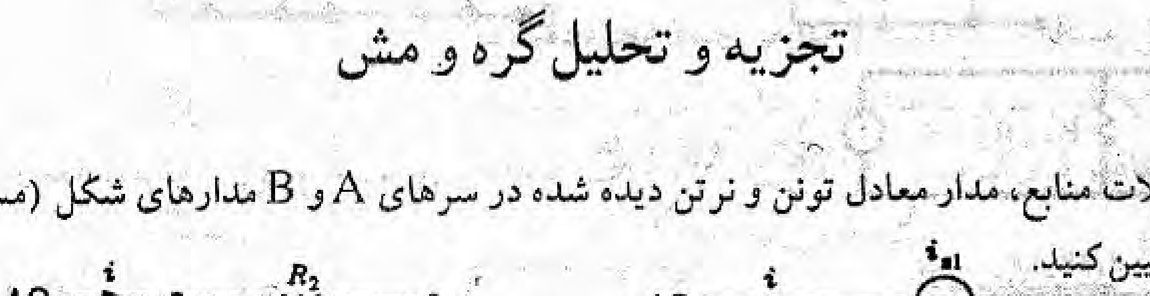
۱۰

تجزیه و تحلیل گره و مش

۱۰

تجزیه و تحلیل گره و مش

۱- باانجام تبدیلات منابع، مدار معادل تونن و نرتن دیده شده در سرهای A و B مدارهای شکل (مسالهٔ ۱۰-۱) راتعیین کنید.

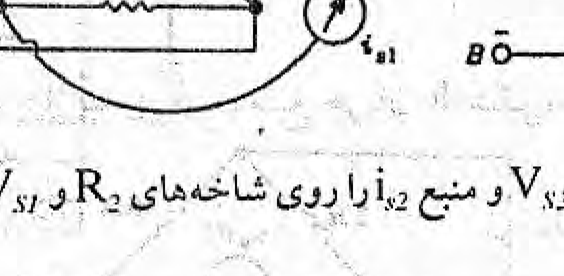


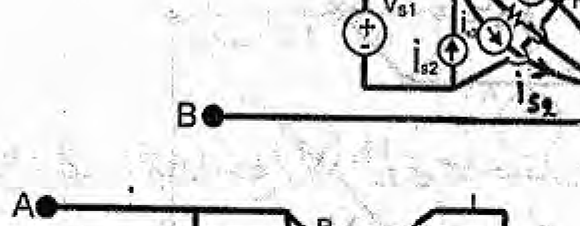
(ب) (الف)

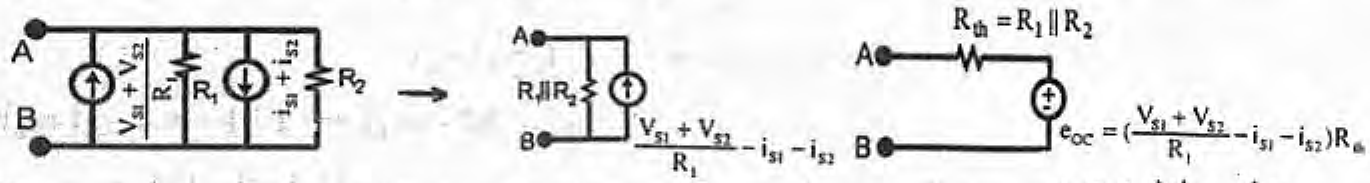
حل :

الف- منبع جریان i_{s1} را روی شاخه‌های R_2 و V_{S2} و منبع i_{s2} را روی شاخه‌های R_2 و V_{S1} پخش می‌کنیم:

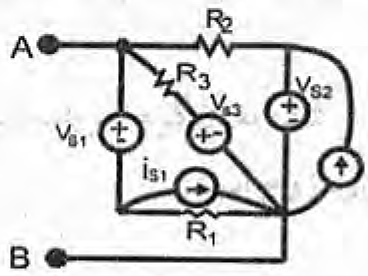
منابع i_{s1} و i_{s2} به ترتیب با V_{S2} و V_{S1} موازی شده‌اند و با توجه به KVL می‌توان آنها را حذف نمود.







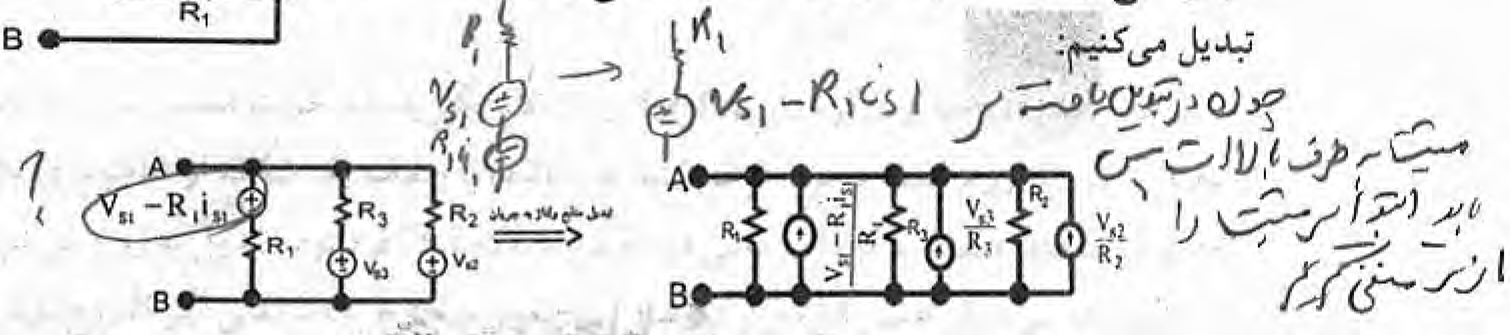
مدار معادل نرتن:



ب- منبع i_{S1} را روی R_1 و V_{S2} پخش می‌کنیم.

بنابر KVL، i_{S2} که با V_{S2} موازی است، حذف می‌شود.

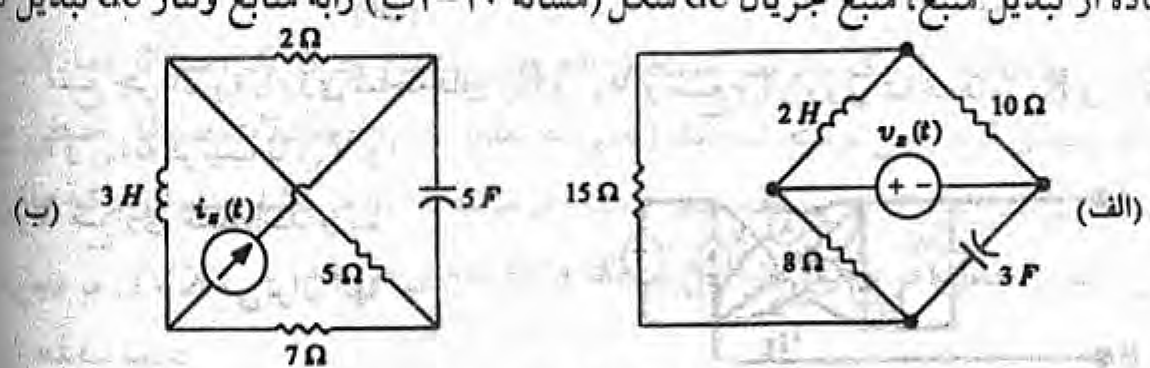
سپس منبع i_{S1} را که با R_1 موازی است بـه منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم:



مدار معادل نرتن

۲- الف- بااستفاده از تبدیل منبع، منبع ولتاژ dc شکل (مسالهٔ ۱۰-۲ الف) را به منابع جریان dc تبدیل کنید.

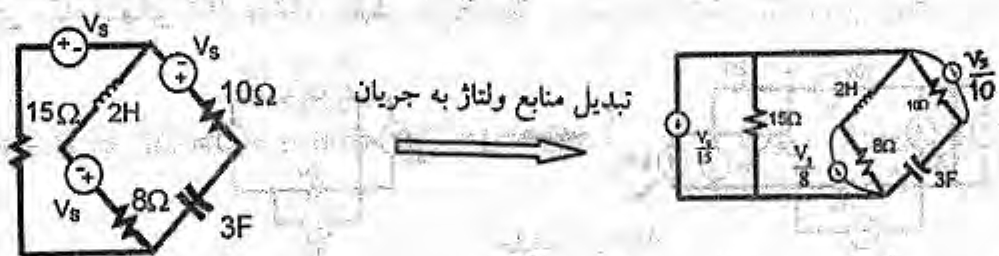
ب- بااستفاده از تبدیل منبع، منبع جریان dc شکل (مسالهٔ ۱۰-۲ب) رابه منابع ولتاژ dc تبدیل کنید

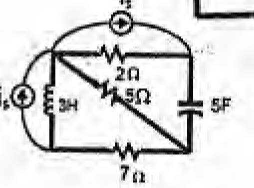


حل :الف- ابتدا منبع V_s را روی شاخه‌های 2H و 8Ω پخش می‌کنیم.

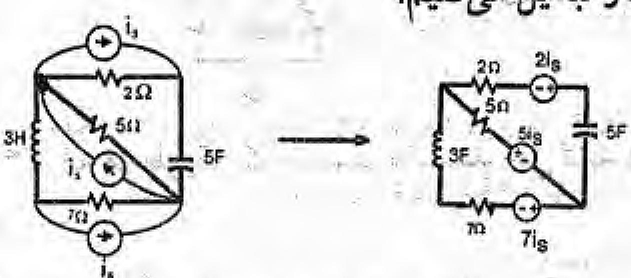
سپس جای سلف و منبع V_S را عوض می‌کنیم.

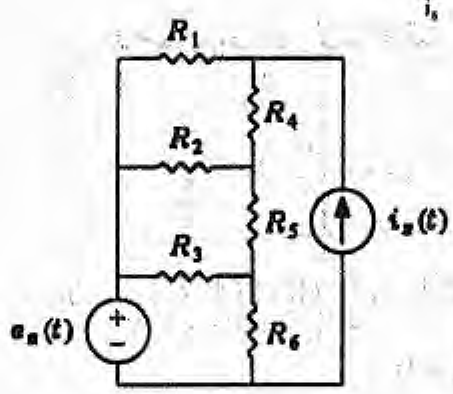
دو باره منبع V_S مرتبط با سلف را روی شاخه‌های 10Ω و 15Ω پخش می‌کنیم:





ب- ابتدا منبع i_s را روی سلف و مقاومت 2^Ω پخش می‌کنیم:
سپس منبع i_s موازی با سلف را، روی مقاومتهای 5^Ω و 7^Ω پخش کرده بعد منابع جریان را به ولتاژ تبدیل می‌کنیم.

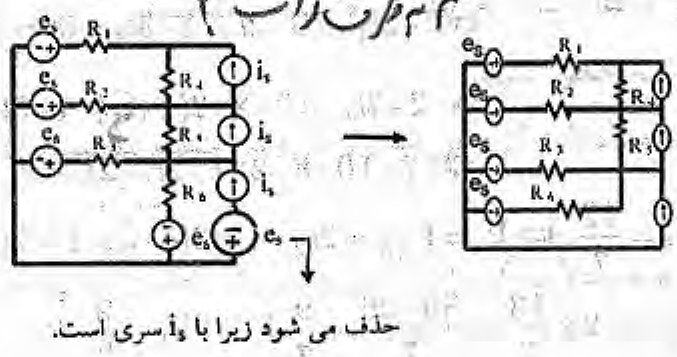


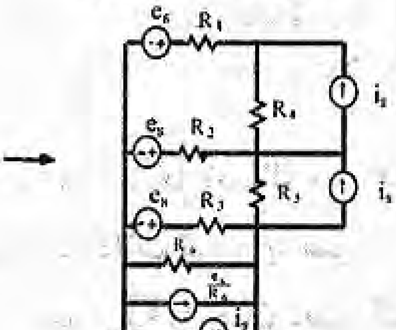


شکل (مسألهٔ ۱۰-۳)

۳- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۳) تبدیل منابعی چنان انجام دهید که منابع ولتاژ به طور سری با عناصر و منابع جریان به طور موازی با عناصر قرار گیرند. چرا الان هم به طرف بالا رفته هم به طرف راست؟

حل :

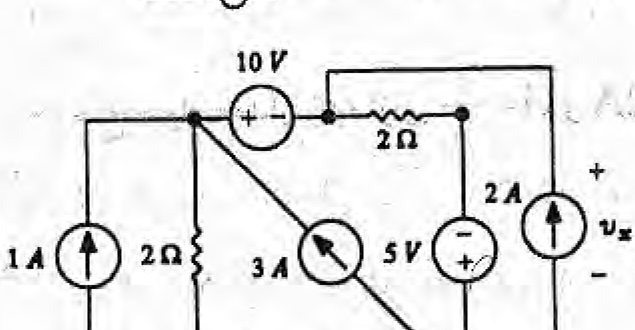




۴- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۴) تبدیلات لازم منابع را برای اهداف زیر انجام دهید:

الف- هیچ شاخهٔ تنها از منبع ولتاژ یا منبع جریان وجود نداشته باشد و تمام منابع ولتاژ، سری با عناصر و تمام منابع جریان موازی با عناصر قرار گیرند.

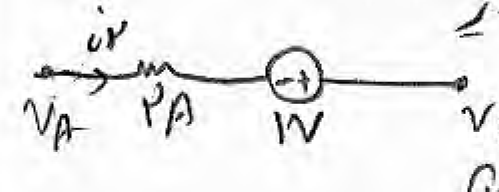
ب- همهٔ منابع به منابع جریان موازی با عناصر تبدیل شوند.



شکل (مسألهٔ ۱۰-۴)

حل:

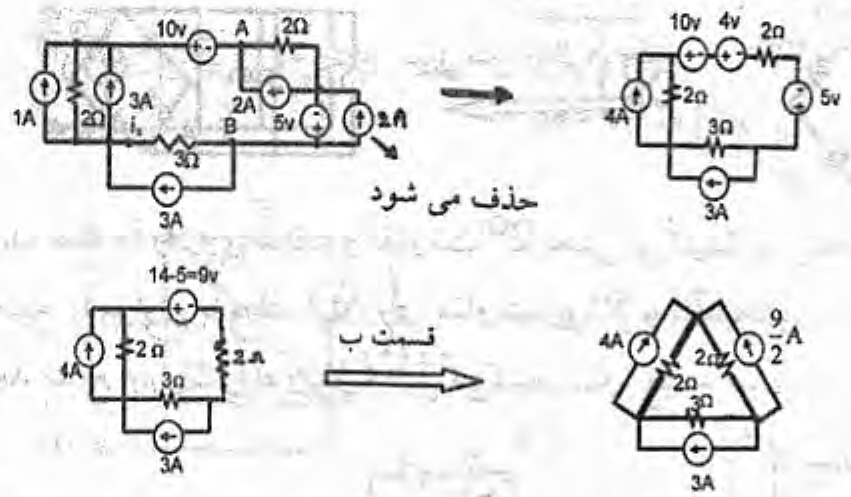
۱/ اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B یعنی V_{AB} یا V_{A-B} در شاخه زیر



مجموع پتانسیل‌های بین دو نقطه A و B V_{AB} به شرط اینکه جهت قراردادی جریان و ولتاژ رعایت شود

i + v − $V = R i$ یعنی جریان از A به B باشد

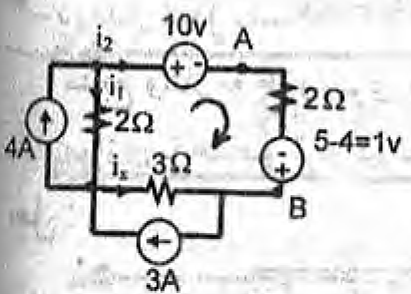
الف- منبع $3A$ را روی مقاومتهای 2Ω و 3Ω پخش می‌کنیم:



۵- مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۴) رابه هر طریقی که مناسب دانستید حل کنید ومقادیر V_x و i_x رابه دست آورید.

حل:

از یکی از مدارهای معادل مسالهٔ قبل که مناسب می‌باشد استفاده می‌کنیم:



$$kcl:\begin{cases} i_1+i_2=4 \ \Rightarrow i_2=4-i_1 \\ 3+i_1=4+i_x \ \Rightarrow \ i_1=1+i_x \end{cases}$$

$$kvl: -2i_1+10+2i_2-1-3i_x=0 \Rightarrow -2(1+i_x)+10+2(4-i_1)-1-3i_x=0$$

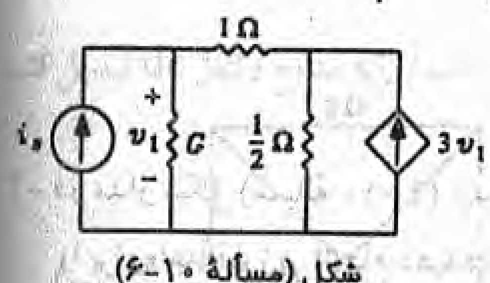
$$\Rightarrow -2-2i_x+10+8-2(1+i_x)-1-3i_x=0$$

$$\Rightarrow -2+10+8-2-1-2i_x-2i_x-3i_x=0$$

$$\Rightarrow 7i_x=13 \Rightarrow i_x=\frac{13}{7}A \Rightarrow V_x=V_{AB}=2i_2-1=2(4-i_1)-1=2(4-1-i_x)-1=5-2i_x$$

$$\Rightarrow V_x=5-2i_x=5-2\times\frac{13}{7}=\frac{35-26}{7}=\frac{9}{7}\ V \ \Rightarrow V_x=\frac{9}{7}\ V$$

۶- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۶)



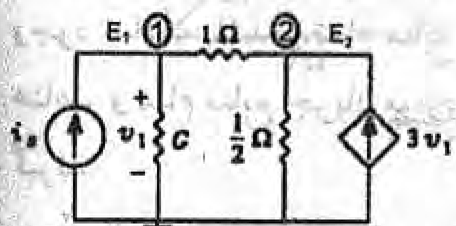
شکل (مسالهٔ ۱۰-۶)

الف- معادلات گره را به صورت نظری بنویسید.

ب- مقدار G را چنان تعیین کنید که مدار جواب یکتایی داشته باشد.

پ- وضع جواب مدار را به ازای $G=\frac{1}{3}$ و $i_s=2A$ تعیین کنید.

حل:



الف- $Y_nE=I_s$

$$\begin{bmatrix} G+1 & -1 \\ -1 & 1+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s \\ 3V_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s \\ 3E_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G+1 & -1 \\ -1-3 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} G+1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

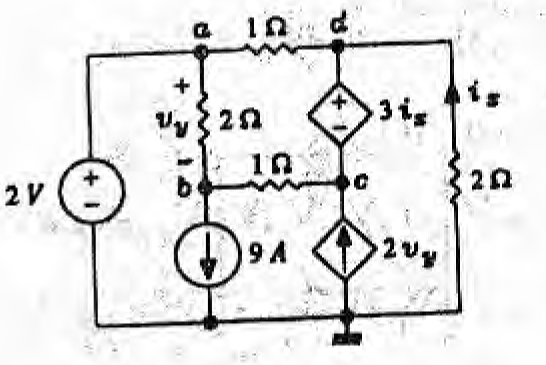
ب- برای این‌منظور باید دترمینان ماتریس Y_n مخالف صفر باشد:

$$(G+1)3-(-1)(-4)\neq 0 \Rightarrow 3G+3-4\neq 0 \Rightarrow 3G\neq 1 \Rightarrow G\neq \frac{1}{3}$$

ج-در حالتی که $G=\frac{1}{3}$ می‌باشد، دو معادله داریم که ناسازگار هستند و جوابی بدست نمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+1 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}E_1-E_2=2 \Rightarrow \frac{4}{3}E_1=E_2+2 \\ -4E_1+3E_2=0 \Rightarrow 4E_1=3E_2 \Rightarrow \frac{4}{3}E_1=E_2 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که طرف اول تساویها برابر و طرف دوم نابرابر بوده دستگاه جواب ندارد.



شکل (مسالهٔ ۱۰-۷)

۷-الف- مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۷) را تحلیل کرده و ولتاژ گره c و جریان i_x رابه دست آورید.

ب- گراف مدار داده شده را رسم کنید و ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ این گراف را بنویسید.

پ- کلیهٔ کات ستهای این گراف را که از مجموعهٔ شاخه‌های وصل شده به یک گره ساده تشکیل نمی‌شوند مشخص کنید.

ت- آیا می‌توانید معادلات گره این مدار رابا روش منظم بنویسید؟ اگر جواب مثبت است این کار راانجام دهید.

ث- آیا می‌توانید معادلات گره این مدار راباروش نظری بنویسید؟ اگر جواب مثبت است این کار را انجام دهید.

حل:

الف- فرض می‌کنیم مجهولات مساله V_c، i_x و V_y باشند و بقیهٔ کمیتها معلوم.

بانوشتن روابط kvl داریم: $V_a=2V \quad V_b=2-V_y \quad V_d=-2i_x$?

برای کات ست dc، kcl می‌نویسیم:

$$\frac{V_{ad}}{1\Omega}+i_x=\frac{V_{cb}}{1\Omega}-2V_y$$

$$\Rightarrow V_a-V_d+i_x=V_c-V_b-2V_y \Rightarrow 2+2i_x+i_x=V_c-2+V_y-2V_y \Rightarrow V_y=V_c-3i_x-4 \qquad (1)$$

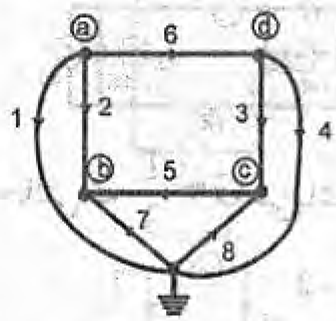
$$V_{dc}=3i_x \Rightarrow V_d-V_c=3i_x \Rightarrow -2i_x-V_c=3i_x \Rightarrow V_c=-5i_x \qquad (2)$$

برای گره b، kcl می‌نویسیم:

$$\frac{V_y}{2\Omega}+\frac{V_{cb}}{1\Omega}=9A \Rightarrow \frac{V_y}{2}+V_c-V_b=9 \Rightarrow \frac{V_y}{2}+V_c-2+V_y=9 \Rightarrow V_y=\frac{2}{3}(11-V_c) \qquad (3)$$

$$(1),(3) \Rightarrow \frac{2}{3}(11-V_c)=V_c-3i_x-4 \Rightarrow 5V_c=9i_x+34 \overset{(2)}{\Rightarrow} 5(-5i_x)=9i_x+34$$

$\Rightarrow -25i_x - 9i_x = 34 \Rightarrow -34i_x = 34 \Rightarrow i_x = -1A \overset{(2)}{\Rightarrow} V_c = 5V$



ب -

$$\begin{array}{cc} & \text{شاخه‌ها} \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \text{گره‌ها}\downarrow & \\ A= \begin{array}{c}(a)\\(b)\\(c)\\(d)\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

پ - $\{1,2,3,4\}$, $\{1,6,5,7\}$, $\{5,6,4,8\}$, $\{2,3,7,8\}$, $\{1,7,4,3,5\}$

, $\{1,2,5,8,4\}$, $\{6,2,7,8,4\}$, $\{1,7,8,3,6\}$

ت - $kvl: V_a = 2V \quad (1) \quad V_y = V_a - V_b \quad (2) \quad V_d = -2i_x \quad (3) \quad 3i_x = V_d - V_c \quad (4)$

$kcl: \dfrac{V_y}{2} + \dfrac{V_c - V_b}{1} = 9 \quad (5) \qquad \dfrac{V_a - V_d}{1} + i_x + 2V_y + \dfrac{V_b - V_c}{1} = 0 \quad (6)$

پارامترهای V_a، V_b، V_c، V_d، i_x و V_y هستند و ملاحظه می‌شود که 6 رابطهٔ مستقل داریم که برای یافتن ولتاژ گره‌ها کافی هستند. i_x و V_y را در روابط فوق حذف می‌کنیم. ولتاژ V_c و جریان i_x را درقسمت الف حساب کرده‌ایم و ولتاژ V_a نیز معلوم می‌باشد:

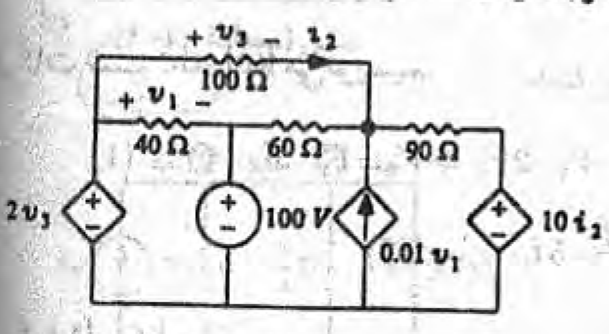
$V_a = 2V \quad V_c = 5V \quad i_x = -1A$

$(3) \rightarrow V_d = -2i_x = -2(-1) \rightarrow V_d = 2V$

$(2),(5) \rightarrow \dfrac{V_a - V_b}{2} + V_c - V_b = 9 \rightarrow \dfrac{2 - V_b}{2} + 5 - V_b = 9 \rightarrow V_b = -2V$

ث - چون منابع ولتاژ هم داریم و منابع وابسته هم وجود دارند، نمی‌توان با روش نظری مساله را حل کرد.

۸- معادلات گره رادر شکل (مسالهٔ ۱۰-۸) بنویسید و جریان i_2 راحساب کنید.

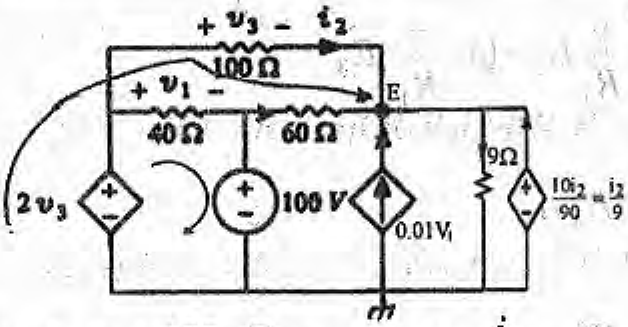


شکل (مسالهٔ ۱۰-۸)

حل:

در مسیرهای مشخص شده kvl و در گره E، kcl می‌نویسیم:

$kvl: -2V_3 + V_3 + E = 0 \Rightarrow V_3 = E$



$$-2V_3+V_1+100=0 \Rightarrow V_1=2V_3-100=2E-100$$

برای مقاومت 100Ω داریم: $i_2=\frac{V_3}{100}=\frac{E}{100}$

جریان مقاومت 90Ω برابر است با $\frac{E}{90}$

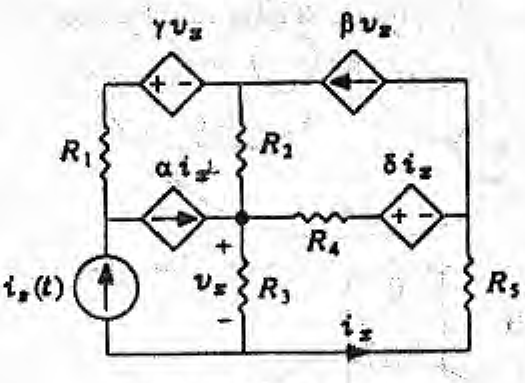
$$\text{E درگره kcl}: \frac{100-E}{60\Omega}+i_2+0.01V_1+\frac{i_2}{9^{\Omega}}-\frac{E}{90^{\Omega}}=0 \Rightarrow \frac{100-E}{60}+\frac{E}{100}+\frac{2E-100}{100}+\frac{E}{900}-\frac{E}{90}=0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}-\frac{E}{60}+\frac{E}{100}+\frac{E}{50}-1+\frac{E}{900}-\frac{E}{90}=0 \Rightarrow \frac{2}{3}+\frac{E}{300}=0 \Rightarrow E=-\frac{2}{3}\times 300=-200V$$

$$\Rightarrow i_2=\frac{E}{100}=\frac{-200}{100}=-2A \Rightarrow i_2=-2A$$

۹-الف- معادلات گره مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۹) را باروش میان بر بنویسید.

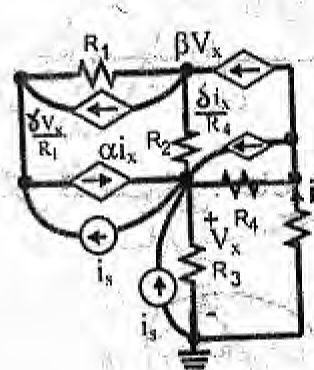
ب- معادلات مش این مدار را بنویسید و جریانهای مش ها رابه دست آورید.

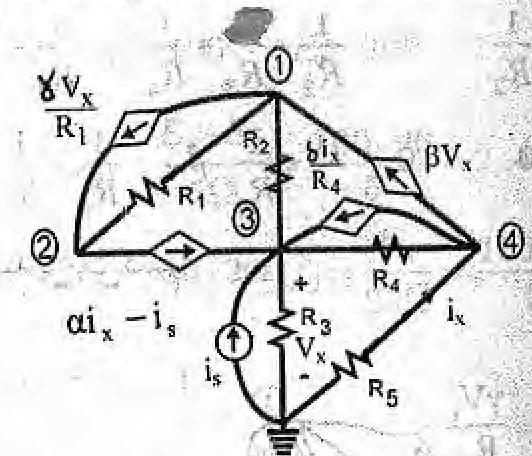


شکل (مسألهٔ ۱۰-۹)

حل:

منابع ولتاژ رابه جریان تبدیل کرده منبع i_s رانیز پخش می‌کنیم:





$$Y_n E = i_s \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta V_x-\frac{\gamma}{R_1}V_x \\ \frac{\gamma V_x}{R_1}-\alpha i_x+i_s \\ \alpha i_x-i_s+i_s+\frac{\delta i_x}{R_4} \\ -\beta V_x-\frac{\delta i_x}{R_4} \end{bmatrix}$$ الف-

$$V_x=E_3 \ , \ i_x=\frac{-E_4}{R_5} \ \Rightarrow \beta V_x-\frac{\gamma}{R_1}V_x=\beta E_3-\frac{\gamma}{R_1}E_3=(\beta-\frac{\gamma}{R_1})E_3$$

$$\frac{\gamma V_x}{R_1}-\alpha i_x+i_s=\frac{\gamma E_3}{R_1}-\alpha(\frac{-E_4}{R_5})+i_s=\frac{\gamma}{R_1}E_3+\frac{\alpha}{R_5}E_4+i_s$$

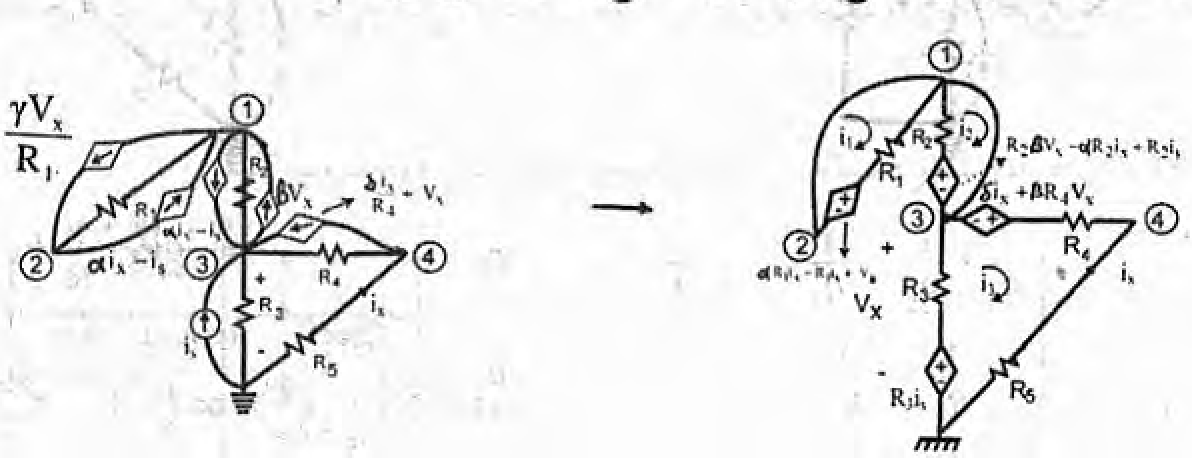
$$\alpha i_x-i_s+i_s+\frac{\delta i_x}{R_4}=\alpha(\frac{-E_4}{R_5})+\frac{\delta}{R_4}(\frac{-E_4}{R_5})=-(\frac{\alpha R_4+\delta}{R_4R_5})E_4$$

$$-\beta V_x-\frac{\delta i_x}{R_4}=-\beta E_3-\frac{\delta}{R_4}(-\frac{E_4}{R_5})=-\beta E_3+\frac{\delta}{R_4R_5}E_4$$

اگر مقادیر ساده شدهٔ ماتریس i_s را به سمت چپ تساوی $Y_nE=i_s$ منتقل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2}+\beta-\frac{\gamma}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & \frac{\gamma}{R_1} & \frac{\alpha}{R_5} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4}-\frac{\alpha R_4+\delta}{R_4R_5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4}-\beta & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{\delta}{R_4R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_s(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب- در شکل قسمت قبل، منابع جریان رابه منابع ولتاژ تبدیل می‌کنیم:



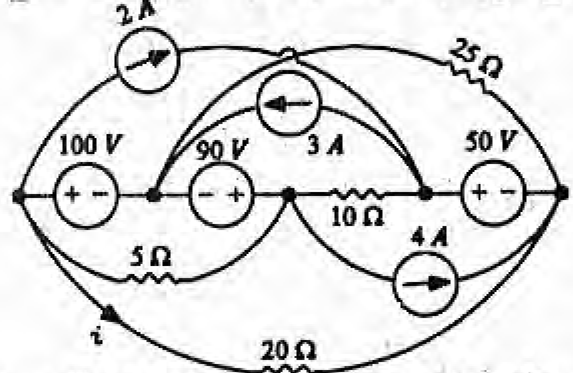
$$\rightarrow \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3+R_4+R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha R_1 i_x+R_1 i_s-\gamma V_x \\ R_2\beta V_x-\alpha R_2 i_x+R_2 i_s \\ R_3 i_s+\delta i_x+\beta R_4 V_x \end{bmatrix}$$

$$i_x=-i_3 \quad , \quad V_x=R_3i_s-R_3i_3 \quad \rightarrow \quad -\alpha R_1i_x+R_1i_s-\gamma V_x=\alpha R_1i_3+R_1i_s-\gamma R_3i_s+\gamma R_3i_3$$

$$\rightarrow \quad R_2\beta V_x-\alpha R_2i_x+R_2i_s=\beta R_2R_3i_s-\beta R_2R_3i_3+\alpha R_2i_3+R_2i_s$$

$$R_3i_s+\delta i_x+\beta R_4V_x=R_3i_s-\delta i_3+\beta R_4R_3i_s-\beta R_4R_3i_3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} R_1 & 0 & -\alpha R_1-\gamma R_3 \\ 0 & R_2 & \beta R_2R_3-\alpha R_2 \\ 0 & 0 & R_3+R_4+R_5+\delta+\beta R_4R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_1-\gamma R_3)i_s \\ (\beta R_2R_3+R_2)i_s \\ (R_3+\beta R_3R_4)i_s \end{bmatrix}$$

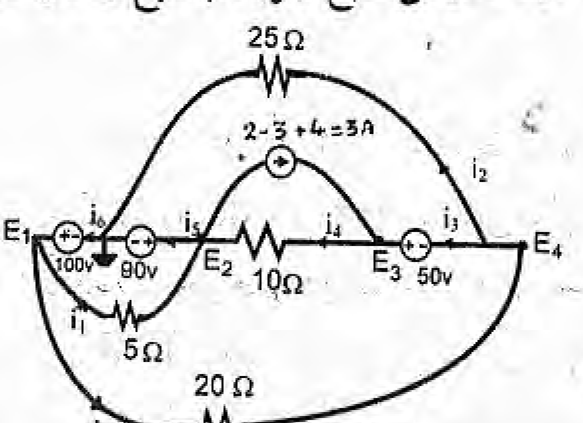


۱۰-الف- مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۰) را با ساده‌ترین روش تحلیل کنید و جریان i را به دست آورید.

ب- آیامی توانید دوگان این مدار را رسم کنید؟

حل:

منابع جریان راپخش کرده تا مدار ساده‌تر شود. دقت کنید که وقتی منبع جریان بامنبع ولتاژ موازی می‌شود، منبع جریان حذف می‌شود:



$$E_1=100V \quad E_2=90V$$

$$j_1=\frac{E_1-E_2}{5\Omega}=\frac{100-90}{5}=2\ A$$

$$E_4=E_1+20i=100+20i \ ، \ j_2=\frac{E_4}{25\Omega}=\frac{100+20i}{25}$$

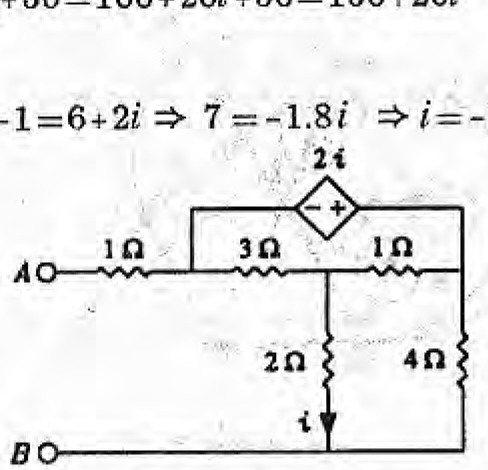
$$j_3=i-j_2=i-4-0.8i=0.2i-4 \qquad j_4=3+j_3=3+0.2i-4=0.2i-1$$

از طرف دیگر:

$$E_3=E_4+50=100+20i+50=150+20i \qquad j_4=\frac{E_3-E_2}{10\Omega}=\frac{150+20i-90}{10}=6+2i$$

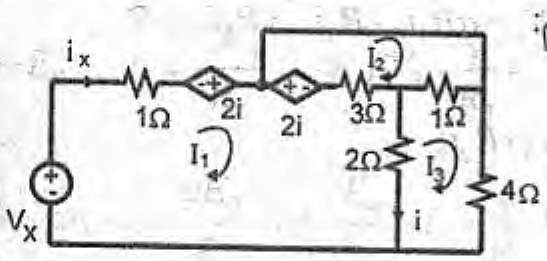
$$\Rightarrow 0.2i-1=6+2i \Rightarrow 7=-1.8i \Rightarrow i=-\frac{7}{1.8}=-\frac{70}{18}=\frac{-35}{9} \quad \Rightarrow i=-\frac{35}{9}\ A$$

۱۱- بابکار بردن روش تحلیل مش امپدانس دیده شدهٔ مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۱) رادر سرهای A و B تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۱)

حل: منبع وابسته را روی شاخه‌های 1Ω و 3Ω پخش می‌کنیم:



$$ZI=V_s$$

$$i=I_1-I_3 \quad , \quad i_x=I_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+3+2 & -3 & -2 \\ -3 & 1+3 & -1 \\ -2 & -1 & 1+2+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x+2i-2i \\ 2_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ 2I_1-2I_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

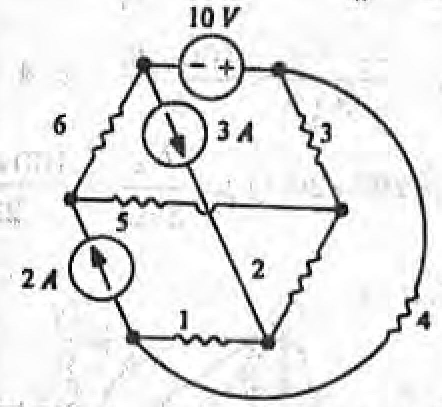
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3-2 & 4 & -1+2 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta=6(28+1)+3(-35+2)-2(5+8)=174-99-26=49$$

$$\Delta_1=\begin{bmatrix} V_x & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix}=V_x(28+1)=29V_x \qquad I_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{29V_x}{49}$$

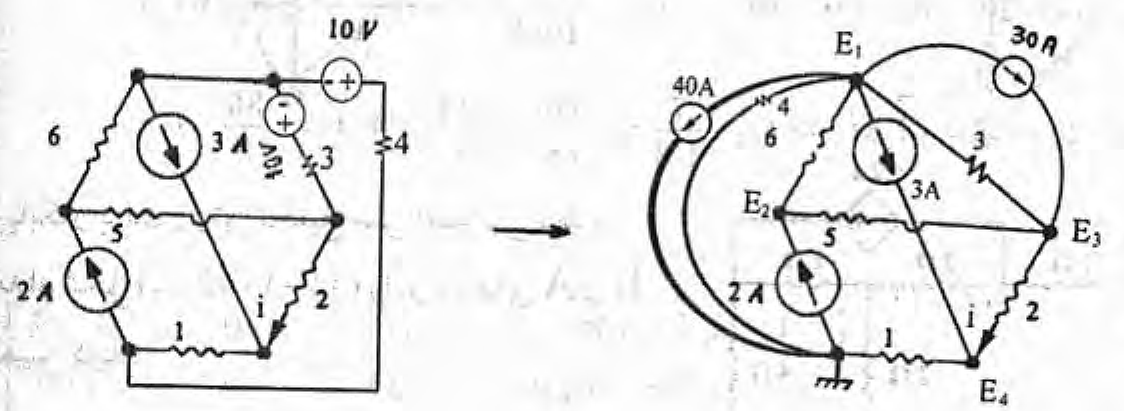
$$i_x=I_1=\frac{29V_x}{49} \Rightarrow Z_{in}=\frac{V_x}{i_x}=\frac{49}{29} \quad \Omega$$

۱۲ - در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۲) رسانایی‌ها بر حسب مهو داده شده‌اند. می‌خواهیم جریان گذرنده از رسانایی ۲ مهو رابه دست آوریم. معادلات گره رابا روش منظم یاروش نظری هر کدام که راحت تر باشد بنویسید و جریان مقاومت مورد نظر رابه دست آورید.



حل:

ابتدا منبع ولتاژ راروی مقاومتهای $\frac{1}{3}\Omega$ و $\frac{1}{4}\Omega$ پخش کرده سپس آنها راتبدیل به منبع جریان می‌کنیم:



$$Y_n E=I_s$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+6+3 & -6 & -3 & 0 \\ -6 & 6+5 & -5 & 0 \\ -3 & -5 & 3+5+2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40-30-3 \\ 2 \\ 30 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & -6 & -3 & 0 \\ -6 & 11 & -5 & 0 \\ -3 & -5 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -73 \\ 2 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$i=(E_3-E_4)(2)=2(E_3-E_4)$$

$$\Delta=0+0+2 \begin{vmatrix} 13 & -6 & 0 \\ -6 & 11 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 13 & -6 & -3 \\ -6 & 11 & -5 \\ -3 & -5 & 10 \end{vmatrix} =2(-214)+3(466)=970$$

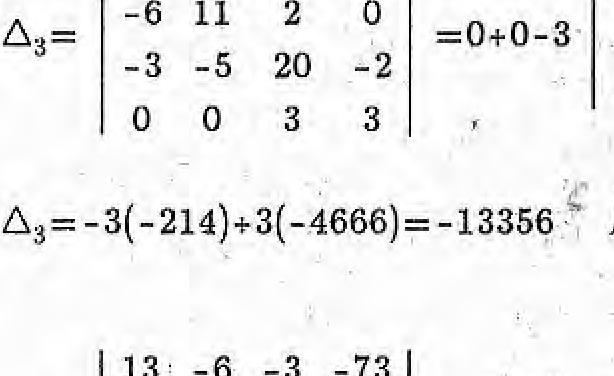
$$\Delta_3= \begin{vmatrix} 13 & -6 & -73 & 0 \\ -6 & 11 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} =0+0-3 \begin{vmatrix} 13 & -6 & 0 \\ -6 & 11 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 13 & -6 & -73 \\ -6 & 11 & 2 \\ -6 & -5 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=-3(-214)+3(-4666)=-13356 \qquad E_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-13356}{970}=-13.769\ V$$

$$\Delta_4= \begin{vmatrix} 13 & -6 & -3 & -73 \\ -6 & 11 & -5 & 2 \\ -3 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} =2 \begin{vmatrix} 13 & -6 & -73 \\ -6 & 11 & 2 \\ -3 & -5 & 20 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 13 & -6 & -3 \\ -6 & 11 & -5 \\ -3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4=2(-2293)+3(466)=-3188 \qquad E_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{-3188}{970}=-3.286\ V$$

$$\Rightarrow\ i=2(E_3-E_4)=2(-13.769+3.289)=-21A \ \Rightarrow\ i=-21\ A$$



شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۳)

۱۳- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۳) گره (۲) را گره مبنا اختیار کنید. می‌خواهیم معادلات گره را بر حسب متغیرهای e_4 و e_5 (ولتاژهای گره (۴) و (۵)) بنویسیم.

الف- بدون آنکه تبدیل منابع انجام دهید، این

معادلات رابه دست آورید.

ب - با انجام تبدیل منابع مناسب بار دیگر معادلات را به دست آورید.

پ - مساله را به طوری نظری هم حل کنید.

حل:

الف - گره (۲) رازمین فرض می‌کنیم بنابراین $E_2=0$ و باتوجه به شکل داریم:

$$E_1=E_5+V_a \quad (1) \qquad\qquad E_3=E_4+V_b \quad (2)$$

برای کات ست های {1,2,3,5,7} و {6,5,4,2,7} روابط kcl رامی‌نویسیم:

مجموع جریانهای وارد شونده به کات ست صفر است:

$$(0-E_1)G_1+(E_4-E_1)G_2+(0-E_5)G_3+(E_3-E_5)G_2+(E_4-E_5)G_7=0$$

باجایگذاری روابط (۱) و (۲) داریم:

$$(-E_5-V_a)G_1+(E_4-E_5-V_a)G_2-E_5G_3+(E_4+V_b-E_5)G_2+(E_4-E_5)G_7=0$$

$$\Rightarrow (G_2+G_5+G_7)E_4-(G_1+G_2+G_3+G_5+G_7)E_5=-G_5V_b+G_1V_a+G_2V_a \qquad (3)$$

$$(0-E_3)G_6+(E_5-E_3)G_5+(0-E_4)G_4+(E_1-E_4)G_2+(E_5-E_4)G_7=0$$

$$\Rightarrow (-E_4-V_b)G_6+(E_5-E_4-V_b)G_5-E_4G_5+(E_5+V_a-E_4)G_2+(E_5-E_4)G_7=0$$

$$\Rightarrow -(G_2+G_4+G_5+G_6+G_7)E_4+(G_2+G_5+G_7)E_5=-G_2V_a+G_5V_b+G_6V_b \qquad (4)$$

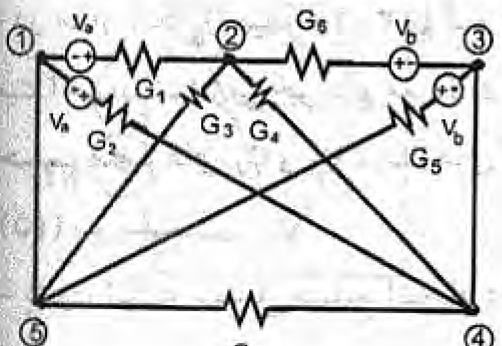
اگر روابط (3) و (4) رابصورت ماتریس مرتب کنیم خواهیم داشت :

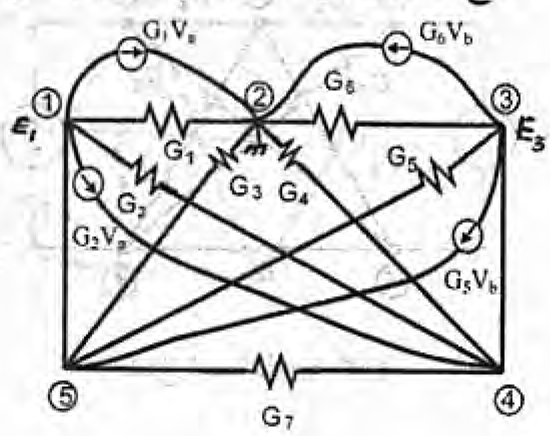
$$\begin{bmatrix} G_2+G_5+G_7 & -(G_1+G_2+G_3+G_5+G_7) \\ -(G_2+G_4+G_5+G_6+G_7) & G_2+G_5+G_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_5V_b+G_1V_a+G_2V_a \\ -G_2V_a+G_5V_b+G_6V_b \end{bmatrix}$$

و برای E_1 و E_2 و E_3 داریم:

$$E_1=E_5+V_a \;, \quad E_2=0 \;, \quad E_3=E_4+V_b$$

ب - منابع را روی گره‌های (1) و (3) پخش کرده سپس منابع ولتاژ رابه جریان تبدیل می‌کنیم:





$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ 0 & G_5+G_6 & 0 & -G_5 \\ -G_2 & 0 & G_2+G_4+G_7 & -G_7 \\ 0 & -G_5 & -G_7 & G_3+G_5+G_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1V_a-G_2V_a \\ -G_5V_b-G_6V_b \\ G_2V_a \\ G_5V_b \end{bmatrix}$$

باتوجه به شکل $E_1=E_5$ و $E_3=E_4$ می‌باشد. توجه کنید که اگر سطر E_1 و سطر E_5 رابسط داده باهم جمع کنیم و سطر E_3 و E_4 را هم بسط داده بایکدیگر جمع کنیم، به همان معادلات قسمت الف خواهیم رسید:

E_1 سطر: $(G_1+G_2)E_1-G_2E_4=-G_1V_a-G_2V_a \xRightarrow{E_1=E_5} (G_1+G_2)E_5-G_2E_4=-G_1V_a-G_2V_a$

E_5 سطر: $-G_5E_3-G_7E_4+(G_3+G_5+G_7)E_5=G_5V_b$

$E_3=E_4 \Rightarrow -(G_5+G_7)E_4+(G_3+G_5+G_7)E_5=G_5V_b$

E_5 سطر $+E_1$ سطر: $-(G_2+G_5+G_7)E_4+(G_1+G_2+G_3+G_5+G_7)E_5=G_5V_b-G_1V_a-G_2V_a$

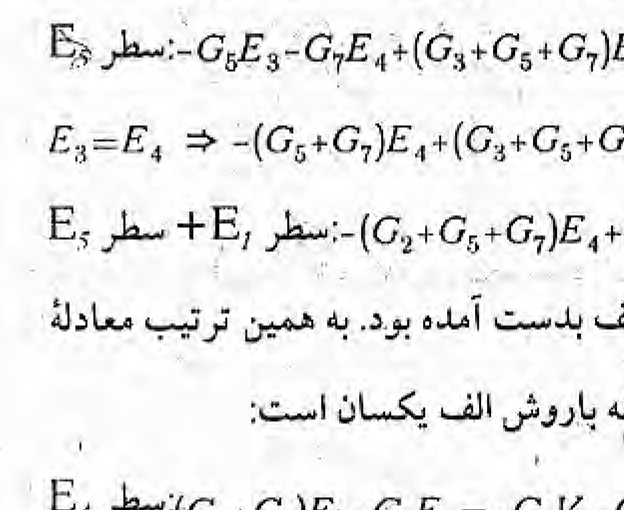
ملاحظه می‌شود که این همان معادلهٔ (3) است که با روش الف بدست آمده بود. به همین ترتیب معادلهٔ (4) نیز از جمع سطرهای E_3 و E_4 ماتریس بدست می‌آید که باروش الف یکسان است:

E_3 سطر: $(G_5+G_6)E_3-G_5E_5=-G_5V_b-G_6V_b \xRightarrow{E_3=E_4} (G_5+G_6)E_4-G_5E_5=-G_5V_b-G_6V_b$

E_4 سطر: $-G_2E_1+(G_2+G_4+G_7)E_4-G_7E_5=G_2V_a$

$E_1=E_5 \Rightarrow (G_2+G_4+G_7)E_4-(G_2+G_7)E_5=G_2V_a$

E_4+E_3 سطر $\Rightarrow (G_5+G_6+G_2+G_4+G_7)E_4-(G_5+G_2+G_7)E_5=-G_5V_b-G_6V_b+G_2V_a$



۱۴- مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۴) در حالت دایمی سینوسی است. معادلات گره راباهر روشی که مناسب می‌دانید و با کمترین تعداد متغیرها به صورت ماتریسی بنویسید.

حل:

متغیرهای ماعبارتند از E_1 تا E_7 و i_x و i_y و v_x و v_y یعنی باید 11 رابطه بنویسیم. چون متغیرهای i_y، i_x، v_x و v_y بر حسب بقیه هستند باید حذف شوند تا معادلات واقعی که شامل E_1 تا E_7 هستند بدست آیند. مدار رادر حالت دائم سینوسی در نظر گرفته روابط kvl و kcl رامی‌نویسیم.

$E_1=10\cos 2t \Rightarrow E_1=10\angle 0 \qquad i_x=\dfrac{E_1-E_2}{1\Omega}=E_1-E_2$

$i_y=\dfrac{E_5-E_4}{5\Omega}$ $\quad V_x=E_5-E_6$ $\quad V_y=E_4-E_7$

$E_2-E_5=\gamma V_y$ $\quad E_7=-\delta i_y$ $\quad kcl\ (3):\dfrac{0-E_3}{3}-\beta i_x+\dfrac{E2-E_3}{2}=0$

$kcl\ (4):\alpha V_x+i_y-\dfrac{V_y}{\frac{1}{2}j}=0$ (امپدانس خازن $1F$ در فرکانس $\omega=2$: $\frac{1}{2j}$)

برای کات ست در برگیرندهٔ گرههای 2 و 5و 6 داریم:

$$kcl\ :\ i_x+\frac{E_3-E_2}{2}-i_y+\frac{E_7-E_6}{4}+\beta i_x=0$$

برای کات ست در برگیرندهٔ گره‌های زمین، 1،4 و 7 داریم:

$$kcl\ :\ -i_x+i_y+\frac{E_6-E_7}{4}+\frac{E_3}{3}=0$$

اکنون مقادیر i_x ، i_y ، v_x و v_y رادر بقیهٔ معادلات جایگذاری می‌کنیم و سپس آنها راساده می‌کنیم:

$$E_7=-\delta i_y=-\frac{\delta}{5}(E_5-E_4) \qquad E_2-E_5=\gamma V_y=\gamma(E_4-E_7)$$

$$-\frac{E_3}{3}-\beta i_x+\frac{E_2-E_3}{2}=0 \Rightarrow \frac{-E_3}{3}-\beta(E_1-E_2)+\frac{E_2-E_3}{2}=0$$

$$i_x+\frac{E_3-E_2}{2}-i_y+\frac{E_4-E_6}{4}+\beta i_x=0 \Rightarrow E_1-E_2+\frac{E_3-E_2}{2}-\frac{E_5-E_4}{5}+\frac{E_4-E_6}{4}+\beta(E_1-E_2)=0$$

$$-i_x+i_y+\frac{E_6-E_7}{4}+\frac{E_3}{3}=0 \Rightarrow -(E_1-E_2)+\frac{E_5-E_4}{5}+\frac{E_6-E_7}{4}+\frac{E_3}{3}=0$$

$$\alpha V_x+i_y-2jV_y=0 \Rightarrow \alpha(E_5-E_6)+\frac{E_5-E_4}{5}-2j(E_4-E_7)=0$$

از معادلات بالا نتیجه می‌گیریم: $5E_7+\delta E_5-\delta E_4=0$ $\qquad E_2-E_5-\gamma E_4+\gamma E_7=0$

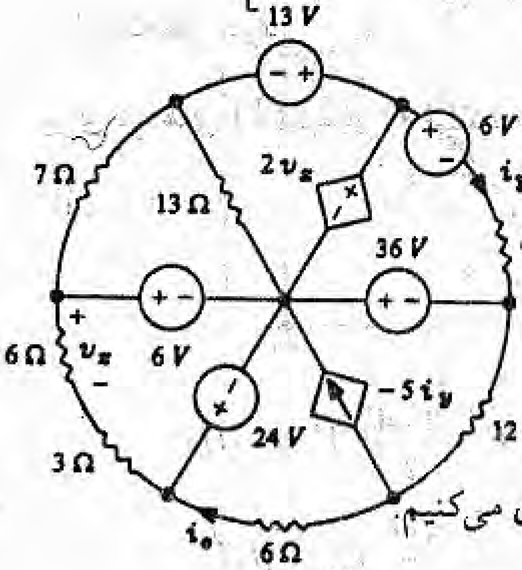
$$6\beta E_1-(3+6\beta)E_2+5E_3=0 \quad (20+20\beta)E_1-(30+20\beta)E_2+10E_3+4E_4-4E_5-5E_6+5E_7=0$$

$$-6E_1+60E_2+12E_5-12E_4+15E_6-15E_7+20E_3=0$$

$$(5\alpha+1)E_5-5E_6-(1+10j)E_4+10E_7=0 \qquad E_1=10\angle 0$$

اگر معادلات اخیر را بصورت ماتریس مرتب کنیم ، خواهیم داشت:

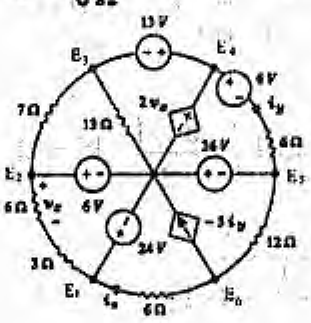
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & \delta & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -\gamma & -1 & 0 & \gamma \\ 6\beta & -(3+6\beta) & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20(1+\beta) & -(3+6\beta) & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -60 & 60 & 20 & -12 & 12 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+10j) & 5\alpha+1 & -5 & 10j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۱۵- معادلات گره رادر مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۵) باهر روشی که مناسب می‌دانید بنویسید.و جریان خروجی i_0 رابه دست آورید. این مدار راباسپایس نیز حل کنید و درستی جواب خود را تایید کنید.

حل:

گره مرکزی راگره زمین گرفته گرههای بعدی را به ترتیب شماره گذاری می‌کنیم.



ابتدا V_x، سپس i_y و در نهایت i_0 راحساب می‌کنیم:

$$V_x=\frac{6\Omega}{6^{\Omega}+3\Omega}(E_2-E_1)=\frac{6}{9}(6-24)=-12\Omega$$: تقسیم پتانسیل

$$E_4=2V_x=2(-12)=-24V$$

$$i_y=\frac{E_4-6V-E_5}{6\Omega}=\frac{-24-6-(-36)}{6}=1A \quad \Rightarrow -5i_y=-5(1)=-5A$$

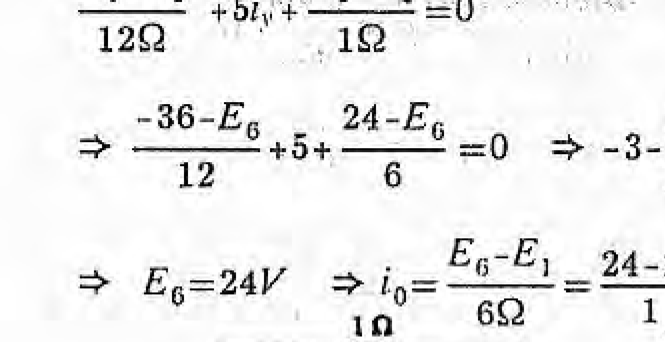
مجموع جریانهای وارد شونده به گره 6 صفراست:

$$\frac{E_5-E_6}{12\Omega}+5i_y+\frac{E_1-E_6}{1\Omega}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-36-E_6}{12}+5+\frac{24-E_6}{6}=0 \quad \Rightarrow -3-\frac{E_6}{12}+5+4-\frac{E_6}{6}=0 \quad \Rightarrow \frac{E_6}{4}=9-3=6$$

$$\Rightarrow E_6=24V \quad \Rightarrow i_0=\frac{E_6-E_1}{6\Omega}=\frac{24-24}{1}=0 \quad \Rightarrow i_0=0$$

۱۶-الف- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۶) تقویت کنندهٔ عملیاتی رابایک منبع وابسته عوض کنید و معادلات گره را در حال دایمی سینوسی $V_s(t)=2cos\omega t$ بنویسید.

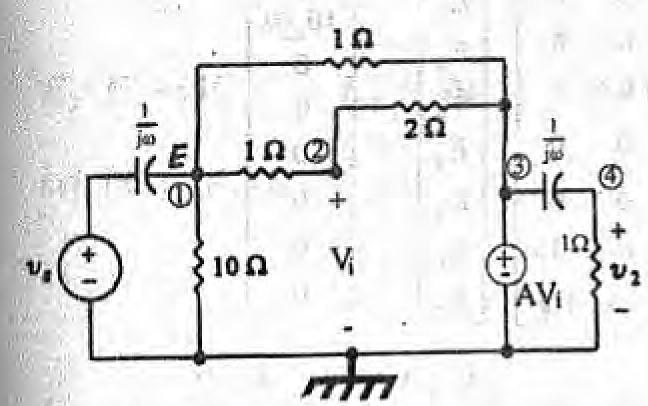


شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۶)

ب- تابع شبکهٔ ارتباط دهندهٔ خروجی v_2 به ورودی $v_s(t)$ راتعیین کنید.

حل:

الف-



متغیرها: $V_s\,, E\,, V_i\,,\ V_2$

باید V_i و E راحذف کنیم تارابطهٔ V_2 و V_s مشخص شود:

برای گره‌های (1),(2)و (4)،kcl می‌نویسیم:

الف-

$$(1)\ :\ \frac{V_s-E}{\frac{1}{j\omega}}+\frac{0-E}{10}+\frac{V_i-E}{1}+\frac{AV_i-E}{1}=0 \qquad (I)$$

$$(2)\ :\ \frac{E-V_i}{1}+\frac{AV_i-V_i}{2}=0 \ \Rightarrow 2E-2V_i+(A-1)V_i=0 \ \Rightarrow E=\frac{3-A}{2}\ V_i \qquad (II)$$

$$(4)\ :\ \frac{AV_i-V_2}{\frac{1}{j\omega}}+\frac{0-V_2}{1}=0 \ \Rightarrow (AV_i-V_2)j\omega-V_2=0 \ \Rightarrow V_2=\frac{Aj\omega}{1+j\omega}V_i \qquad (III)$$

ب-

$$(I),(II) \Rightarrow j\omega(V_s-\frac{3-A}{2}V_i)+\frac{A-3}{20}V_i+V_i-\frac{3-A}{2}V_i-\frac{3-A}{2}V_i+AV_i-\frac{3-A}{2}V_i=0$$

$$\Rightarrow j\omega V_s=V_i(\frac{3-A}{2}(j\omega+\frac{1}{10}+1+1)-A-1)=V_i(\frac{(3-A)(10j\omega+21)}{20}-A-1)$$

$$\Rightarrow j\omega V_s=(\frac{30j\omega+63-10Aj\omega-21A-20A-20}{20})V_i=(\frac{(30-10A)j\omega+43-41A}{20})V_i$$

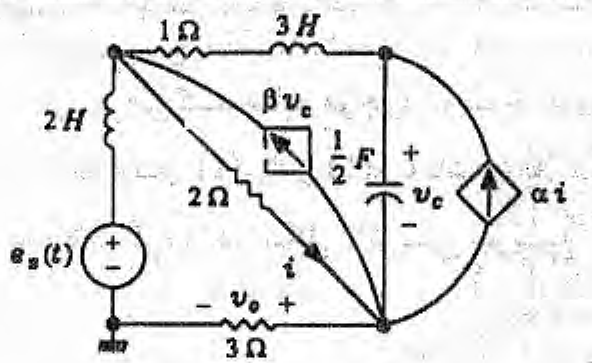
$$\Rightarrow V_s=\frac{(30-10A)j\omega+43-41A}{20j\omega}V_i \ \overset{(III)}{\Rightarrow} V_s=\frac{(30-10A)j\omega+43-41A}{20j\omega}\times\frac{1+j\omega}{Aj\omega}V_2$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{V_2}{V_s}=\frac{-20A\omega^2}{((30-10A)j\omega+43-41A)(1+j\omega)}$$

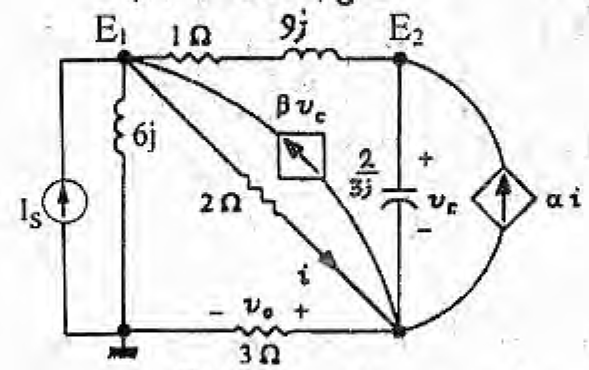
$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{20A\omega^2}{(1+j\omega)(41A-43+(10A-30)j\omega)}$$

۱۷- معادلات گره را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۷) درحالت دایمی سینوسی بنویسید و سعی کنید کمترین تعداد متغیرها را به کار ببرید.

$e_s(t)=2\ \sin(3t+60°)$



شکل (مسألهٔ ۱۰-۱۷)



حل :

$$Z_{L_1}=jL\omega=j\times2\times3=6j=6\angle 90$$

$$Z_c=\frac{1}{jc\omega}=\frac{1}{j\times0.5\times3}=\frac{2}{3j}$$

$$Z_{L_2}=j\times3\times3=9j$$

$$E_s=2\angle 60^\circ\Rightarrow I_s=\frac{E_s}{Z_{L1}}=\frac{2\angle 60^\circ}{6\angle 90}=\frac{1}{3}\angle$$

$$Y_nE=I_s\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\frac{1}{6j}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1+9j} & -\frac{1}{1+9j} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{1+9j} & \frac{1}{1+9j}+\frac{3j}{2} & -\frac{3j}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3j}{2} & \frac{1}{2}+\frac{3j}{2}+\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s+\beta V_c\\ \alpha i\\ -\beta V_c-\alpha i\end{bmatrix}$$

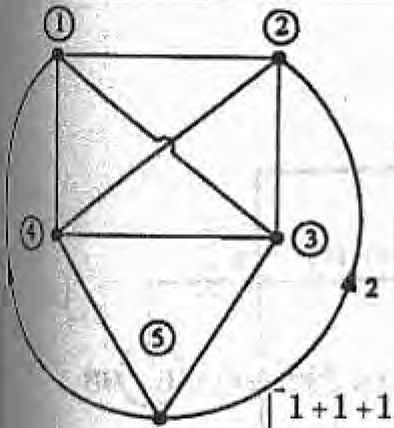
$$V_c=E_2-E_3\qquad i=\frac{E_1-E_3}{2}\qquad\Rightarrow\ I_s+\beta V_c=I_s+\beta(E_2-E_3)\qquad \alpha i=\frac{\alpha}{2}(E_1-E_3)$$

$$\Rightarrow\ -\beta V_c-\alpha i=-\beta(E_2-E_3)-\frac{\alpha}{2}(E_1-E_3)=-\frac{\alpha}{2}E_1-\beta E_2+(\beta+\frac{\alpha}{2})E_3$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}\frac{1}{6j}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1+9j} & -\frac{1}{1+9j}-\beta & -\frac{1}{2}+\beta\\ -\frac{1}{1+9j}-\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{1+9j}+\frac{3j}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3j}{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3j}{2}+\beta & \frac{1}{2}+\frac{3j}{2}+\frac{1}{3}-(\beta+\frac{\alpha}{2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\angle -30^\circ\\0\\0\end{bmatrix}$$

۱۸- گراف شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۸) نشان دهندهٔ یک مدار مقاومتی است که تمام شاخه‌های آن برابر یک اهم است و شاخه‌های ۱ و ۲ از منابع جریان $i_{s1}(t)$ و $i_{s2}(t)$ تشکیل می‌شوند.

الف- معادلات گره رابه طور نظری بنویسید (گره (۵) رابه عنوان گره مبنا انتخاب کنید معادلات را حل



نکنید).

ب - اکنون فرض کنید منابع موجود در شاخه‌های ۱ و ۲ منابع ولتاژ $e_{s1}(t)$ و $e_{s2}(t)$ باشند. بار دیگر معادلات گره را در شکل ماتریسی بنویسید.

حل :

الف -

$$Y_n E = I_s \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1+1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1+1+1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1+1+1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +11+1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب -

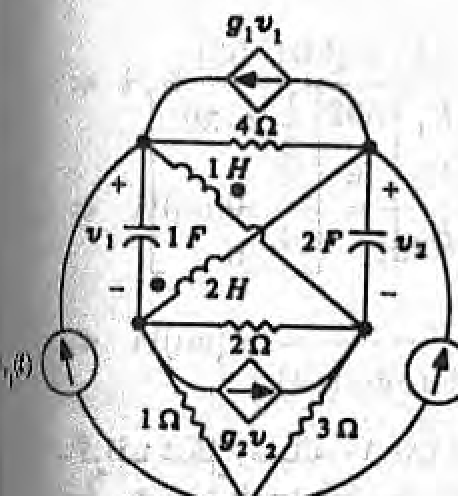
$E_1 = e_{s1} \qquad E_2 = e_{s2}$

$$kcl\ (4):\ \frac{E_1 - E_4}{1} + \frac{E_2 - E_4}{1} + \frac{E_3 - E_4}{1} + \frac{0 - E_4}{1} = 0 \quad \Rightarrow E_1 + E_2 + E_3 - 4E_4 = 0$$

$$kcl\ (3):\ \frac{E_2 - E_3}{1} + \frac{E_1 - E_3}{1} + \frac{E_4 - E_3}{1} + \frac{0 - E_3}{1} = 0 \quad \Rightarrow E_1 + E_2 - 4E_3 + E_4 = 0$$

اگر این معادلات را بصورت ماتریس مرتب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۱۹ - مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۱۹) در حالت دایمی سینوسی است و منابع جریان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$i_{s1}(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \phi_1)$

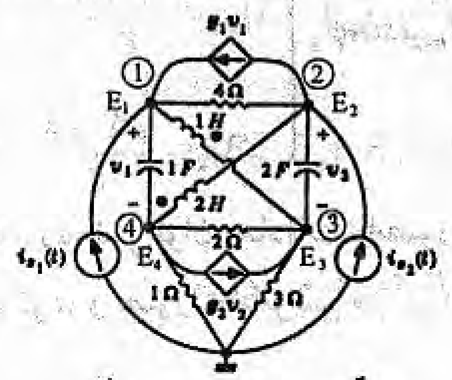
$i_{s2}(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \phi_2)$

الف - معادلات گره را به صورت نظری در شکل ماتریس بنویسید.

ب - اکنون فرض کنید میان سلفها تزویج متقابل $(M) = 1$ وجود داشته باشد. بار دیگر معادلات گره را به صورت نظری و در شکل ماتریس بنویسید.

حل :

الف- در این حالت فرض می‌کنیم که تزویج مغناطیسی وجود ندارد. گره‌ها رانامگذاری می‌کنیم:



$$Y_n E = I_s \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{j\omega}+j\omega & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{j\omega} & -j\omega \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2j\omega}+2j\omega & -2j\omega & -\frac{1}{2j\omega} \\ -\frac{1}{j\omega} & -2j\omega & 2j\omega+\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -j\omega & -\frac{1}{2j\omega} & -\frac{1}{2} & j\omega+\frac{1}{2j\omega}+\frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{s1}+g_1V_1 \\ I_{s2}-g_1V_1 \\ g_2V_2 \\ -g_2V_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1=E_1-E_4 \quad , \quad V_2=E_2-E_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{s1}+g_1V_1 \\ I_{s2}-g_1V_1 \\ g_2V_2 \\ -g_2V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s1}+g_1(E_1-E_4) \\ I_{s2}-g_1(E_1-E_4) \\ g_2(E_2-E_3) \\ -g_2(E_2-E_3) \end{bmatrix}$$

ب-

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{j\omega}+j\omega-g_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{j\omega} & -j\omega+g_1 \\ -\frac{1}{4}+g_1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{2j\omega}+2j\omega & -2j\omega & -\frac{1}{2j\omega}-g_1 \\ -\frac{1}{j\omega} & -2j\omega-g_2 & 2j\omega+\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+g_2 & -\frac{1}{2} \\ -j\omega & -\frac{1}{2j\omega}+g_2 & -\frac{1}{2}-g_2 & j\omega+\frac{1}{2j\omega}+\frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{m1}cos\phi_1+I_{m1}jsin\phi_1 \\ I_{m2}cos\phi_2+I_{m2}jsin\phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب- وقتی تزویج مغناطیسی وجود دارد، نمی‌توان معادلات رابصورت سریع نوشت، بلکه باید برای تک گره‌ها kcl نوشته سپس آنها رامرتب کرده و بصورت ماتریس در آورد:

$$L=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma=\frac{1}{L_1L_2-M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V=j\omega LI \Rightarrow I=\frac{1}{j\omega}\,\Gamma V \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}=\frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_3-E_1 \\ E_4-E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_{L1}=\frac{(2E_3-2E_1-E_4+E_2)}{j\omega} \quad , \quad i_{L2}=\frac{(-E_3+E_1+E_4-E_2)}{j\omega} \quad , \quad V_1=E_1-E_4\,,\,V_2=E_2-E_3$$

$$kcl\ (1):\ I_{s1}+g_1V_1+\frac{E_2-E_1}{4}+i_{L1}+(E_4-E_1)j\omega=0$$

$$kcl\ (2):\ I_{s2}-g_1V_1+\frac{E_1-E_2}{4}+i_{L2}+(E_3-E_2)\,2j\omega=0$$

$$kcl\ (3):\ (E_2-E_3)\,2j\omega-i_{L1}+\frac{E_4-E_3}{2}+g_2V_2+\frac{0-E_3}{3}=0$$

$$kcl\ (4):\ (E_1-E_4)j\omega-i_{L2}+\frac{E_3-E_4}{2}-g_2V_2+\frac{0-E_4}{1}=0$$

در معادلات اخیر، مقادیر i_{L1} و i_{L2} و V_1 و V_2 را از بالا قرار می‌دهیم تا معادلات جدید فقط شامل E_1 تا E_4 و I_{s1} و I_{s2} باشند:

$$I_{s1}+g_1(E_1-E_4)+\frac{E_2-E_1}{4}+\frac{(2E_3-2E_1-E_4+E_2)}{j\omega}+(E_4-E_1)j\omega=0$$

$$I_{s2}-g_1(E_1-E_4)+\frac{E_1-E_2}{4}+\frac{(-E_3+E_1+E_4-E_2)}{j\omega}+(E_3-E_2)2j\omega=0$$

$$(E_2-E_3)2j\omega-\frac{(2E_3-2E_1-E_4+E_2)}{j\omega}+\frac{E_4-E_3}{2}+g_2(E_2-E_3)-\frac{E_3}{3}=0$$

$$(E_1-E_4)j\omega-\frac{(-E_3+E_1+E_4-E_2)}{j\omega}+\frac{E_3-E_4}{2}-g_2(E_2-E_3)-E_4=0$$

این معادلات را مرتب کرده بصورت ماتریس درمی‌آوریم:

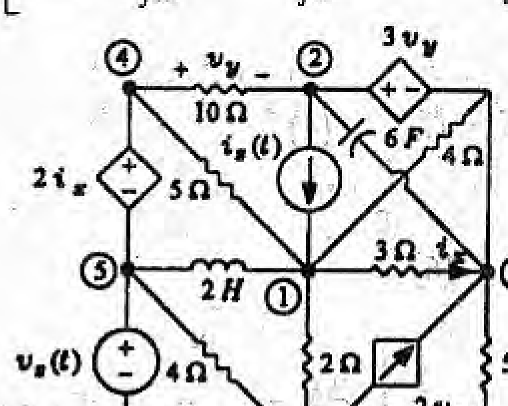
$$(-g_1+\frac{1}{4}+\frac{2}{j\omega}+j\omega)E_1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{j\omega})E_2-\frac{2E_3}{j\omega}+(g_1+\frac{1}{j\omega}-j\omega)E_4=I_{s1}=I_{m1}cos\phi_1+I_{m1}sin\phi_1$$

$$(g_1-\frac{1}{4}--\frac{1}{j\omega})E_1+(\frac{1}{4}+\frac{1}{j\omega}+2j\omega)E_2+(\frac{1}{j\omega}-2j\omega)E_3-(g_1+\frac{1}{j\omega})E_4=I_{s2}=I_{m2}cos\phi_2+I_{m2}jsin\phi_2$$

$$-\frac{2}{j\omega}E_1-(2j\omega-\frac{1}{j\omega}+g_2)E_2+(2j\omega+\frac{2}{j\omega}+\frac{1}{2}+g_2+\frac{1}{3})E_3-(\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2})E_4=0$$

$$(-j\omega+\frac{1}{j\omega})E_1+(-\frac{1}{j\omega}+g_2)E_2+(-\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2}-g_2)E_3+(j\omega+\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}+1)E_4=0$$

$$\begin{bmatrix} -g_1+\frac{1}{4}+\frac{2}{j\omega}+j\omega & -\frac{1}{4}-\frac{1}{j\omega} & -\frac{2}{j\omega} & g_1+\frac{1}{j\omega}-j\omega \\ g_1-\frac{1}{4}-\frac{1}{j\omega} & \frac{1}{4}+\frac{1}{j\omega}+2j\omega & \frac{1}{j\omega}-2j\omega & -g_1-\frac{1}{j\omega} \\ -\frac{2}{j\omega} & -2j\omega+\frac{1}{j\omega}-g_2 & 2j\omega+\frac{2}{j\omega}+\frac{1}{2}+g_2+\frac{1}{3} & -\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2} \\ -j\omega+\frac{1}{j\omega} & -\frac{1}{j\omega}+g_2 & -\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2}-g_2 & j\omega+\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m1}cos\phi_1+I_{m1}jsin\phi_1 \\ I_{m2}cos\phi_2+I_{m2}jsin\phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۲۰- مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۰) در حالت دایمی سینوسی است و $i_s(t)=5cos(2t+30°)$ و $v_s(t)=2sin(2t-15°)$، معادلات گره را باهر روشی که مناسب می‌دانید و باکمترین تعداد متغیرها به صورت ماتریسی بنویسید.

حل:

متغیرهای مساله: I_x و V_y و E_1 تا E_5 بوده I_s و V_s معلوم می‌باشند. $\omega=2$

باید 7 معادله بدست آورده با حذف I_x و V_y، 5 معادلهٔ باقیمانده رابصورت ماتریسی بنویسیم.

روابط kvl:

$$E_5=V_s \qquad E_4=E_5+2I_x=V_s+2I_x \qquad E_2=E_3+3V_y$$

$$V_y = E_4 - E_2 \qquad I_x = \frac{E_1 - E_3}{3}$$

$$V_s = 2\angle -15^\circ = 2\cos 15^\circ - j2\sin 15^\circ = 1.932 - 0.518j$$

$$I_s = 5\angle 30^\circ = 5\cos 30^\circ + j5\sin 30^\circ = 4.33 + 2.5j$$

روابط kcl:

$$kcl\ (1): \frac{E_5 - E_1}{j(2)(2)} + \frac{E_4 - E_1}{5} + I_s + \frac{E_3 - E_1}{4} + \frac{E_3 - E_1}{3} + \frac{0 - E_1}{2} = 0$$

کات ست شامل منبع وابستهٔ $3V_y$ رادرنظر بگیرید، برای این کات ست kcl بصورت زیر است:

$$kcl\ (2): \frac{E_4 - E_2}{10} - I_s + \frac{E_1 - E_3}{4} + \frac{E_1 - E_3}{3} + 2V_y + \frac{0 - E_3}{5} - I_c + I_c = 0$$

حال مقادیر I_x و V_y رادر معادلات گذاشته آنها را مرتب می‌کنیم:

$$E_5 = V_s \qquad (1)$$

$$E_4 = E_5 + 2I_x = V_s + 2E_4 - 2E_2 \Rightarrow 2E_2 - E_4 = V_s \qquad (2)$$

$$\frac{E_5 - E_1}{4j} + \frac{E_4 - E_1}{5} + I_s + \frac{E_3 - E_1}{4} + \frac{E_3 - E_1}{3} - \frac{E_1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4j} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)E_1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)E_3 - \frac{E_4}{5} - \frac{E_5}{4j} = I_s \qquad (3)$$

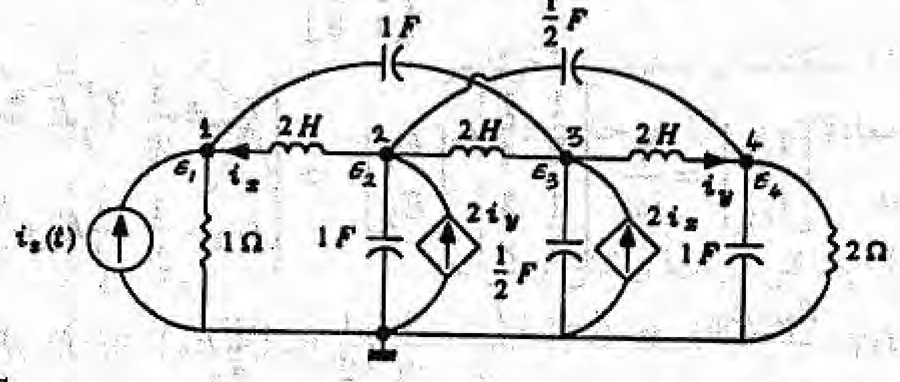
$$\frac{E_4 - E_2}{10} - I_s + \frac{E_1 - E_3}{4} + \frac{E_1 - E_3}{3} + 2(E_4 - E_2) - \frac{E_3}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)E_1 - \left(\frac{1}{10} + 2\right)E_2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)E_3 + \left(\frac{1}{10} + 2\right)E_4 = I_s \qquad (4)$$

$$E_2 = E_3 + 3V_y = E_3 + 3E_4 - 3E_2 \Rightarrow 4E_2 - E_3 - 3E_4 = 0 \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4j} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} & 0 & -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) & -\frac{1}{5} & \frac{1}{4}j \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{3} & -\left(\frac{1}{10} + 2\right) & -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) & \left(\frac{1}{10} + 2\right) & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ V_s \\ I_s \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.932 - 0.518j \\ 1.932 - 0.518j \\ 4.33 + 2.5j \\ 4.33 + 2.5j \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۱- در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۱) فرض کنید $i_s(t)=2sin(t-30°)$ و مدار در حالت دایمی سینوسی باشد. معادلات گره را با روش میان بر بنویسید. (معادلات را حل نکنید.)



حل:

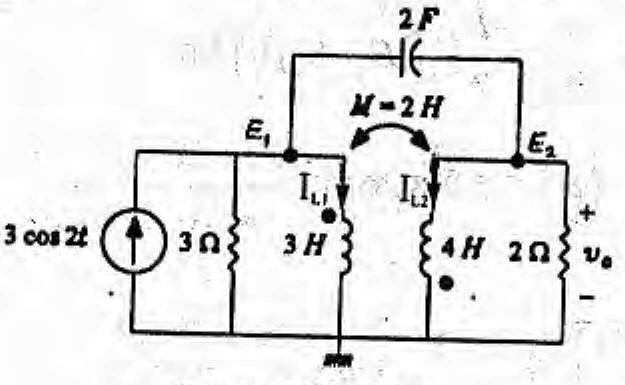
$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2j}+j & -\frac{1}{2j} & -j & 0 \\ -\frac{1}{2j} & \frac{1}{2j}+j+\frac{1}{2j}+\frac{1}{2}j & -\frac{1}{2j} & -\frac{1}{2}j \\ -j & -\frac{1}{2j} & j+\frac{1}{2j}+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \\ 0 & -\frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} & \frac{1}{2}j+\frac{1}{2j}+j+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 2I_y \\ 2I_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$I_s=2\angle -30°=2\cos 30°-2j\sin 30°=1-j\sqrt{3}$

$$I_y=\frac{(E_3-E_4)}{2j} \quad , \; I_x=\frac{E_2-E_1}{2j} \quad \Rightarrow 2I_y=-jE_3+jE_4 \quad , \quad 2I_x=-jE_2+jE_1$$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2j}+j & -\frac{1}{2j} & -j & 0 \\ -\frac{1}{2j} & \frac{1}{2j}+j+\frac{1}{2j}+\frac{1}{2}j & -\frac{1}{2j}+j & -\frac{1}{2}j-4 \\ -j-j & -\frac{1}{2j}+j & j+\frac{1}{2j}+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \\ 0 & -\frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} & \frac{1}{2}j+\frac{1}{2j}+j+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3}j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۲- می‌خواهیم ولتاژ خروجی v_o مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۲) را با استفاده از تجزیه و تحلیل گره به دست آوریم. معادلات لازم را بنویسید ولی آنها را حل نکنید. (فرض کنید مدار در حالت دایمی سینوسی باشد.)



شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۲)

حل:

$$L=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{3\times4-2\times2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \qquad I=\frac{1}{j\omega}\ \Gamma V \qquad \omega=2$$

$$\begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix}=\frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I_{L1}=\frac{1}{2j}\ (\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{4}\ E_2) \\ I_{L2}=\frac{1}{2j}\ (\frac{1}{4}E_1+\frac{3}{8}\ E_2) \end{cases}$$

$$kcl\ \ (1): I_s+\frac{0-E_1}{3}\ -I_{L1}+\frac{E_2-E_1}{\frac{1}{4j}}\ =0 \Rightarrow I_s-\ \frac{E_1}{3}-\frac{1}{2j}\ (\frac{1}{2}\ E_1+\frac{1}{4}E_2)+4j\ (E_2-E_1)=0 \quad (1)$$

$$kcl\ \ (2): \frac{0-E_2}{2}\ -I_{L2}+\frac{E_1-E_2}{\frac{1}{4j}}\ =0 \Rightarrow \frac{-E_2}{2}\ -\frac{1}{2j}\ (\frac{1}{4}E_1+\frac{3}{8}E_2)+4j\ (E_1-E_2)=0 \quad (2)$$

معادلات را مرتب می‌کنیم:

$$(1)\ \Rightarrow (\frac{1}{3}+\frac{1}{4j}+4j)E_1+(\frac{1}{8j}\ -4j)\ E_2=I_s$$

$$(2)\ \Rightarrow (\frac{1}{8j}-4j)E_1+(\frac{1}{2}+\frac{3}{16j}\ +4j)E_2=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{4j}+4j & \frac{1}{8j}-4j \\ \frac{1}{8j}-4j & \frac{1}{2}+\frac{3}{16j}+4j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۳- سلف های تزویج شدهٔ مسالهٔ ۲۲ راباترانسفورماتور با نسبت $\frac{n_1}{n_2}$ جایگزین می‌کنیم. بار دیگر معادلات گره را درحالت دایمی سینوسی بنویسید ولی آنها راحل نکنید.

حل :

$$\frac{E_1}{E_2}=-\frac{n_1}{n_2}\ \ \Rightarrow E_1+\frac{n_1}{n_2}E_2=0 \qquad (1)$$

روابط kcl:

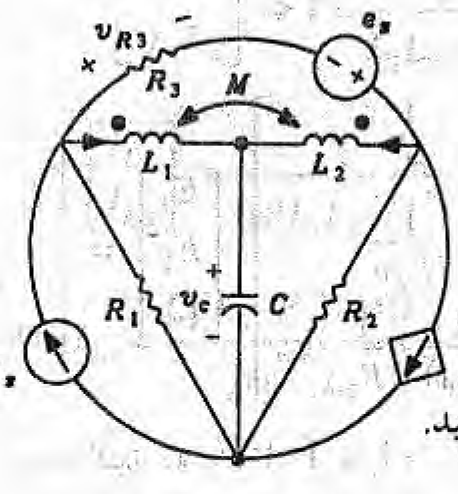
$$I_s+\frac{0-E_1}{3}+(E_2-E_1)4j=I_{L1} \qquad \frac{0-E_2}{2}+(E_1-E_2)4j=I_{L2}$$

$$\frac{I_{L1}}{I_{L2}}=\frac{n_2}{n_1}\ \Rightarrow I_{L1}-\frac{n_2}{n_1}I_{L1}=0\ \Rightarrow I_s-\frac{E_1}{3}+(E_2-E_1)4j-\frac{n_2}{n_1}\ (\frac{-E_2}{2}\ +(E_1-E_2)4j)=0$$

$$\Rightarrow\ (\frac{1}{3}+4j+\frac{n_2}{n_1}\ 4j)E_1-(4j+\frac{n_2}{n_1}+\frac{n_2}{2n_1}\ 4j)E_2=I_s \qquad (2) \qquad I_s=3\angle 0$$

$$(1),(2)\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{1}{3}+4j+4\frac{n_2}{n_1}j & -(4j+\frac{n_2}{2n_1}+\frac{4n_2}{n_1}j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix}$$

۲۴ - در مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۴) در بندهای الف و ب $M=0$ است. و در بندهای پ و ت $M\neq 0$ می‌باشد.



شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۴)

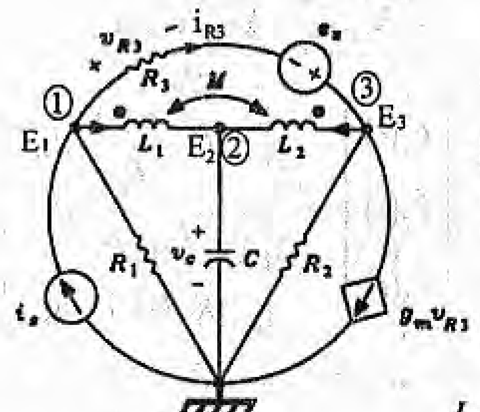
الف - اگر $e_s(t)$ و $i_s(t)$ سیگنالهای سینوسی با فرکانس یکسان باشند، معادلات گره را در حالت دایمی سینوسی بنویسید.

ب - برای $e_s(t)$ و $i_s(t)$ باشکل موجها ی کلی و شرایط اولیهٔ $i_{L1}(0)=I_{01}$ و $i_{L2}(0)=I_{02}$، $v_c(0)=V_0$، معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را بنویسید. شرایط اولیه را مشخص کنید.

پ - بادر نظر گرفتن تزویج $M\neq 0$ بار دیگر بند الف راحل کنید.

ت - بادر نظر گرفتن تزویج $M\neq 0$ بار دیگر بند ب راحل کنید.

حل :



وقتی $M=0$ می‌باشد، باسلفهای معمولی و بدون تزویج روبرو هستیم:

الف -

$$I_{R3}=\frac{V_{R3}}{R_3} \qquad V_{R3}=E_1-E_3+E_s$$

$$kcl\ \ (1): I_s+\frac{0-E_1}{R_1}+\frac{E_2-E_1}{jL_1\omega}-I_{R3}=0$$

$$kcl\ \ (2): \frac{E_1-E_2}{jL_1\omega}+\frac{E_3-E_2}{jL_2\omega}+\frac{0-E_2}{\frac{1}{jc\omega}}=0 \qquad kcl\ \ (3): I_{R3}+\frac{E_2-E_3}{jL_2\omega}+\frac{0-E_3}{R_2}-g_m V_{R3}=0$$

متغیرهای I_{R3} و V_{R3} را در سه رابطهٔ اخیر حذف کرده آنها رامرتب و به شکل ماتریس در می‌آوریم:

$$I_s-\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2-E_1}{jL_1\omega}-\frac{E_1-E_3+E_s}{R_3}=0 \Rightarrow -(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{jL_1\omega}+\frac{1}{R_3})E_1+(\frac{1}{jL_1\omega})E_2+\frac{E_3}{R_3}=\frac{E_s}{R_3}-I_s \quad (1)$$

$$\frac{E_1-E_2}{jL_1\omega}+\frac{E_3-E_2}{jL_2\omega}-jc\omega E_2=0 \Rightarrow (\frac{1}{jL_1\omega})E_1-(\frac{1}{jL_1\omega}+\frac{1}{jL_2\omega}+jc\omega)E_2+\frac{1}{jL_2\omega}E_3=0$$

$$I_{R3}+\frac{E_2-E_3}{jL_2\omega}-\frac{E_3}{R_2}-g_m V_{R_3}=0 \Rightarrow \frac{E_1-E_3+E_s}{R_3}+\frac{E_2-E_3}{jL_2\omega}-\frac{E_3}{R_2}-g_m(E_1-E_3+E_s)=0$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{R_3}-g_m)E_1+(\frac{1}{jL_2\omega})E_2-(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{jL_2\omega}+\frac{1}{R_2}-g_m)E_3=g_mE_s \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{jL_1\omega}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{jL_1\omega} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{jL_1\omega} & \frac{1}{jL_1\omega}+\frac{1}{jL_2\omega}+jC\omega & -\frac{1}{jL_2\omega} \\ g_m-\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{jL_2\omega} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{jL_2\omega}+\frac{1}{R_2}-g_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s-\frac{E_s}{R_3} \\ 0 \\ -g_mE_s \end{bmatrix}$$

توجه کنید که E_1 تا E_3 و I_s و E_s مقادیر فازوری در فرکانس ω هستند.

ب- در ماتریس قبل، بجای $E_l(j\omega)$، $e_l(t)$ و بجای $j\omega$، D قرار می‌دهیم:

$$D=\frac{d}{dt}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\Gamma_1D^{-1}+\frac{1}{R_3} & -\Gamma_1D^{-1} & -\frac{1}{R_3} \\ -\Gamma_1D^{-1} & \Gamma_1D^{-1}+\Gamma_2D^{-1}+CD & -\Gamma_2D^{-1} \\ g_m-\frac{1}{R_3} & -\Gamma_2D^{-1} & \frac{1}{R_3}+\Gamma_2D^{-1}+\frac{1}{R_2}-g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t)-\frac{e_s(t)}{R_3}-I_{01} \\ I_{01}+I_{02} \\ -g_me_s(t)-I_{02} \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه:

$$e_2(0)=V_c(0) \quad \Rightarrow e_2(0)=V_0$$

$$kcl\ (3):\ i_{R3}(0)=i_{L2}(0)+\frac{e_3(0)}{R_2}+g_mV_{R3}(0)=I_{02}+\frac{e_3(0)}{R_2}+g_mR_3i_{R3}(0)$$

$$\Rightarrow i_{R3}(0)=\frac{I_{02}+\frac{e_3(0)}{R_2}}{1-g_mR_3}$$

$$kcl\ (1):\ i_s(0)=\frac{e_1(0)}{R_1}+i_{L1}(0)+i_{R3}(0)=\frac{e_1(0)}{R_1}+I_{01}+\frac{I_{02}+\frac{e_3(0)}{R_2}}{1-g_mR_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1}e_1(0)+\frac{1}{R_2(1-g_mR_3)}e_3(0)=i_s(0)-I_{01}-\frac{I_{02}}{1-g_mR_3} \qquad (1)$$

$$kvl:\ -e_1(0)+V_{R3}(0)-e_s(0)+e_3(0)=0 \ \Rightarrow -e_1(0)+R_3\frac{I_{02}+\frac{e_3(0)}{R_2}}{1-g_mR_3}-e_s(0)+e_3(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad -e_1(0)+(\frac{R_3}{R_2(1-g_mR_3)}+1)e_3(0)=e_s(0)-\frac{R_3I_{02}}{1-g_mR_3} \qquad (2)$$

از حل دو معادلهٔ (1) و (2)، مقادیر $e_1(0)$ و $e_3(0)$ بدست می‌آیند.

ب-
$$L=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma=\frac{1}{L_1L_2-M^2}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \qquad I_L=\frac{1}{j\omega}\Gamma V_L$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix}=\frac{1}{j\omega(L_1L_2-M^2)}\begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1-E_2 \\ E_3-E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_{L1}=\frac{L_2(E_1-E_2)-M(E_3-E_2)}{j\omega(L_1L_2-M^2)} \qquad ,I_{L2}=\frac{-M(E_1-E_2)+L_1(E_3-E_2)}{j\omega(L_1L_2-M^2)}$$

$$kcl\ (1): I_{R3}+I_{L1}+\frac{E_1}{R_1}=I_s \qquad I_{R3}=\frac{V_{R3}}{R_3}=\frac{E_1-E_3+E_s}{R_3}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1-E_3+E_s}{R_3}+\frac{L_2(E_1-E_2)-M(E_3-E_2)}{j\omega(L_1L_2-M)}+\frac{E_1}{R_1}=I_s$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{R_3}+\frac{L_2}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+\frac{1}{R_1}\right)E_1+\left(\frac{-L_2+M}{j\omega(L_1L_2-M^2)}\right)E_2-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{M}{j\omega(L_1L_2-M^2)}\right)E_3=I_s-\frac{E_s}{R_3} \quad (1)$$

$$kcl\ (2): I_{L1}+I_{L2}-E_2jc\omega=0 \Rightarrow \frac{L_2(E_1-E_2)-M(E_3-E_2)-M(E_1-E_2)+L_1(E_3-E_2)}{j\omega(L_1L_2-M^2)}-E_2j\omega=0$$

$$\Rightarrow (L_2-M)E_1-(L_2-2M+L_1-\omega^2(L_1L_2-M^2))E_2+(-M+L_1)E_3=0 \qquad (2)$$

$$kcl\,(3): I_{R3}=I_{L2}+\frac{E_3}{R_2}+g_mV_{R3} \Rightarrow -\frac{E_1-E_3+E_s}{R_3}+\frac{-M(E_1-E_2)+L_1(E_3-E_2)}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+\frac{E_3}{R_2}$$
$$+g_m(E_1-E_3+E_s)=0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{M}{j\omega(L_1L_2-M^2)}-g_m-\frac{1}{R_3}\right)E_1-\left(\frac{-M+L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2}\right)E_2+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+\frac{1}{R_2}-g_m\right)E_3$$
$$=-g_mE_s+\frac{E_s}{R_3}$$

از روابط 1 و 2 و 3 داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3}+\frac{L_2}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+\frac{1}{R_1} & \frac{-L_2+M}{j\omega(L_1L_2-M^2)} & -\left(\frac{1}{R_3}+\frac{M}{j\omega(L_1L_2-M^2)}\right) \\ \frac{L_2-M}{j\omega(L_1L_2-M^2)} & -\left(\frac{L_2-2M+L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+j\omega\right) & \frac{-M+L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2)} \\ -\left(\frac{M}{j\omega(L_1L_2-M^2)}-g_m-\frac{1}{R_3}\right) & -\left(\frac{-M+L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2)}\right) & \frac{1}{R_3}+\frac{L_1}{j\omega(L_1L_2-M^2)}+\frac{1}{R_2}-g_m \end{bmatrix}$$

$$\cdot$$

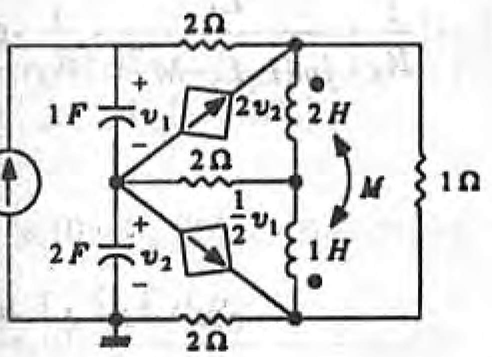
$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s-\frac{E_s}{R_3} \\ 0 \\ \frac{E_s}{R_3}-g_mE_s \end{bmatrix}$$

ت-

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3}+\frac{L_2}{(L_1L_2-M^2)}D^{-1}+\frac{1}{R_1} & \frac{-L_2+M}{L_1L_2-M^2}D^{-1} & -\left(\frac{1}{R_3}+\frac{M}{L_1L_2-M^2}D^{-1}\right) \\ \frac{L_2-M}{L_1L_2-M^2}D^{-1} & -\left(\frac{L_2-2M+L_1}{L_1L_2-M^2}D^{-1}+D\right) & \frac{-M+L_1}{L_1L_2-M^2}D^{-1} \\ -\left(\frac{M}{L_1L_2-M^2}D^{-1}-g_m-\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{-M+L_1}{L_1L_2-M^2}D^{-1} & \frac{1}{R_3}+\frac{L_1}{L_1L_2-M^2}D^{-1}+\frac{1}{R_2}-g_m \end{bmatrix}$$

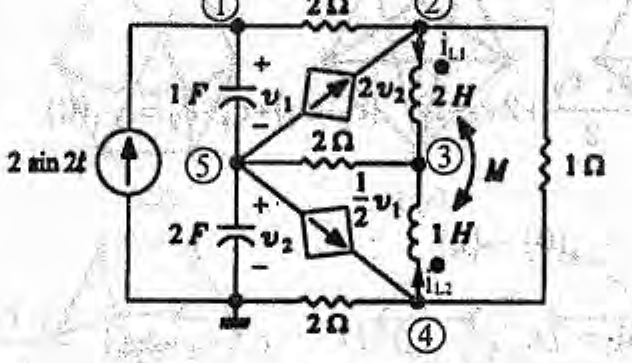
$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t)-\frac{e_s(t)}{R_3}-I_{01} \\ I_{01}+I_{02} \\ -g_me_s(t)+\frac{e_s(t)}{R_3}-I_{02} \end{bmatrix}$$

۲۵-الف- می‌خواهیم معادلات گره را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۵) با روش نظری و بابه کارگیری روش میان بر بنویسیم. با فرض اینکه تزویجی میان سلف ها وجود ندارد، این معادلات را بنویسید.(معادلات را حل نکنید.)



شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۵)

ب - اکنون فرض کنید سلف ها با ضریب $M=1$ تزویج شده باشند. بار دیگر معادلات گره را با روش نظری بنویسید.



حل: الف - $M=0$

$$Y_n(D)e(t)=i_s(t)\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} D+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -D \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}D^{-1}+1 & -\frac{1}{2}D^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}D^{-1} & \frac{1}{2}D^{-1}+\frac{1}{2}+D^{-1} & -D^{-1} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -D^{-1} & D^{-1}+\frac{1}{2}+1 & 0 \\ -D & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & D+\frac{1}{2}+2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2sin2t \\ 2V_2-i_{L1}(0) \\ i_{L1}(0)+i_{L2}(0) \\ \frac{1}{2}V_1-i_{L2}(0) \\ -2V_2-\frac{1}{2}V_1 \end{bmatrix}$$

$$2V_2=2e_5 \qquad \frac{1}{2}V_1=\frac{1}{2}(e_1-e_5) \qquad -2V_2-\frac{1}{2}V_1=-\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}e_5$$

$$\begin{bmatrix} D+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -D \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}D^{-1}+1 & -\frac{1}{2}D^{-1} & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2}D^{-1} & \frac{1}{2}D^{-1}+\frac{1}{2}+D^{-1} & -D^{-1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -D^{-1} & D^{-1}+\frac{1}{2}+1 & \frac{1}{2} \\ -D+\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & D+\frac{1}{2}+2D+\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2sin2t \\ -i_{L1}(0) \\ i_{L1}(0)+i_{L2}(0) \\ -i_{L2}(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ب - $M=1$

$$L=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow \Gamma=\frac{1}{2\times1-1\times1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V_L(t)=LD\,i_L(t)\Rightarrow i_L(t)=\Gamma D^{-1}V_L(t) \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}=D^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_2-e_3 \\ e_4-e_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_{L1}=D^{-1}(e_2-e_3-e_4+e_3)=D^{-1}(e_2-e_4) \qquad i_{L2}=D^{-1}(-e_2+e_3+2e_4-2e_3)=D^{-1}(-e_2-e_3+2e_4)$$

روابط kcl:

$$kcl\ (1): i_s=D(e_1-e_5)+\frac{e_1-e_2}{2} \Rightarrow (D+\frac{1}{2})e_1-\frac{1}{2}e_2-De_5=2\sin 2t \quad (1)$$

$$kcl\ (2): \frac{e_1-e_2}{2}+2V_2-i_{L1}+\frac{e_4-e_2}{1}=0 \Rightarrow \frac{e_1-e_2}{2}+2e_5-D^{-1}(e_2-e_4)+e_4-e_2=i_{L1}(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e_1-(\frac{1}{2}+D^{-1}+1)e_2+(D^{-1}+1)e_4+2e_5=i_{L1}(0) \quad (2)$$

$$kcl\ (3): i_{L1}+i_{L2}+\frac{e_5-e_3}{2}=-i_{L1}(0)-i_{L2}(0) \Rightarrow D^{-1}(e_2-e_4)+D^{-1}(-e_2-e_3+2e_4)+\frac{e_5-e_3}{2}=$$

$$-i_{L1}(0)-i_{L2}(0)$$

$$\Rightarrow -(D^{-1}+\frac{1}{2})e_3+D^{-1}e_4+\frac{1}{2}e_5=-i_{L1}(0)-i_{L2}(0) \quad (3)$$

$$kcl\ (4): -i_{L2}+\frac{1}{2}V_1+\frac{0-e_4}{2}+\frac{e_2-e_4}{1}=i_{L2}(0) \Rightarrow -D^{-1}(-e_2-e_3+2e_4)+\frac{1}{2}(e_1-e_5)-\frac{e_4}{2}+e_2-e_4$$

$$=i_{L2}(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}e_1+(D^{-1}+1)e_2+D^{-1}e_3-(2D^{-1}+\frac{1}{2}+1)e_4-\frac{1}{2}e_5=i_{L2}(0) \quad (4)$$

$$kcl\ (5): DV_1-2V_2+\frac{e_3-e_5}{2}-\frac{1}{2}V_1-2DV_2=0$$

$$\Rightarrow D(e_1-e_5)-2e_5+\frac{e_3-e_5}{2}-\frac{1}{2}(e_1-e_5)-2De_5=0$$

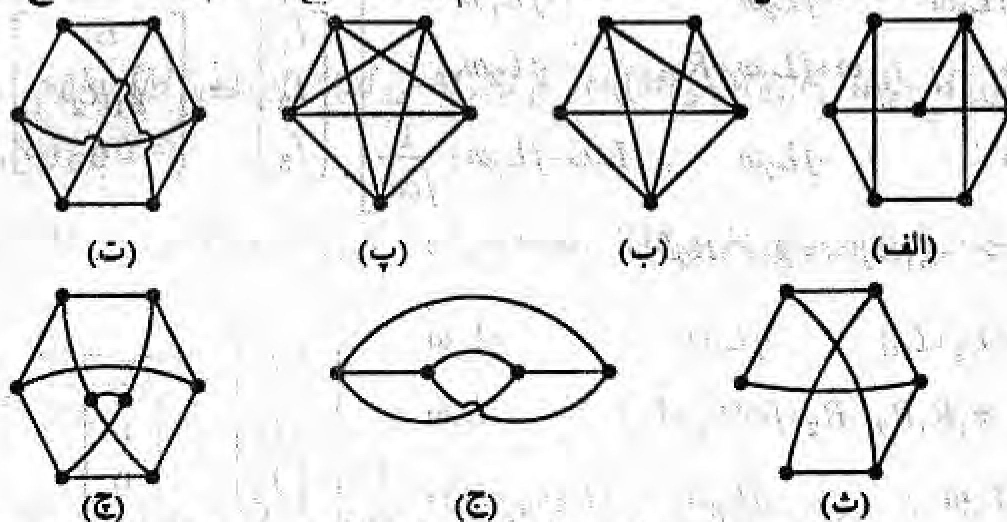
$$\Rightarrow (D-\frac{1}{2})e_1+\frac{1}{2}e_3-(D+2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2D)e_5=0$$

$$\Rightarrow (-D+\frac{1}{2})e_1-\frac{1}{2}e_3+(D+2+2D)e_5=0 \quad (5)$$

روابط (1) تا (5) رابصورت ماتریس مرتب می‌کنیم:

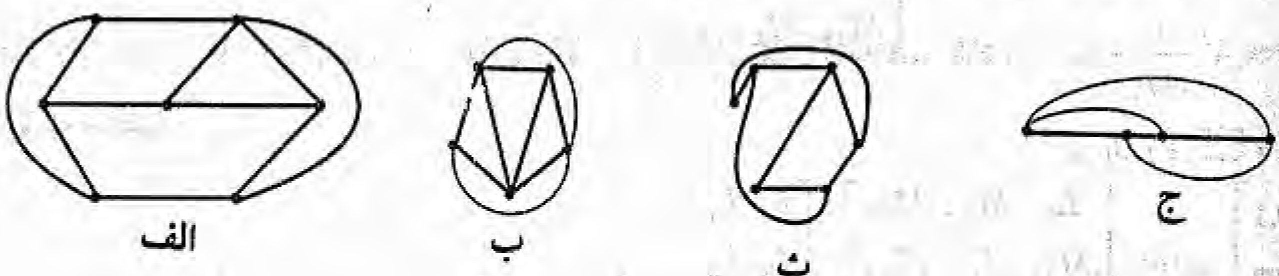
$$\begin{bmatrix} D+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -D \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+D^{-1}+1 & 0 & -(D^{-1}+1) & -2 \\ 0 & 0 & D^{-1}+\frac{1}{2} & -D^{-1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -(D^{-1}+1) & -D^{-1} & 2D^{-1}+\frac{1}{2}+1 & \frac{1}{2} \\ -D+\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & D+2D+2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ -i_{L1}(0) \\ i_{L1}(0)+i_{L2}(0) \\ -i_{L2}(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

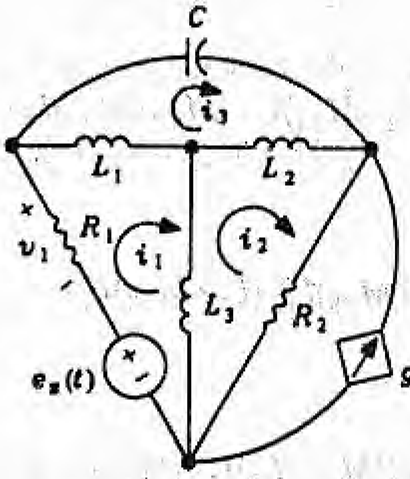
۲۶- از گراف های داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۶) کدام یک مسطح و کدام یک نامسطح هستند؟



حل:

گرافهای الف، ب ، ث و چ مسطح هستند زیرا می‌توان آنها را در یک صفحه نشان داد بدون اینکه شاخه‌هایشان همدیگر را قطع کنند، ولی بقیه نامسطح هستند:





شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۷)

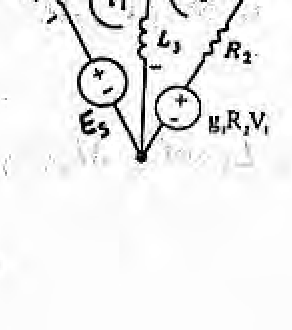
۲۷-الف- معادلات حالت دایمی سینوسی مش را در مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۷) بنویسید.

ب- فرض کنید میان سلف های تزویج وجود داشته و ضرایب تزویج متقابل آنها M_{12}، M_{13} و M_{23} باشند. بار دیگر معادلات حالت دایمی سینوسی مش رابنویسید.

پ- معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را بنویسید و شرایط اولیه رامشخص کنید.

حل:

ابتدا منبع جریان gV_1 رابه منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم و سپس معادلات مش را می‌نویسیم:



الف- حالت دایمی سینوسی با $M=0$

$$Z_n I = V_s$$

$$\begin{bmatrix} R_1+jL_1\omega+jL_3\omega & -jL_3\omega & -jL_1\omega \\ -jL_3\omega & j_{L_3}\omega+jL_2\omega+R_2 & -jL_2\omega \\ -jL_1\omega & -jL_2\omega & jL_1\omega+jL_2\omega+\dfrac{1}{jc\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ -g_1R_2V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1=-R_1I_1 \Rightarrow -g_1R_2V_1=g_1R_1R_2I_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_1+j\omega(L_1+L_3) & -jL_3\omega & -jL_1\omega \\ -jL_3\omega-g_1R_1R_2 & R_2+j\omega(L_2+L_3) & -jL_2\omega \\ -jL_1\omega & -jL_2\omega & j\omega(L_1+L_2)+\dfrac{1}{jc\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالت دایمی سینوسی با

$$V_L=j\omega LI_L \qquad L=\begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix}$$

معادلات سلفها:

$$\begin{bmatrix} V_{L1} \\ V_{L2} \\ V_{L3} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1-I_3 \\ I_3-I_2 \\ I_1-I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{L1}=j\omega(L_1I_1-L_1I_3+M_{12}I_3-M_{12}I_2+M_{13}I_1-M_{13}I_2)=j\omega((L_1+M_{13})I_1-(M_{12}+M_{13})I_2+(M_{12}-L_1)I_3))$$

$$V_{L2}=j\omega(M_{12}I_1-M_{12}I_3+L_2I_3-L_2I_2+M_{23}I_1-M_{23}I_2)=j\omega((M_{12}+M_{23})I_1-(L_2+M_{23})I_2+(L_2-M_{12})I_3)$$

$$V_{L3}=j\omega(M_{13}I_1-M_{13}I_3+M_{23}I_3-M_{23}I_2+L_3I_1-L_3I_2)=j\omega((M_{13}+L_3)I_1-(M_{23}+L_3)I_2+(M_{23}-M_{13})I_3)$$

معادلات مش‌ها:

$$kvl\ 1: -E_s+R_1I_1+V_{L1}+V_{L3}=0$$

$$\Rightarrow R_1I_1+j\omega((L_1+M_{13})I_1-(M_{12}+M_{13})I_2+(M_{12}-L_1)I_3)+j\omega((M_{13}+L_3)I_1-(M_{23}+L_3)I_2+(M_{23}-M_{13})I_3)=E_s$$

$$\Rightarrow (R_1+j\omega(L_1+2M_{13}+L_3))I_1-j\omega(M_{12}+M_{13}+M_{23}+L_3)I_2+j\omega(M_{12}-L_1+M_{23}-M_{13})I_3=E_s \quad (1)$$

$$kvl\ 2:\ -V_{L3}-V_{L2}+R_2I_2+g_1R_2V_1=0$$

$$\Rightarrow -j\omega((M_{13}+L_3)I_1-(M_{23}+L_3)I_2+(M_{23}-M_{13})I_3)-j\omega((M_{12}+M_{23})I_1-(L_2+M_{23})I_2+(L_2-M_{12})I_3)$$
$$+R_2I_2-g_1R_1R_2I_1=0 \Rightarrow$$

$$(-g_1R_1R_2-j\omega(M_{13}+L_3+M_{12}+M_{23}))I_1+(R_2+j\omega(L_2+2M_{23}+L_3))I_2+j\omega(M_{13}-M_{23}-L_2+M_{12})I_3=0 \quad (2)$$

$$kvl\ 3:\ -V_{L1}+\frac{I_3}{jc\omega}+V_{L2}=0$$

$$\Rightarrow -j\omega((L_1+M_{13})I_1-(M_{12}+M_{13})I_2+(M_{12}-L_1)I_3)+\frac{I_3}{jc\omega}+j\omega((M_{12}+M_{23})I_1-(L_2+M_{23})I_2+$$

$$(L_2-M_{12}))I_3=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow j\omega(M_{12}+M_{23}-L_1-M_{13})I_1+j\omega(M_{12}+M_{13}-L_2-M_{23})I_2+(j\omega(L_1-2M_{12}+L_2)+\frac{1}{jc\omega})I_3=0 \quad (3)$$

از روابط (1,2,3) داریم:

$$\begin{bmatrix} R_1+j\omega(L_1+2M_{13}+L_3) & -j\omega(M_{12}+M_{23}+M_{31}+L_3) & -j\omega(L_1+M_{13}-M_{23}-M_{12}) \\ -g_1R_1R_2-j\omega(M_{12}+M_{23}+M_{13}+L_3) & R_2+j\omega(L_2+2M_{23}+L_3) & j\omega(M_{12}-M_{23}+M_{13}-L_2) \\ j\omega(M_{12}+M_{23}-L_1-M_{13}) & j\omega(M_{12}-M_{23}+M_{13}-L_2) & j\omega(L_1-2M_{12}+L_2)+\dfrac{1}{jC\omega} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پ-معادلات انتگرال دیفرانسیل را با فرض وجود تزویج مغناطیسی سلفها می‌نویسیم:

$$j\omega \rightarrow D \ \text{و}\ \frac{1}{j\omega} \rightarrow D^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} R_1+D(L_1+2M_{13}+L_3) & -D(M_{12}+M_{23}+M_{13}+L_3) & -D(L_1+M_{13}-M_{23}-M_{12}) \\ -g_1R_1R_2-D(M_{12}+M_{23}+M_{13}+L_3) & R_2+D(L_2+2M_{23}+L_3) & D(M_{12}-M_{23}+M_{13}-L_2) \\ D(M_{12}+M_{23}-L_1-M_{13}) & D(M_{12}-M_{23}+M_{13}-L_2) & D(L_1-2M_{12}+L_2)+cD^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_s(t) \\ g_1R_1R_2i_1(0) \\ -V_c(0) \end{bmatrix}$$

برای سلفهای L_1 و L_2 و L_3 در $t=0$ داریم:

$$\begin{cases} i_1(0)-i_3(0)=i_{L1}(0) \\ i_3(0)-i_2(0)=i_{L2}(0) \end{cases}$$

$$kvl\ :\ -e_s(0)+R_1i_1(0)+V_C(0)+R_2i_2(0)=g_1R_2(-R_1i_1(0))=0$$

معادلات را مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ R_1-g_1R_1R_2 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ i_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L1}(0) \\ i_{L2}(0) \\ e_s(0)-V_c(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه از حل دستگاه اخیر حاصل می‌شوند:

$$i_1(0)=\frac{V_c(0)-3R_2i_{L1}(0)-R_2i_{L2}(0)-e_s(0)}{g_1R_1R_2-R_1-3R_2}$$

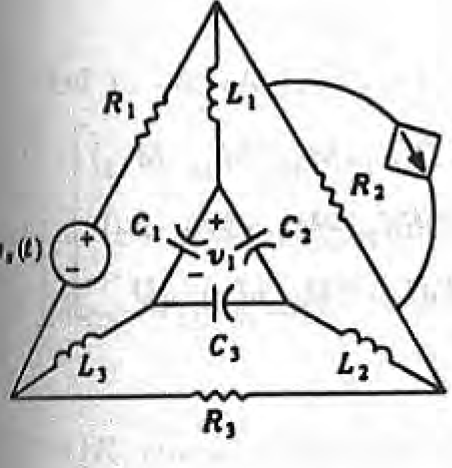
$$i_2(0)=\frac{3V_c(0)-3e_s(0)+(R_1-g_1R_1R_2)(3i_{L1}(0)+i_{L2}(0))}{g_1R_1R_2-R_1-3R_2}$$

$$i_3(0)=\frac{V_c(0)-e_s(0)-R_2i_{L2}(0)+(R_1-g_1R_1R_2)i_{L1}(0)}{g_1R_1R_2-R_1-3R_2}$$

۲۸- می‌خواهیم معادلات انتگرال-دیفرانسیل مش را در مدار داده شده در شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۸) بنویسیم.

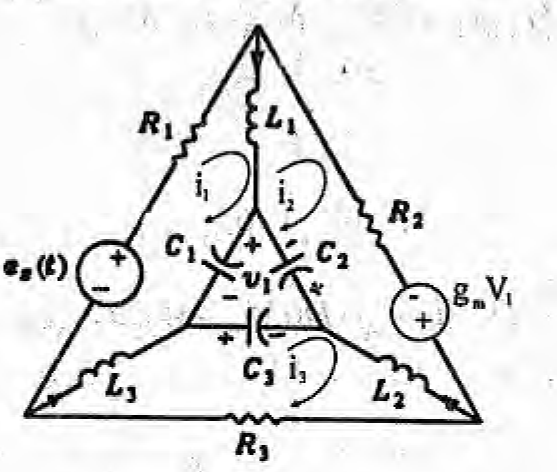
الف- با فرض اینکه تزویجی میان سلف ها وجود نداشته باشد و تمام عناصر ذخیره کنندهٔ انرژی شرط اولیهٔ غیر صفر داشته باشد، معادلات را بنویسید.

ب- فرض کنید میان سلف ها تـزویج وجـود داشـته بـاشد و ضرایب تزویج متقابل آنها M_{12}،M_{13} و M_{23} باشند. بار دیگر معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را بنویسید.



شکل (مسألهٔ ۱۰-۲۸)

پ- اگر جای سلف ها و خازنها را باهم عوض کنیم چه تغییر خاصی در معادلات (الف) و (ب) حاصل می‌شود؟



حل:

ابتدا منبع جریان رابه منبع ولتاژ تبدیل کرده سپس روابط مش را بصورت ماتریس می‌نویسیم:

الف- $g_m V_1 = \frac{g_m}{C_1} D^{-1}(i_1 - i_2)$

$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+\frac{1}{C_1}D^{-1}+L_3D & -L_1D & -L_3D & -\frac{1}{C_1}D^{-1} \\ -L_1D-\frac{g_m}{C_1}D^{-1} & \frac{g_m}{C_1}D^{-1}+R_2+L_1D+\frac{1}{C_2}D^{-1}+L_2D & -L_2D & -\frac{1}{C_2}D^{-1} \\ -L_3D & -L_2D & R_3+L_2D+\frac{1}{C_3}D^{-1}+L_3D & -\frac{1}{C_3}D^{-1} \\ -\frac{1}{C_1}D^{-1} & -\frac{1}{C_2}D^{-1} & -\frac{1}{C_3}D^{-1} & (\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3})D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_s(t)-V_{C1}(0) \\ -V_{C2}(0) \\ -V_{C3}(0) \\ V_{C1}(0)+V_{C2}(0)+V_{C3}(0) \end{bmatrix}$$

ب- $L = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix} \quad V_L = LDI_L \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{L1} \\ V_{L2} \\ V_{L3} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & L_2 & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix}$

$$i_{L1}=i_1-i_2 \qquad i_{L2}=i_2-i_3 \qquad i_{L3}=i_3-i_1$$

$$\Rightarrow V_{L1}=D(L_1(i_1-i_2)+M_{12}(i_2-i_3)+M_{13}(i_3-i_1))=D\left((L_1-M_{13})i_1+(M_{12}-L_1)i_2+(M_{13}-M_{12})i_3\right)$$

$$VL_2=D\left(M_{12}(i_1-i_2)+L_2(i_2-i_3)+M_{23}(i_3-i_1)\right)=D\left((M_{12}-M_{23})i_1+(L_2-M_{12})i_2+(M_{23}-L_2)i_3\right)$$

$$V_{L3}=D\left(M_{13}(i_1-i_2)+M_{23}(i_2-i_3)+L_3(i_3-i_2)\right)=D\left((M_{13}-L_3)i_1+(M_{23}-M_{13})i_2+(L_3-M_{23})i_3\right)$$

$$kvl\ 1:\ -e_s+R_1i_1+V_{L1}+\frac{1}{c}D^{-1}(i_1-i_4)-V_{L3}=-V_{c1}(0)$$

$$e_s-V_{c1}(0)=R_1i_1+D\left((L_1-M_{13})i_1+(M_{12}-L_1)i_2+(M_{13}-M_{12})i_3\right)+\frac{1}{c}D^{-1}(i_1-i_4)-$$
$$D\left((M_{13}-L_3)i_1+(M_{23}-M_{13})i_2+(L_3-M_{23})i_3\right)$$

$(R_1+D(L_1-2M_{13}+L_3)+\frac{1}{c_1}D^{-1})i_1-D(L_1-M_{12}+M_{23}-M_{13})i_2-D(M_{12}-M_{13}+L_3-M_{23})i_3-\frac{1}{c_1}D^{-1}i_4$

$=e_s(t)-V_{c1}(0)$ (1)

$kvl\ 2: -V_{L1}+R_2i_2-g_mV_1+V_{L2}+V_{c2}=-V_{c2}(0) \Rightarrow$

$-D((L_1-M_{13})i_1+(M_{12}-L_1)i_2+(M_{13}-M_{12})i_3)+R_2i_2-\frac{g_m}{c_1}D^{-1}(i_1-i_2)+D((M_{12}-M_{23})i_1+(L_2-M_{12})i_2$

$+(M_{23}-L_2)i_3)+\frac{1}{c_2}D^{-1}(i_2-i_4)=-V_{c2}(0)$

$\Rightarrow \left[(-D(L_1-M_{13}-M_{12}+M_{23})-\frac{g_m}{c_1}D^{-1}\right] i_1+\left[D(L_1-2M_{12}+L_2)+R_2+D^{-1}(\frac{g_m}{c_1}+\frac{1}{c_2})\right] i_2-$

$D(M_{13}-M_{12}+L_2-M_{23})i_3-\frac{1}{c_2}D^{-1}i_4=-V_{c2}(0)$ (2)

$kvl\ 3: V_{L3}+V_{C3}-V_{L2}+R_3i_3=-V_{C3}0)$

$D\left[(M_{13}-L_3)i_1+(M_{23}-M_{13})i_2+(L_3-M_{23})i_3\right]+\frac{1}{c_3}D^{-1}(i_3-i_4)-D\left[(M_{12}-M_{23})i_1+(L_2-M_{12})i_2\right.$

$\left.+(M_{23}-L_2)i_3\right]+R_3i_3=-V_{c3}(0)$

$\Rightarrow D(M_{13}-L_3-M_{12}+M_{23})i_1+D(M_{23}-M_{13}-L_2+M_{12})i_2+(D(L_3-2M_{23}+L_2)+\frac{1}{c_3}D^{-1}$

$+R_3)i_3-\frac{1}{c_3}D^{-1}i_4=-V_{c3}(0)$ (3)

$kvl\ 4: V_{c1}+V_{c2}+V_{c3}=-V_{c1}(0)-V_{c2}(0)-V_{c3}(0)$

$\Rightarrow \frac{1}{c_1}D^{-1}(i_1-i_4)+\frac{1}{c_2}D^{-1}(i_2-i_4)+\frac{1}{c_3}D^{-1}(i_3-i_4)=-V_{c1}(0)-V_{c2}(0)-V_{c3}(0)$

$\Rightarrow -\frac{1}{c_1}D^{-1}i_1-\frac{1}{c_2}D^{-1}i_2-\frac{1}{c_3}D^{-1}i_3+D^{-1}(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3})i_4=V_{c1}(0)+V_{c2}(0)+V_{c3}(0)$ (4)

روابط 1 تا 4 را مرتب می‌کنیم (بصورت ماتریس)

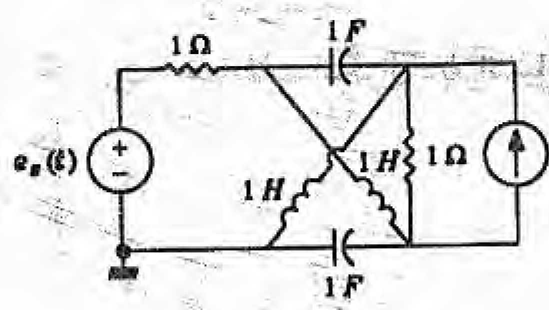
$$\begin{bmatrix} R_1+D(L_1-2M_B+L_3)+\frac{1}{c_1}D^{-1} & -D(L_1-M_{12}+M_{23}-M_{13}) & -D(L_3+M_{12}-M_{13}-M_{23}) & -\frac{1}{c_1}D^{-1} \\ -D(L_1-M_{13}-M_{12}+M_{23})-\frac{g_m}{c_1}D^{-1} & D(L_1-2M_{12}+L_2)+R_2+D^{-1}(\frac{g_m}{c_1}+\frac{1}{c_2}) & -D(M_{13}-M_{12}+L_2-M_{23}) & -\frac{1}{c_2}D^{-1} \\ -D(L_3-M_{13}+M_{12}-M_{23}) & -D(L_2-M_{23}+M_{13}-M_{12}) & D(L_3-2M_{23}+L_2)+\frac{1}{c_3}D^{-1}+R_3 & -\frac{1}{c_3}D^{-1} \\ -\frac{1}{c_1}D^{-1} & -\frac{1}{c_2}D^{-1} & -\frac{1}{c_3}D^{-1} & D^{-1}(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}) \end{bmatrix}$$

$$\text{X}\begin{bmatrix} i_1(t)\\ i_2(t)\\ i_3(t)\\ i_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_s(t)-V_{c1}(0)\\ -V_{c2}(0)\\ -V_{c3}(0)\\ V_{c1}(0)+V_{c2}(0)+V_{c3}(0)\end{bmatrix}$$

پ- در معادلات الف، جملات LD تبدیل به $\frac{1}{c}D^{-1}$ و جملات $\frac{1}{c}D^{-1}$ به LD تبدیل می‌شوند. در معادلات ب نیز همینطور. فقط درمعادلات ب، القای متقابل بین خازنها چندان با معنی نخواهد بود.

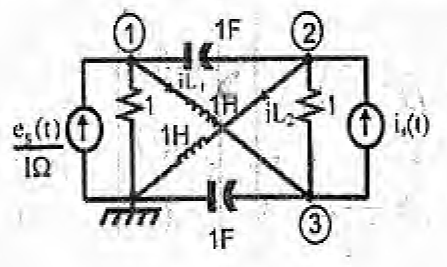
۲۹-الف- معادلات انتگرال-دیفرانسیل گره را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۹) بنویسید.

ب- معادلات انتگرل-دیفرانسیل مش را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۲۹) بنویسید.



حل:

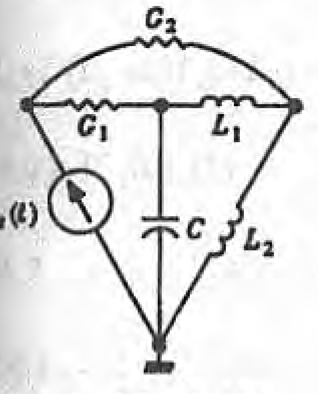
الف- چون تحلیل گره می‌نویسیم، منبع ولتاژ را به جریان تبدیل می‌کنیم. گره‌ها را به ترتیب زیر نامگذاری می‌کنیم:



$$Y_n(D)e(t)=i_s(t)\Rightarrow\begin{bmatrix} 1+D+D^{-1} & -D & -D^{-1}\\ -D & D+D^{-1}+1 & -1\\ -D^{-1} & -1 & 1+D^{-1}+D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1(t)\\ e_2(t)\\ e_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_s(t)-i_{L1}(0)\\ i_s(t)-i_{L2}(0)\\ -i_s(t)+i_{L1}(0)\end{bmatrix}$$

ب- منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم. توجه کنید که گراف بدست آمده مسطح می‌باشد و می‌توانیم از تحلیل مش استفاده کنیم. (در گرافهای نامسطح نمی‌توان از تحلیل مش استفاده کرد.)

$$\begin{bmatrix} 1+D+D^{-1} & -D & -D^{-1}\\ -D & D+D^{-1}+1 & -1\\ -D^{-1} & -1 & 1+D+D^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t)\\ i_2(t)\\ i_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_s(t)-V_{c1}(0)\\ -i_s(t)-V_{c2}(0)\\ i_s(t)+V_{c1}(0)\end{bmatrix}$$



شکل (مسألهٔ ۱۰-۳۰)

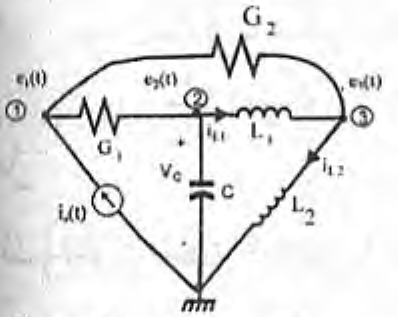
۳۰-الف- معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را در مدار شکل (مسالهٔ ۱۰-۳۰) بنویسید. شرایط اولیه را برحسب ولتاژ اولیهٔ خازن و جریان اولیهٔ سلف‌ها مشخص کنید.

ب- فرض کنید منبع نابسته $e_s(t)$ سری با رسانایی G_2 و منبع وابستهٔ $g_m v_2$ موازی با خازن C قرار گیرند که در آن v_2 ولتاژ دو سر رسانایی G_2 است. بار دیگر معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را بنویسید.

پ- اگر بین دو سلف L_1 و L_2 تزویج M وجود داشته باشد، بار دیگر معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را بنویسید.

ت- معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را برای هر سه حالت مطرح شده در بالا بنویسید.

حل :



الف-

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1+CD+\dfrac{1}{L_1}D^{-1} & -\dfrac{1}{L_1}D^{-1} \\ -G_2 & -\dfrac{1}{L_1}D^{-1} & G_2+\dfrac{1}{L_1}D^{-1}+\dfrac{1}{L_2}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_{L1}(0) \\ i_{L1}(0)-i_{L2}(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه :

$$e_2(0)=V_c(0) \qquad kcl:\ \left[e_1(0)-e_2(0)\right]\ G_1-i_{L1}(0)-i_c(0)=0$$

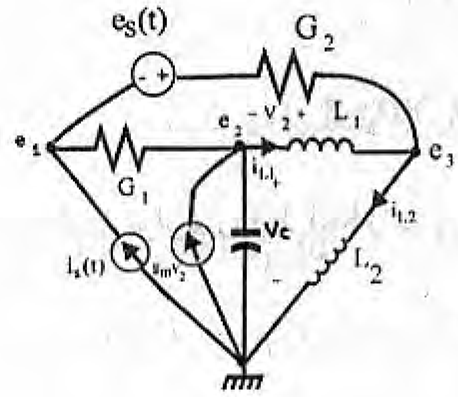
$$i_c(0)=i_s(0)\ -i_{L2}(0) \quad \Rightarrow\ G_1\ \left[e_1(0)-V_c(0)\right]\ -i_{L1}(0)-i_s(0)-i_{L2}(0)=0$$

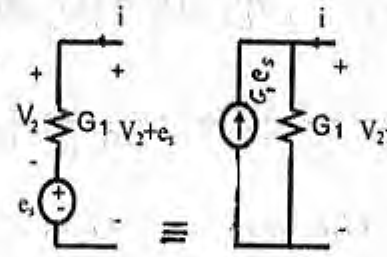
$$\Rightarrow\ e_1(0)=V_c(0)+\frac{i_s(0)+i_{L1}(0)-i_{L2}(0)}{G_1} \qquad kcl:\ \left[e_1(0)-e_3(0)\right]\ G_2+i_{L1}(0)-i_{L2}(0)=0$$

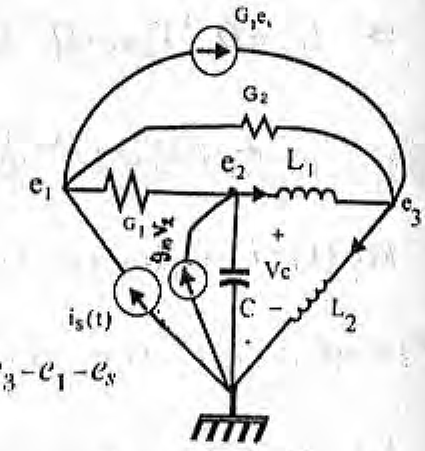
$$\Rightarrow\ e_3(0)=e_1(0)+\frac{i_{L1}(0)-i_{L2}(0)}{G_2}=V_c(0)+i_s(0)+\ \left(i_{L1}(0)-i_{L2}(0)\right)\ \left[\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right]$$

ب - ابتدا منبع ولتاژ e_s را به منبع جریان تبدیل می‌کنیم.

البته چون از ولتاژ V_2 استفاده شده است به مدار زیر توجه کنید.







$$kvl : e_1 - e_3 = -e_s - V_2 \Rightarrow V_2 = e_3 - e_1 - e_s$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1 & G_1+CD+\frac{1}{L_1}D^{-1} & -\frac{1}{L_1}D^{-1} \\ -G_2 & -\frac{1}{L_1}D^{-1} & G_2+\frac{1}{L_1}D^{-1}+\frac{1}{L_2}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t)-G_1e_s(t) \\ -i_{L1}(0)+g_m(e_3-e_1-e_s) \\ i_{L1}(0)-i_{L2}(0)+G_1e_s(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2 \\ -G_1+g_m & G_1+CD+\frac{1}{L_1}D^{-1} & -\frac{1}{L_1}D^{-1}-g_m \\ -G_2 & -\frac{1}{L_1}D^{-1} & G_2+\frac{1}{L_1}D^{-1}+\frac{1}{L_2}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t)-G_1e_s(t) \\ -i_{L1}(0)-g_me_s \\ i_{L1}(0)-i_{L2}(0)+G_1e_s(t) \end{bmatrix}$$

پ - در این حالت فرض می‌کنیم که شرایط گفته شده در قسمت ب نیز برقرار است:

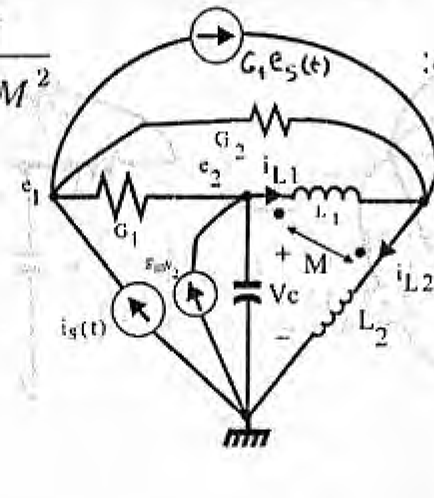
$$V_s = e_3 - e_1 - e_s$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

در ماتریس Γ درایه‌ها چنین هستند:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1L_2-M^2} \qquad \Gamma_{12} = \frac{-M}{L_1L_2-M^2}$$

$$\Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1L_2-M_2}$$



$$V_L=DLI_L \Rightarrow I_L=D^{-1}\Gamma V_L \Rightarrow \begin{bmatrix} i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix} = D^{-1}\begin{bmatrix}\Gamma_1 & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{12} & \Gamma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_2-e_3\\ e_3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_{L1}=D^{-1}\Gamma_1 e_2+D^{-1}(\Gamma_{12}-\Gamma_1)e_3 \quad , \; i_{L2}=D^{-1}\Gamma_{12}e_2+D^{-1}(\Gamma_2-\Gamma_{12})e_3$$

اکنون می‌توانیم روابط kcl را برای گره‌ها نوشته آنها رامرتب کنیم و به شکل ماتریس درآوریم:

$$kcl\ (1): i_s+G_1(e_2-e_1)+G_2(e_3-e_1)-G_1e_s=0 \Rightarrow -(G_1+G_2)e_1+G_1e_2+G_2e_3=-i_s+G_1e_s$$

$$\Rightarrow (G_1+G_2)e_1-G_1e_2-G_2e_3=i_s-G_1e_s \qquad (1)$$

$$kcl\ (2): G_1(e_1-e_2)+g_mV_2+CD(0-e_2)-i_{L1}=i_{L1}(0)$$

$$\Rightarrow G_1(e_1-e_2)+g_m(e_3-e_1-e_s)-CDe_2-D^{-1}\Gamma_1e_2-D^{-1}(\Gamma_{12}-\Gamma_1)e_3=i_{L1}(0)$$

$$\Rightarrow (G_1-g_m)e_1-(G_1+CD+\Gamma_1D^{-1})e_2+(g_m+D^{-1}(\Gamma_1-\Gamma_{12}))e_3=g_me_s+i_{L1}(0)$$

$$\Rightarrow -(G_1-g_m)e_1+(G_1+CD+\Gamma_1D^{-1})e_2-(g_m+D^{-1}(\Gamma_1-\Gamma_{12}))e_3=-g_me_s-i_{L1}(0) \qquad (2)$$

$$kcl\ (3): i_{L1}-i_{L2}+G_2(e_1-e_3)+G_1e_s=-i_{L1}(0)+i_{L2}(0)$$

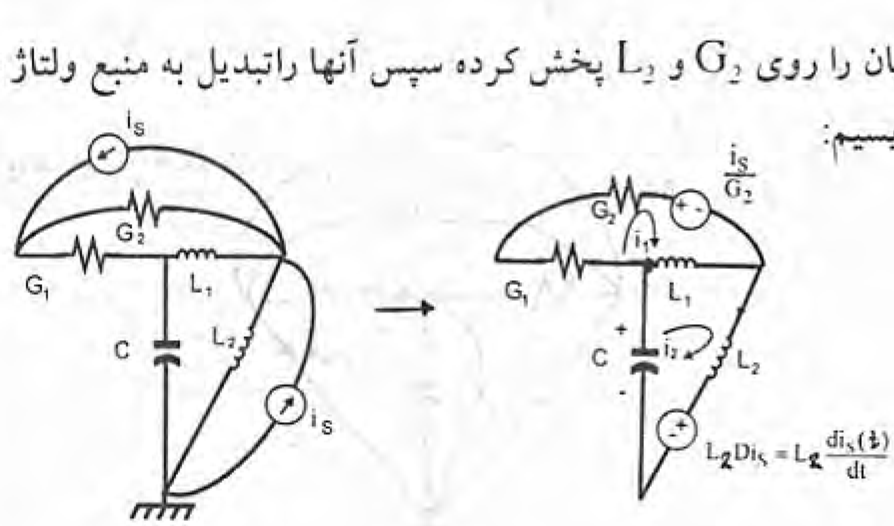
$$\Rightarrow D^{-1}\Gamma_1e_2+D^{-1}(\Gamma_{12}-\Gamma_1)e_3-D^{-1}\Gamma_{12}e_2-D^{-1}(\Gamma_2-\Gamma_{12})e_3+G_2(e_1-e_3)=-i_{L1}(0)+i_{L2}(0)-G_1e_s$$

$$\Rightarrow G_2e_1+(\Gamma_1D^{-1}-\Gamma_{12}D^{-1})e_2+\left(D^{-1}(\Gamma_{12}-\Gamma_1-\Gamma_2+\Gamma_{12})-G_2\right)e_3=-i_{L1}(0)+i_{L2}(0)-G_1e_s$$

$$\Rightarrow -G_2e_1-D^{-1}(\Gamma_1-\Gamma_{12})e_2+\left(G_2+D^{-1}(\Gamma_1-2\Gamma_{12}+\Gamma_2)\right)e_3=i_{L1}(0)-i_{L2}(0)+G_1e_s \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & -G_2\\ -G_1+g_m & G_1+CD+\Gamma_1D^{-1} & -g_m-D^{-1}(\Gamma_1-\Gamma_{12})\\ -G_2 & -D^{-1}(\Gamma_1-\Gamma_{12}) & G_2+D^{-1}(\Gamma_1-2\Gamma_{12}+\Gamma_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\\ e_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_s(t)-G_1e_s(t)\\ -i_{L1}(0)-g_me_s(t)\\ i_{L1}(0)-i_{L2}(0)+G_1e_s(t)\end{bmatrix}$$

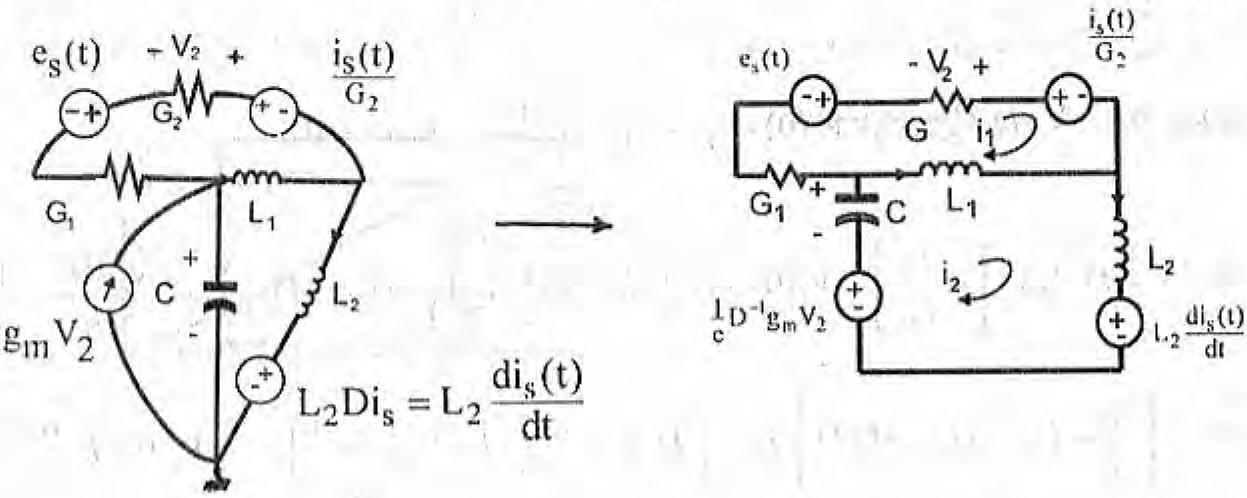
ت- الف- منبع جریان را روی G_2 و L_2 پخش کرده سپس آنها راتبدیل به منبع ولتاژ می‌کنیم و بعد معادلات مش را می‌نویسیم:



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}+L_1D & -L_1D \\ -L_1D & L_1D+L_2D+\frac{1}{c}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i_s(t)}{G_2} \\ -L_2\frac{di_s(t)}{dt}+V_c(0) \end{bmatrix}$$

$$i_2(0)-i_1(0)=i_{L1}(0) \qquad i_2(0)=i_{L2}(0) \qquad \Rightarrow i_1(0)=i_2(0)-i_{L1}(0) \qquad \Rightarrow i_1(0)=i_{L2}(0)-i_{L1}(0)$$

ت- ب-

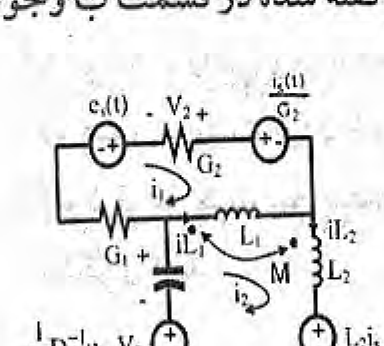


$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}+L_1D & -L_1D \\ -L_1D & L_1D+L_2D+\frac{1}{c}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s(t)-\frac{i_s(t)}{G_2} \\ \frac{1}{c}D^{-1}g_mV_2(t)+V_c(0)-L_2\frac{di_s(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{c}D^{-1}g_mV_2=\frac{1}{c}D^{-1}g_m\left(-\frac{i_1}{G_2}\right)=-\frac{g_m}{cG_2}D^{-1}i_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}+L_1D & -L_1D \\ -L_1D+\frac{g_m}{cG_2}D^{-1} & L_1D+L_2D+\frac{1}{c}D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s(t)-\frac{i_s(t)}{G_2} \\ V_c(0)-L_2\frac{di_s(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

ت- پ- فرض می‌کنیم حالت قبل نیز صادق است، یعنی هم منابع گفته شده در قسمت ب وجود دارند و هم سلفها دارای تزویج هستند.



روابط سلفها:

$$i_{L1}=i_2-i_1 \qquad i_{L2}=i_2$$

$$\begin{bmatrix} V_{L1} \\ V_{L2} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2-i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$V_{L1} = D\left((L_1+M)i_2 - L_1 i_1\right) \quad , \quad V_{L2} = D\left((L_2+M)\, i_2 - M i_1\right)$$

روابط مش ها:

$$KVL\,1: \frac{i_1}{G_1} - e_s(t) + \frac{i_1}{G_2} + \frac{i_s(t)}{G_2} - V_{L1} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right] i_1 - D\left((L_1+M)i_2 - L_1 i_1\right) = e_s(t) - \frac{i_s(t)}{G_2}$$

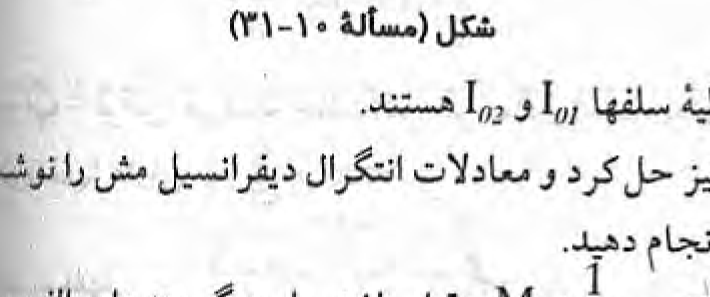
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + L_1 D\right] i_1 - (L_1+M)D\, i_2 = e_s(t) - \frac{i_s(t)}{G_2} \qquad (1)$$

$$KVL\,2: -\frac{1}{c}\, D^{-1} g_m V_2 - V_c(0) + V_{L1} + V_{L2} + L_2 \frac{di_s}{dt} - V_c(t) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c} D^{-1} g_m \left[-\frac{i_1}{G_2}\right] - V_c(0) + D\left((L_1+2M+L_2)i_2 - (L_1+M)i_1\right) + L_2 \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{1}{c}\, D^{-1} i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{g_m}{cG_2} D^{-1} - (L_1+M)\, D\right] i_1 + \left[D(L_1+2M+L_2) + \frac{1}{c} D^{-1}\right] i_2 = V_c(0) - L_2 \frac{di_s(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + L_1 D & -(L_1+M)D \\ -(L_1+M)D + \frac{g_m}{cG_2} D^{-1} & D(L_1+2M+L_2) + \frac{1}{c} D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s(t) - \frac{i_s(t)}{G_2} \\ V_c(0) - L_2 \frac{di_s(t)}{dt} \end{bmatrix}$$



شکل (مسألهٔ ۱۰-۳۱)

۳۱- در مدار شکل (مسألهٔ ۱۰-۳۱) فرض کنید منبع جریان $i_s(t)$ شیب واحد و منبع ولتاژ $v_s(t)$ پلهٔ واحد باشند.

الف- معادلات انتگرال دیفرانسیل گره را با روش نظری بنویسید. شرایط اولیهٔ خازنها V_{01} و V_{02} و جریان اولیهٔ سلفها I_{01} و I_{02} هستند.

ب- آیا این مدار را می‌توان با تحلیل مش نیز حل کرد و معادلات انتگرال دیفرانسیل مش را نوشت؟ در صورت مثبت بودن جواب آن را انجام دهید.

پ- اکنون فرض کنید بین سلفهای مدار، تزویج $M=\frac{1}{2}$ برقرار باشد. بار دیگر بندهای الف و ب راتکرار کنید.

حل :