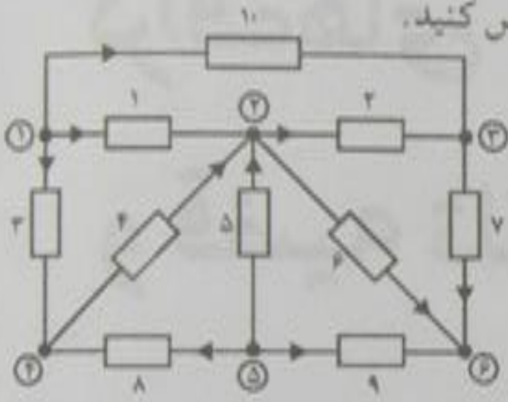
فصل نهم: گراف‌های شبکه و قضیه تلگان

۱) الف ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۹-۱) گراف جهت‌دار را رسم کرده، ماتریس تلاقی گره با شاخهٔ A_n را بنویسید.

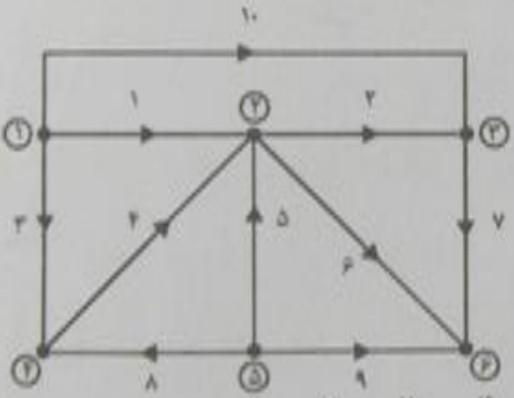
ب - کات‌ست‌هایی که شاخهٔ ۴ را در بر دارند مشخص کنید.

پ - کات‌ست‌هایی که شاخهٔ ۳ و ۷ را در بردارند مشخص کنید.



حل)

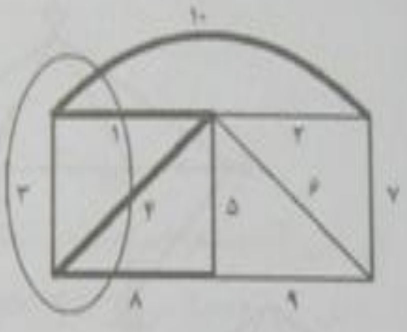
الف - گراف جهت‌دار مدار شکل (مسألهٔ ۹-۱) بصورت روبرو می‌باشد.



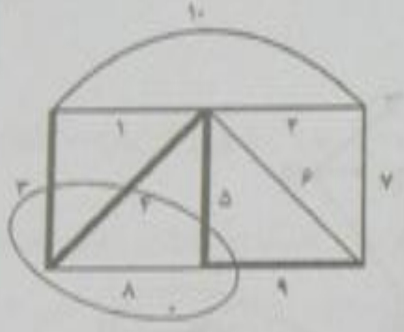
$$A_n = \text{گره}\, n_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ & -۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ \end{array}\right] \end{array}$$

ماتریس تلاقی گره با شاخه برابر A_n بوده و همانطور که می‌دانید تعداد سطرهای این ماتریس برابر تعداد گره‌ها و تعداد ستونهای آن برابر تعداد شاخه‌ها می‌باشد.

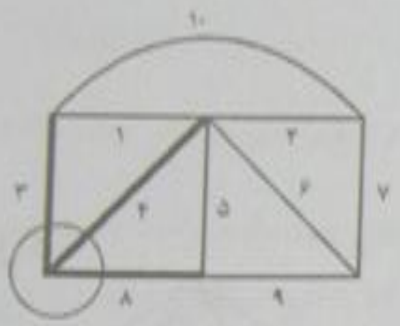
ب - برای نشان دادن کات‌ست‌هایی که شاخهٔ ۴ را در بردارند به این صورت عمل می‌کنیم که شاخه‌های مربوط به کات‌ست را با خطوط پررنگ‌تر نشان می‌دهیم.



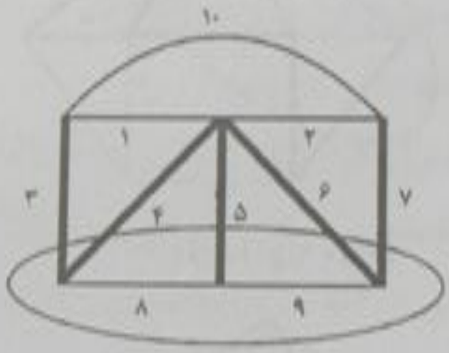
(۱,۴,۸,۱۰)



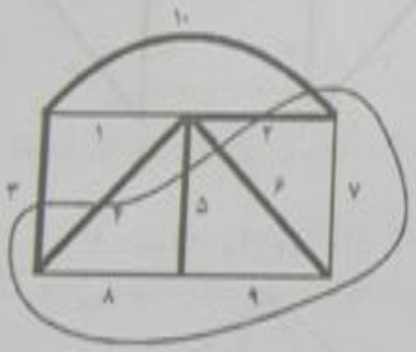
(۳,۴,۵,۹)



(۳,۴,۸)

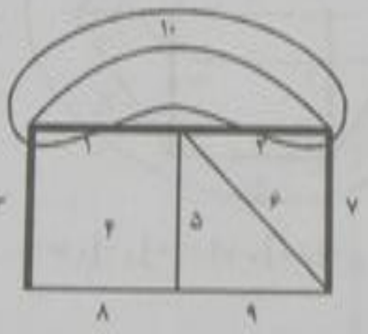


(۳,۴,۵,۶,۷)

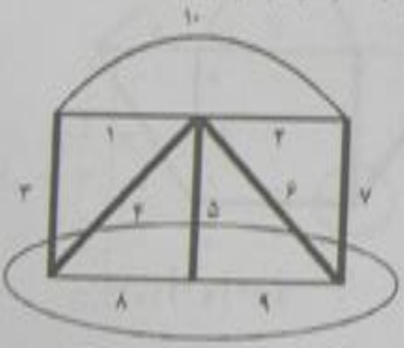


(۲,۳,۴,۵,۶,۱۰)

پ:



(۱,۲,۳,۷)



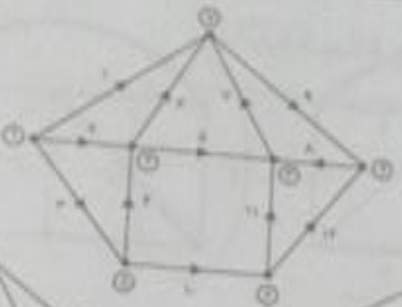
(۳,۴,۵,۶,۷)

۲ـ در گراف شکل (مسألهٔ ۹-۲)

الف - تمام کات‌ست‌هایی را که شامل شاخهٔ ۳ هستند مشخص کرده و معادله آنها را بنویسید.

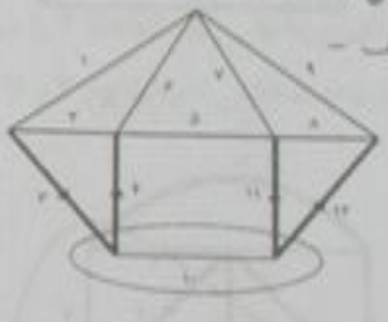
ب - تمام کات‌ست‌هایی را که با حلقه (۱) (۵) (۶) (۴) (۷) (۱) شاخهٔ مشترکی نداشته باشند، مشخص کنید.

پ - چند جریان شاخهٔ مستقل از هم وجود دارد؟ یک دسته از این ولتاژها را مشخص کنید. چند ولتاژ شاخهٔ مستقل از هم وجود دارد، یک دسته از این ولتاژها را مشخص کنید.

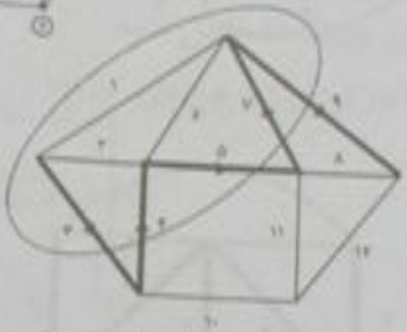


حل)

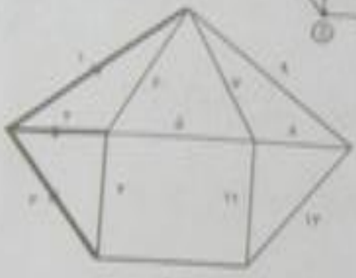
الف -



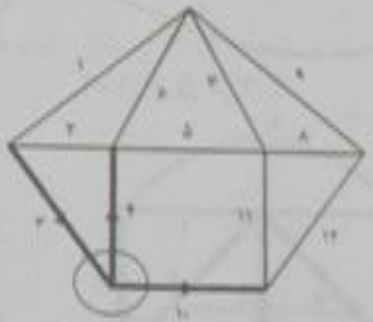
$-J_{۳}+J_{۴}+J_{۱۱}+J_{۱۲}=۰$



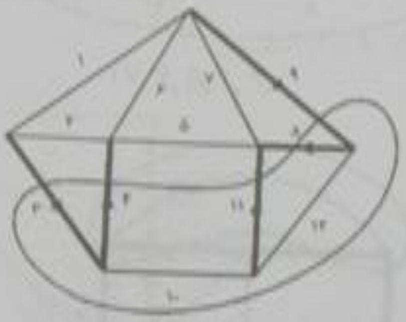
$J_{۳}-J_{۴}+J_{۵}-J_{۷}+J_{۹}=۰$



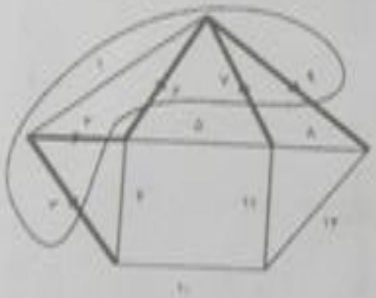
$J_{۱}+J_{۲}+J_{۳}=۰$



$-J_{۳}+J_{۴}+J_{۱۰}=۰$

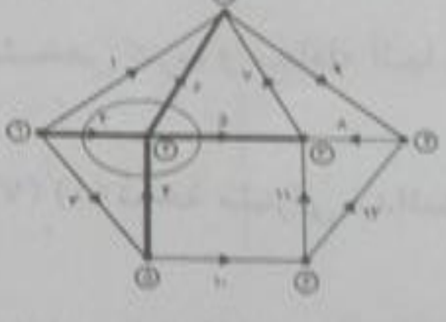


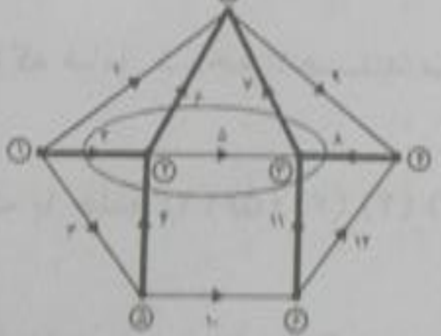
$-J_{۳}+J_{۴}+J_{۱۱}+J_{۸}-J_{۹}=۰$

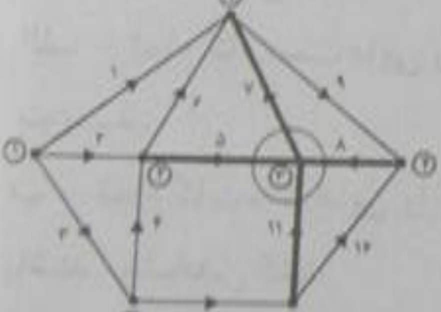


$J_{۳}+J_{۲}-J_{۶}-J_{۷}+J_{۹}=۰$

ب - تمام کات‌ست‌هایی که با حلقه (۱) (۵) (۶) (۴) (۷) (۱) شاخه مشترکی نداشته باشند.







پ -

۶=۱+۷-۱۲ = ۱ + تعداد گره‌ها − تعداد شاخه‌ها = تعداد متغیرهی مستقل جریان شاخه

در فصل ۱ از جلد اول همین کتاب از این فرمول استفاده می‌کردیم ولی حال دلیل آن را اینگونه بیان می‌کنیم که دسته‌ای از جریانهای شاخه‌ها می‌توانند به عنوان متغیر مستقل معرفی شوند که با هم تشکیل کات‌ست ندهند. مثل:

{۱,۲,۸,۷,۱۱}

۶=۱-۷=۱ - تعداد گره‌ها = تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه

در این قسمت هم مانند (بصورت دوگان) متغیرهای مستقل جریان شاخه دسته‌ای از ولتاژهای شاخه‌ها می‌توانند بعنوان متغیر مستقل معرفی شوند که با هم تشکیل حلقه (یا مش) ندهند. مثل:
{۱,۳,۴,۱۰,۱۱,۱۲}

۳ـ برای گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۳)،

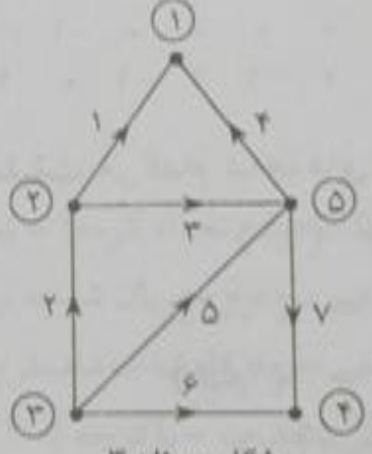
الف - ماتریس تلاقی گره با شاخه را بنویسید.

ب - با قرار دادن گره (۳) به عنوان گره زمین، معادلات KVL را به صورت $V=A^Te$ بنویسید.

پ - تمام کات‌ست‌هایی را مشخص کنید که قبلاً در A_a ظاهر نشده‌اند.

ت - بزرگترین زیر مجموعه‌ای از آنها را انتخاب کنید که به معادلات ناباستهٔ خطی KCL منجر شوند.

حل) الف:



شکل مسئله ۳

$$A_a=\begin{array}{c|ccccccc} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ \hline ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۵ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

به این نکتهٔ مهم در مورد ماتریس تلاقی گره و شاخه توجه کنید که جمع درایه‌های هر ستون از این ماتریس برابر صفر می‌باشد.

ب - توجه شود که در این نوع مسائل که یک گره به عنوان گره زمین معرفی می‌شود A^T همان A_a^T می‌باشد البته با حذف ستون مربوط به آن گره که زمین شده است.

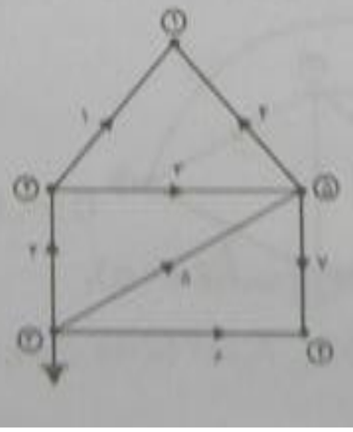
$V_۱=e_۲-e_۱$

$V_۲=e_۳-e_۲=۰-e_۲=-e_۲$

$V_۳=e_۲-e_۵$

$V_۴=e_۵-e_۱$

$V_۵=e_۳-e_۵=۰-e_۵=-e_۵$



$V_{۶}=e_{۳}-e_{۴}=۰-e_{۴}=-e_{۴}$

$V_{۷}=e_{۵}-e_{۴}$

$$\begin{bmatrix} V_{۱} \\ V_{۲} \\ V_{۳} \\ V_{۴} \\ V_{۵} \\ V_{۶} \\ V_{۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{۲}-e_{۱} \\ -e_{۲} \\ e_{۲}-e_{۵} \\ e_{۵}-e_{۱} \\ -e_{۵} \\ -e_{۴} \\ e_{۵}-e_{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_{۱} \\ e_{۲} \\ e_{۴} \\ e_{۵} \end{bmatrix}$$

پ -

$$Ai=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{۱} \\ i_{۲} \\ i_{۳} \\ i_{۴} \\ i_{۵} \\ i_{۶} \\ i_{۷} \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{cases} -i_{۱}-i_{۴}=۰ \\ i_{۱}-i_{۲}+i_{۳}=۰ \\ i_{۲}+i_{۵}+i_{۶}=۰ \\ -i_{۶}-i_{۷}=۰ \\ -i_{۳}+i_{۴}-i_{۵}+i_{۷}=۰ \end{cases}$$

کات‌ست‌هایی که از این طریق بدست آمدند در حقیقت هر کدام شاخه‌های متصل به یک گره هستند.

$-i_{۱}-i_{۴}=۰ \Rightarrow \{۱,۴\}$

$i_{۱}-i_{۲}+i_{۳}=۰ \Rightarrow \{۱,۲,۳\}$

$i_{۲}+i_{۵}+i_{۶}=۰ \Rightarrow \{۲,۵,۶\}$

$-i_{۶}-i_{۷}=۰ \Rightarrow \{۶,۷\}$

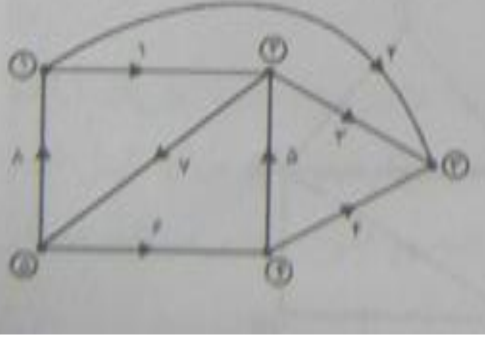
$-i_{۳}+i_{۴}-i_{۵}+i_{۷}=۰ \Rightarrow \{۳,۴,۵,۷\}$

ت - بزرگترین زیر مجموعه‌ای از آنها که به معادلات نابستهٔ خطی KCL منجر شود در حقیقت همان دسته‌ای از متغیرهای مستقل جریان را بیان می‌کند.

۳=۱+۵-۷=۱+ تعداد گره‌ها - تعداد شاخه‌ها = تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه

بعنوان مثال: باید مجموعه گفته شده با هم تشکیل کات‌ست ندهند مثل: $\{۱,۳,۵\}$

۴ـ الف - معادلات جریان زیر برای گراف شکل (مسألهٔ ۹-۴) نوشته شده‌اند. آیا برای توصیف جریانهای این گراف، این معادلات کافی هستند؟ توضیح دهید.



شکل (مسأله ۹ـ۴)

$i_۱+i_۲-i_۸=۰$

$i_۸-i_۷+i_۶=۰$

$i_۴+i_۵-i_۶=۰$

$i_۲+i_۳+i_۴=۰$

ب - اگر معادلات دیگری بصورت زیر بنویسیم جواب قسمت (الف) چیست؟

$i_۱+i_۲-i_۷+i_۶=۰$

$i_۲+i_۳-i_۵+i_۶=۰$

$i_۱-i_۷+i_۵-i_۳=۰$

$i_۸-i_۷+i_۵+i_۴=۰$

الف - همانطور که می‌بینیم چهار معادله روبرو KCL در ۴ گره متفاوت مدار بوده و ۴ معادله از هم مستقل بوده.

KCL در گره (۱) ⇐ $i_۱+i_۲-i_۸=۰$

KCL در گره (۵) ⇐ $i_۸-i_۷+i_۶=۰$

KCL در گره (۴) ⇐ $i_۴+i_۵-i_۶=۰$

KCL در گره (۳) ⇐ $i_۲+i_۳+i_۴=۰$

۴=۱+۵-۸=۱+ تعداد گره‌ها - تعداد شاخه‌ها = تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه و ما به ۴ متغیر مستقل جریان شاخه نیاز داریم و در نتیجه در ۴ معادله بالا فقط ۴ مجهول داریم پس جریان کل شاخه‌ها معلوم می‌شود درنتیجه این معادلات جهت تعیین جریان شاخه‌ها کافی می‌باشد. ب - با توجه به ۴ معادله روبرو به این نتیجه می‌رسیم که از جمع معادله ۲ و ۳ معادله ۱ بدست می‌آید پس ما نمی‌توانیم این ۴ معادله را به عنوان ۴ معادله مستقل معرفی کنیم و این معادلات جهت توصیف جریانهای این گراف کافی نیستند.

$i_۱+i_۲-i_۷+i_۶=۰$ (I)

$i_۲+i_۳-i_۵+i_۶=۰$ (II)

$i_۱-i_۷+i_۵-i_۳=۰$ (III)

$i_۸-i_۷+i_۵+i_۴=۰$ (IV)

$(II)+(III)=i_۲+i_۳-i_۵+i_۶+i_۱-i_۷+i_۵-i_۳=i_۱+i_۲+i_۶-i_۷=(I)$

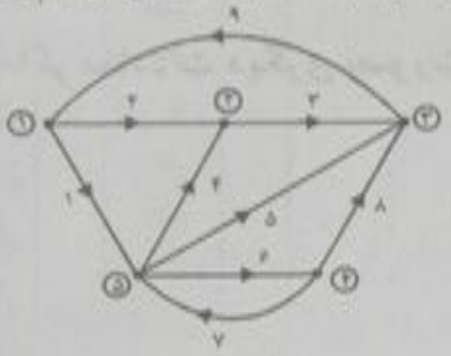
۵- برای گراف شکل (مسألهٔ ۹-۵)،

الف - ماتریس تلاقی گره با شاخه را بنویسید.

ب - گره (۵) را بعنوان گره مبنا انتخاب کنید و ماتریس تلاقی مختصر شده را بنویسید.

پ - با به‌کار بردن ماتریس تلاقی مختصر شده یک دسته معادلات KCL و KVL مستقل از هم بنویسید.

ث - چهار کات‌ست که شاخه‌های آنها به یک گره تنها وصل نباشند و مستقل از هم باشند انتخاب کنید. استقلال خطی آنها را نشان دهید.

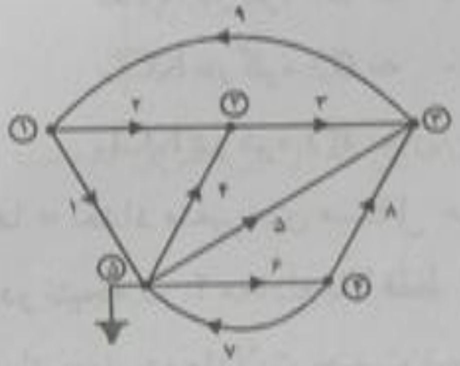


شکل (مسألهٔ ۹-۵)

الف -

$$A_a=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب -



$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پ - برای بدست آوردن معادلات KCL از عبارت $Aj=۰$ استفاده می‌کنیم.

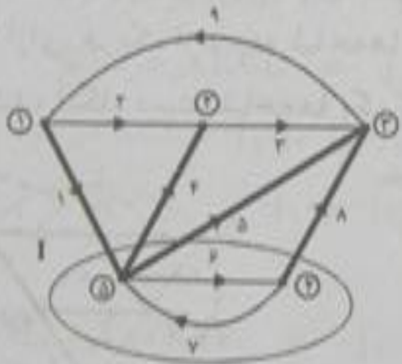
$$Aj=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} j_۱ \\ j_۲ \\ j_۳ \\ j_۴ \\ j_۵ \\ j_۶ \\ j_۷ \\ j_۸ \\ j_۹ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{cases} j_۱+j_۲-j_۹=۰ \\ -j_۲+j_۳-j_۴=۰ \\ -j_۳-j_۵-j_۸+j_۹=۰ \\ -j_۶+j_۷+j_۸=۰ \end{cases}$$

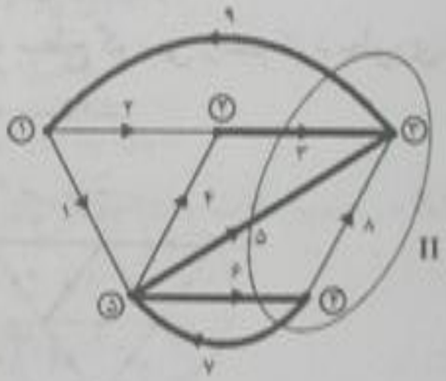
برای بدست آوردن معادلات KVL از عبارت $V=A^Te$ استفاده می‌کنیم.

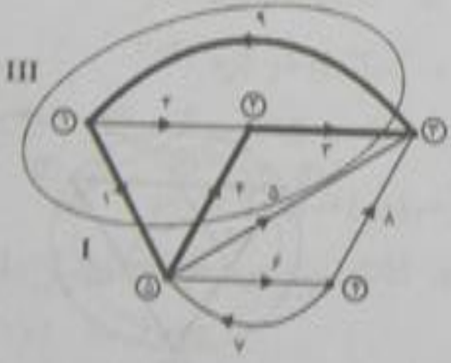
$$V=A^{T}e \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{۱}\\ V_{۲}\\ V_{۳}\\ V_{۴}\\ V_{۵}\\ V_{۶}\\ V_{۷}\\ V_{۸}\\ V_{۹} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & -۱ & ۱\\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e_{۱}\\ e_{۲}\\ e_{۳}\\ e_{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_{۱}=e_{۱}\\ V_{۲}=e_{۱}-e_{۲}\\ V_{۳}=e_{۲}-e_{۳}\\ V_{۴}=-e_{۲}\\ V_{۵}=-e_{۳}\\ V_{۶}=-e_{۴}\\ V_{۷}=e_{۴}\\ V_{۸}=-e_{۳}+e_{۴}\\ V_{۹}=-e_{۱}+e_{۳} \end{cases}$$

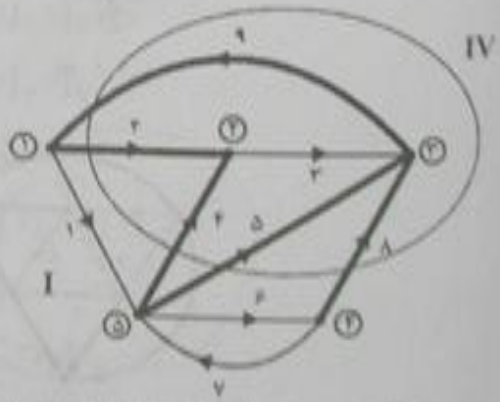
$$\Rightarrow \begin{cases} V_{۱}+V_{۲}-V_{۴}=۰\\ V_{۲}+V_{۳}+V_{۹}=۰\\ V_{۳}+V_{۴}-V_{۵}=۰\\ V_{۶}-V_{۵}+V_{۸}=۰\\ V_{۶}+V_{۷}=۰ \end{cases}$$

ت –









با توجه به کات‌ست‌های نشان داده شده

$\{۱,۴,۵,۸\}, \{۹,۳,۵,۶,۷\}, \{۹,۲,۴,۵,۸\}, \{۹,۳,۴,۱\}$

$$\begin{cases} -J_{۱}+J_{۴}+J_{۵}+J_{۸}=۰ \Rightarrow & \text{KCL در کات‌ست I}\\ -J_{۳}-J_{۵}-J_{۶}+J_{۷}+J_{۹}=۰ \Rightarrow & \text{KCL در کات‌ست II}\\ J_{۱}+J_{۳}-J_{۴}-J_{۹}=۰ \Rightarrow & \text{KCL در کات‌ست III}\\ -J_{۲}-J_{۴}-J_{۵}-J_{۸}+J_{۹}=۰ \Rightarrow & \text{KCL در کات‌ست IV} \end{cases}$$

برای اثبات استقلال خطی ۴ معادله بالا فقط به این موضوع بسنده می‌کنیم که هیچ کدام یک از معادلات را نمی‌توانیم از ترکیب خطی بقیه معادلات بدست آوریم.

۶ـ در گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۶):

شکل (مسألهٔ ۹-۶)

الف - نشان دهید که هر یک از دسته شاخه‌های زیر یک کات‌ست می‌باشند:

{۱،۲،۴،۶،۷،۹} ، {۱،۲،۴،۵}

{۲،۶،۸،۹،۱۰،۱۱} ، {۱،۲،۳،۶،۸،۹}

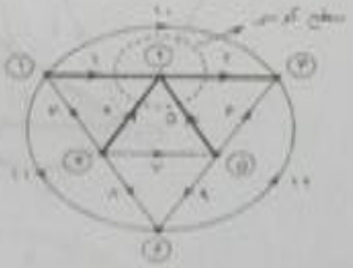
{۸،۹،۱۱،۱۲}

ب - معادلات KCL هر کات‌ست را بنویسید و هر یک از آنها را برحسب ترکیب خطی از معادلات گره مناسب بیان کنید.

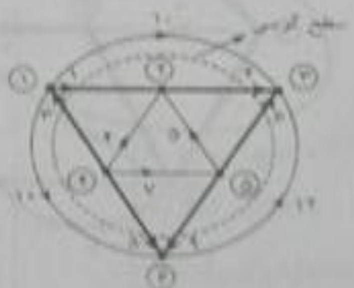
پ - ثابت کنید این کات‌ست‌ها نسبت به هم مستقل خطی هستند.

حل) الف ـ اگر بتوان به ازای هریک از دسته شاخه‌ها یک سطح گوسی رسم کرد بطوری که فقط دسته شاخه‌ها را قطع کند، آنگاه دسته شاخه‌ها یک کات ست‌اند.

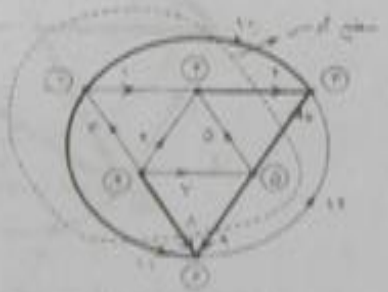
{۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۹}



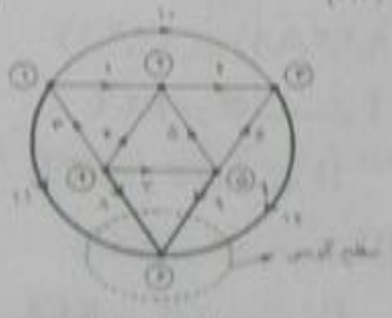
{۱، ۲، ۴، ۵}



{۱، ۲، ۳، ۶، ۸، ۹}



{۲، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱}



{۸، ۹، ۱۱، ۱۲}

حل ب)

{۱,۲,۴,۵} ⇒ $-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}=۰$

{۱,۲,۴,۶,۷,۹} ⇒ $-j_{۱}+j_{۲}-j_{۴}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=۰$

{۱,۲,۳,۶,۸,۹} ⇒ $-j_{۱}+j_{۲}+j_{۳}+j_{۶}+j_{۸}+j_{۹}=۰$

{۲,۶,۸,۹,۱۰,۱۱} ⇒ $j_{۲}+j_{۶}+j_{۸}+j_{۹}+j_{۱۰}+j_{۱۱}=۰$

{۸,۹,۱۱,۱۲} ⇒ $-j_{۸}-j_{۹}-j_{۱۱}+j_{۱۲}=۰$

تا اینجا KCL را برای هر کات‌ست نوشتیم، حال می‌خواهیم نشان دهیم معادلات KCL هر کات‌ست را می‌توان برحسب ترکیب خطی از معادلات گره نوشت.

{۱,۲,۴,۵}: ⇒ KCL در گره (۲) ⇒ $-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}=۰$

پس ثابت شد که KCL در این کات‌ست همان KCL گره (۲) می‌باشد.

{۱,۲,۴,۶,۷,۹}: ⇒

KCL در گره (۲) ⇒ $-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}=۰$

KCL در گره (۵) ⇒ $j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=۰$

KCL در گره (۲) + KCL در گره (۵) $=-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}+j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=$

KCL در همین کات‌ست $=-j_{۱}+j_{۲}-j_{۴}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}$

{۱,۲,۳,۶,۸,۹}: ⇒

KCL در گره (۲) ⇒ $-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}=۰$

KCL در گره (۴) ⇒ $j_{۴}+j_{۳}+j_{۷}+j_{۸}=۰$

KCL در گره (۵) ⇒ $j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=۰$

KCL در گره (۲) + KCL در گره (۴) + KCL در گره (۵) =

$-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}+j_{۴}+j_{۳}+j_{۷}+j_{۸}+j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=۰$

KCL در کات‌ست مربوطه $=-j_{۱}+j_{۲}+j_{۳}+j_{۶}+j_{۸}+j_{۹}=$

{۲,۶,۸,۹,۱۰,۱۱}: ⇒

KCL در گره (۱) ⇒ $j_{۱}-j_{۳}+j_{۱۰}+j_{۱۱}=۰$

KCL در گره (۲) ⇒ $-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}=۰$

KCL در گره (۴) ⇒ $j_{۳}+j_{۴}+j_{۷}+j_{۸}=۰$

KCL در گره (۵) ⇒ $j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=۰$

KCL در گره (۱) + KCL در گره (۲) + KCL در گره (۴) + KCL در گره (۵) =

$j_{۱}-j_{۳}+j_{۱۰}+j_{۱۱}-j_{۱}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۲}+j_{۳}+j_{۴}+j_{۷}+j_{۸}+j_{۵}+j_{۶}-j_{۷}+j_{۹}=$

KCL در کات‌ست مربوطه $= j_۲+j_۶+j_۸+j_۹+j_{۱۰}+j_{۱۱}$

$\{۸,۹,۱۱,۱۲\}:$ ⇒ KCL در گره (۶) ⇒ $-j_۸-j_۹-j_{۱۱}+j_{۱۲}=۰$

KCL در این کات‌ست همان KCL گره (۶) می‌باشد.

در حل قسمت ب این مسئله به این نتیجه می‌رسیم که KCL در هر کات‌ست را می‌توان برحسب ترکیب خطی از KCL گره‌های داخل آن کات‌ست نوشت. مثلاً کات‌ست $\{۲,۶,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ شامل گره‌های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) بوده و KCL این کات‌ست ترکیبی خطی از KCL گره‌های (۱) و (۲) و (۴) و (۵) می‌باشد.

پ: برای اثبات استقلال خطی کات‌ست‌های بیان شده همین کافی است که ما نمی‌توانیم هیچکدام از آنها را بصورت ترکیبی خطی از بقیه بدست بیاوریم.

۷ـ گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۶).

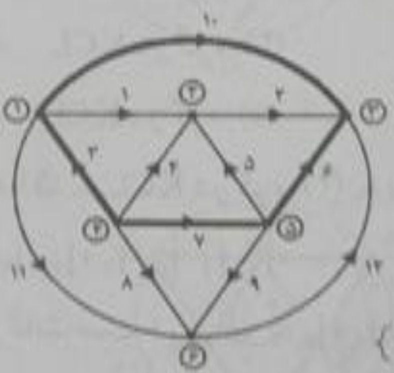
الف - نشان دهید که هر یک از دسته شاخه‌های زیر یک حلقه هستند:

$\{۱,۳,۵,۷\}$, $\{۲,۳,۵,۷,۱۰\}$, $\{۴,۵,۷\}$, $\{۳,۶,۷,۱۰\}$, $\{۳,۷,۹,۱۰,۱۲\}$

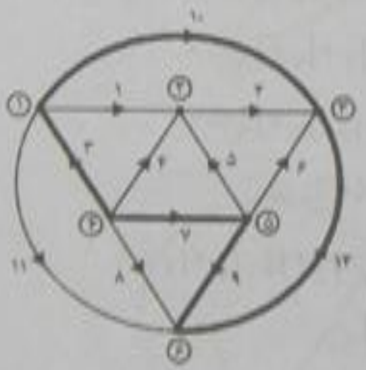
$\{۳,۸,۱۰,۱۲\}$, $\{۱۰,۱۱,۱۲\}$

ب - ثابت کنید این حلقه‌ها نسبت به هم مستقل خطی هستند.

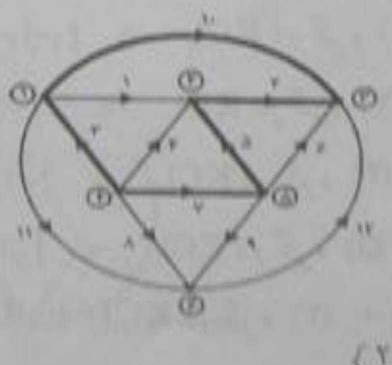
الف -



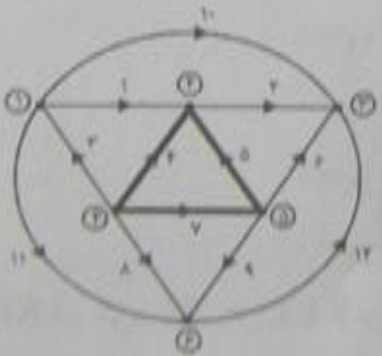
$\{۳,۶,۷,۱۰\}$



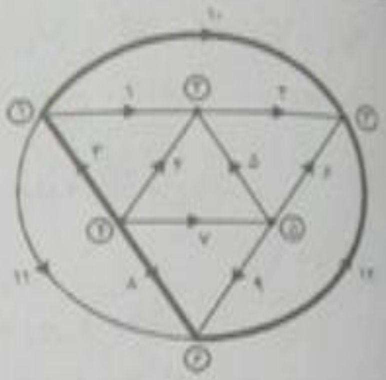
$\{۳,۷,۹,۱۰,۱۲\}$



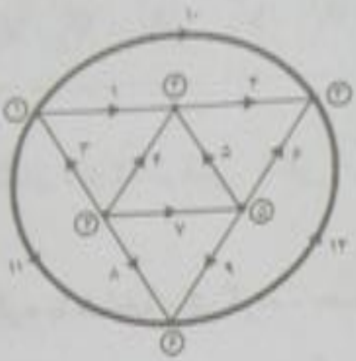
$\{۲,۳,۵,۷,۱۰\}$



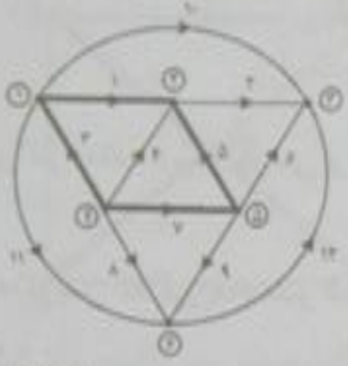
$\{۴,۵,۷\}$



{۳,۸,۱۰,۱۲}



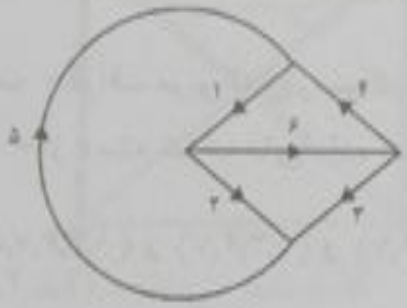
{۱۰,۱۱,۱۲}



{۱,۳,۵,۷}

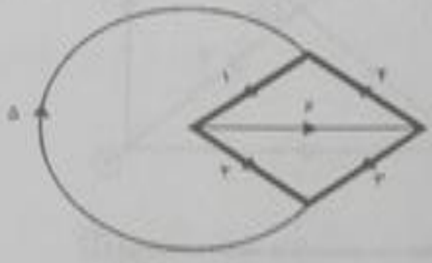
ب - برای نشان دادن استقلال حلقه‌ها باید نشان داد که هیچ کدام از حلقه‌ها از ترکیب حلقه‌های دیگر بدست نمی‌آید که در اینجا همین طور می‌باشد.

۸ـ نشان دهید که دسته معادلات:
$V_۱+V_۶+V_۳+V_۵=۰$
$V_۱+V_۲-V_۳+V_۴=۰$
$V_۲+V_۵-V_۴-V_۶=۰$

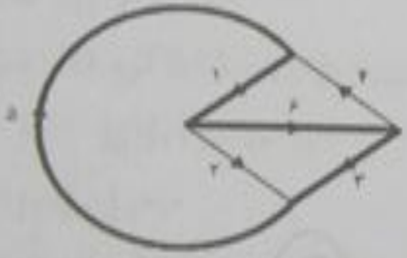


شکل (مسألهٔ ۹-۸)

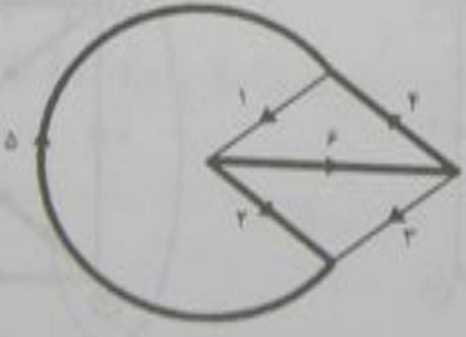
معادلات حلقهٔ مستقل از هم گراف نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۸) است و هر معادلهٔ حلقهٔ دیگر از ترکیب خطی این معادلات قابل بدست آوردن است.



$V_۴+V_۱+V_۲-V_۳=۰$



$V_۱+V_۶+V_۳+V_۵=۰$



$V_۲+V_۵-V_۴-V_۶=۰$

برای نشان دادن اینکه هر معادلهٔ حلقه دیگر از ترکیب خطی این معادلات بدست می‌آید با یک مثال شروع می‌کنیم.

$\{۱,۴,۶\} \Rightarrow V_۱+V_۴+V_۶=۰$

$$\frac{۱}{۲}\left[\underbrace{V_{۱}+V_{۴}+\cancel{V_{۳}}+\cancel{V_{۵}}}+\underbrace{V_{۴}+V_{۱}+\cancel{V_{۲}}-\cancel{V_{۳}}}-\underbrace{(\cancel{V_{۲}}+\cancel{V_{۵}}-V_{۴}-V_{۶})}\right]^{۲}$$

برای هر حلقه دیگر نیز می‌توان نشان داد که ترکیبی خطی از سه حلقه بالا می‌باشد.

$V_{۱}+V_{۴}+V_{۶}$

۹ـ ماتریس تلاقی مختصر شدهٔ گره با شاخهٔ یک گراف بصورت زیر داده شده است:

$$A=\begin{array}{c} \text{شاخه} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & \text{گره} \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & (۱) \\ -۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & (۲) \\ ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & (۳) \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & -۱ & (۴) \end{array}$$

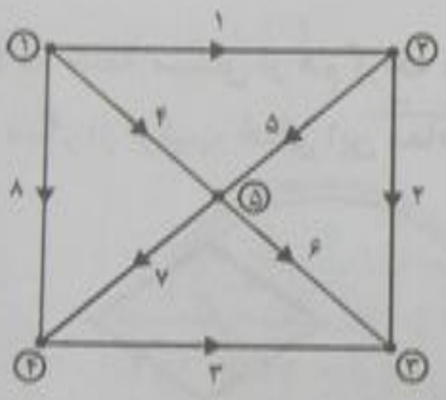
الف - گراف مربوطه را رسم کنید.

ب - از دسته شاخه‌های داده شدهٔ زیر کدام یک کات‌ست تشکیل می‌دهند.

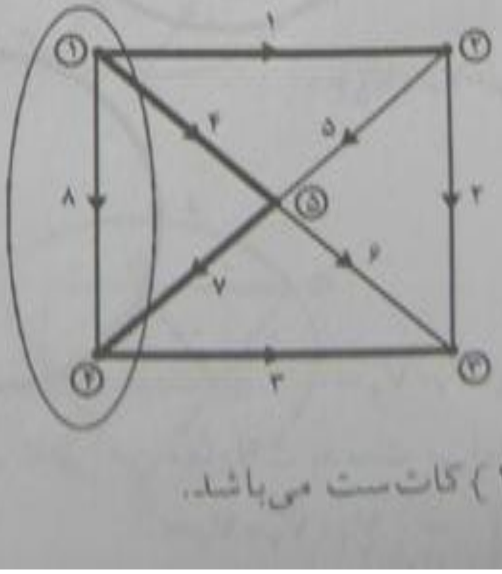
{۱,۳,۲,۷,۵} و {۱,۳,۴,۷} و {۱,۴,۶,۷} و {۴,۵,۶,۳,۸} و {۲,۴,۵,۸} و {۱,۳,۵,۶}.

پ - معادلات KCL مربوط به کات‌ست‌ها را بنویسید و آنها را برحسب ترکیب خطی از معادلات گره مناسب بیان کنید.

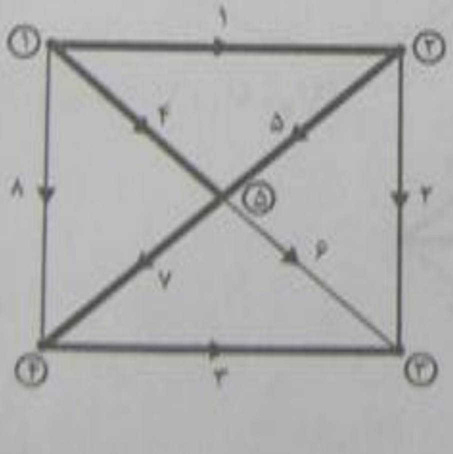
حل الف)



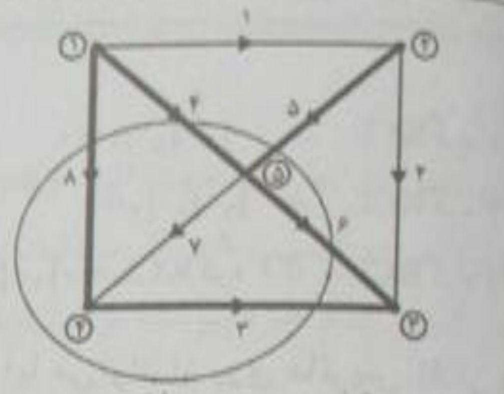
حل ب)



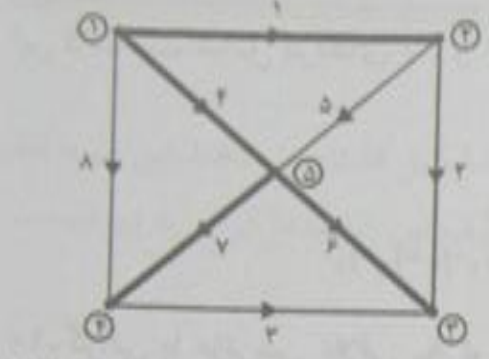
{۱,۳,۴,۷} کات‌ست می‌باشد.



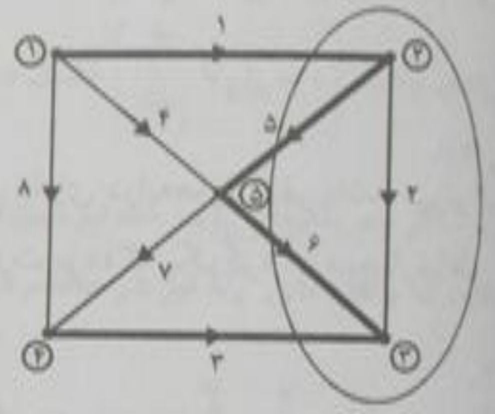
{۱,۳,۴,۷,۵} کات‌ست نمی‌باشد.



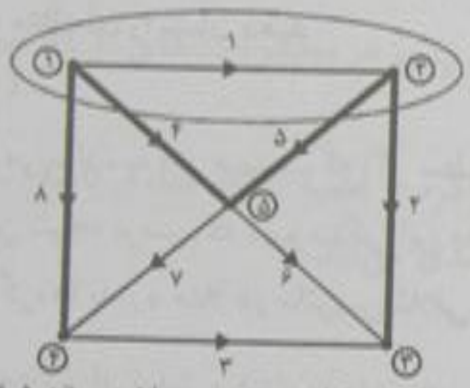
{۴,۵,۶,۳,۸} کات‌ست می‌باشد.



{۱,۴,۶,۷} کات‌ست نمی‌باشد.



{۱,۳,۵,۶} کات‌ست می‌باشد.



{۲,۴,۵,۸} کات‌ست می‌باشد.

{۱,۳,۴,۷} ⇒ $j_{۱}+j_{۴}-j_{۷}+j_{۳}=۰$

حل پ)

این کات‌ست شامل گره‌های (۱) و (۴) می‌باشد.

(۱) گره KCL ⇒ $j_{۱}+j_{۴}+j_{۸}=۰$

(۴) گره KCL ⇒ $-j_{۸}-j_{۷}+j_{۳}=۰$

(۱) گره KCL + (۴) گره KCL $=j_{۱}+j_{۴}+j_{۸}-j_{۸}-j_{۷}+j_{۳}=j_{۱}+j_{۳}+j_{۴}-j_{۷}$

{۴,۵,۶,۳.۸} ⇒ $-j_{۵}-j_{۴}+j_{۶}+j_{۳}-j_{۸}=۰$

(۴) گره KCL : $j_{۳}-j_{۷}-j_{۸}=۰$

(۵) گره KCL : $-j_{۵}+j_{۶}-j_{۴}+j_{۷}=۰$

(۵) گره KCL + (۴) گره KCL $=j_{۳}-j_{۷}-j_{۸}+j_{۶}-j_{۵}-j_{۴}+j_{۷}=j_{۳}-j_{۴}-j_{۵}+j_{۶}-j_{۸}$

{۲,۴,۵,۸} ⇒ $j_{۴}+j_{۸}+j_{۵}-j_{۲}=۰$

این کات‌ست شامل گره‌های (۱) و (۲) می‌باشد.

(۱) گره KCL ⇒ $j_{۱}+j_{۴}+j_{۸}=۰$

(۲) گره KCL ⇒ $-j_{۱}+j_{۵}-j_{۲}=۰$

(۱) گره KCL + (۲) گره KCL $=j_{۱}+j_{۴}+j_{۸}-j_{۱}+j_{۵}-j_{۲}=j_{۴}+j_{۵}+j_{۸}-j_{۲}$

{۱,۳,۵,۶} ⇒ $-j_{۱}+j_{۵}-j_{۶}-j_{۳}=۰$

این کات‌ست شامل گره‌های (۲) و (۳) می‌باشد.

KCL گره (۲) $\Rightarrow -j_1+j_5-j_2=0$

KCL گره (۳) $\Rightarrow j_2-j_6-j_3=0$

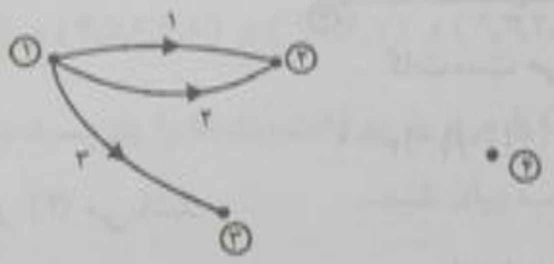
KCL گره (۲) + KCL گره (۳) $= -j_1+j_5-j_2+j_2-j_6-j_3=-j_1-j_3+j_5-j_6$

۱۰ـ گرافی با ماتریس تلاقی A_a توصیف شده است. آیا می‌توان از روی ماتریس تلاقی در مورد پیوستگی گراف یا ناپیوستگی آن مطلبی بیان کرد؟ مطلب مورد توجه را بیان کنید و با یک مثال آن را نشان دهید.

حل)

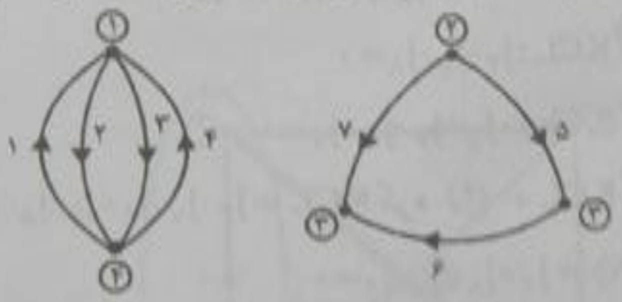
بله. می‌توان، به این صورت که اگر سطری از این ماتریس دارای درایه‌های صفر باشد می‌توانیم به این نتیجه برسیم که ناپیوستگی این ماتریس به این صورت بوده که یک گره آن هیچ ارتباطی با بقیه گره‌ها ندارد مثلاً در ماتریس تلاقی زیر:

$$A_a=\begin{array}{c}\\(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}1&2&3\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc}1&1&1\\-1&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{array}\right]\end{array}\Rightarrow$$

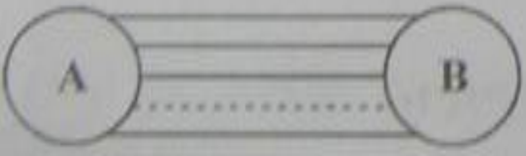


و البته صفر بودن قسمتی از یک سطر به معنی عدم ارتباط شاخه‌های آن قسمت به گره است پس اگر درایه‌های مربوط به چند ستون مشابه همگی صفر باشند آنگاه گره‌های مربوط به آن ستونها از گراف مجزا بوده و گراف ناپیوسته خواهد بود. مثلاً:

$$A_a=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\end{array}\left[\begin{array}{ccccccc}-1&1&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&-1&-1\\1&-1&-1&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0\end{array}\right]$$



۱۱ـ گره‌های یک گراف را به دو دستهٔ A و B تقسیم کرده و کلیهٔ شاخه‌هایی که مجموعهٔ گره‌های A و B را به هم وصل می‌کنند مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۱۱) در نظر می‌گیریم. تحت چه شرایطی این شاخه‌ها یک کات‌ست تشکیل می‌دهند؟



شکل (مسألهٔ ۹-۱۱)

حل)

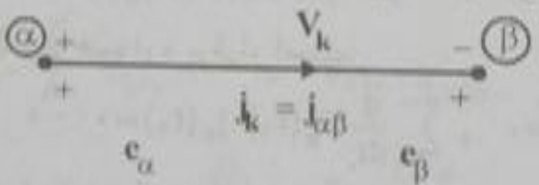
برای یافتن شرایط لازم جهت این موضوع که این شاخه‌ها تشکیل کات‌ست دهند این می‌باشد که اولاً هر دو قسمت A و B خودشان پیوسته بوده تا با حذف این شاخه‌ها گراف به دو قسمت مجزا که هر کدام خود پیوسته بوده تبدیل شود.

۱۲ـ الف - اگر ولتاژهای V_k در محدودیت‌های KVL صدق کرده و قضیه تلگان صادق باشد $\left[\sum_{k=1}^{b} V_k j_k = 0\right]$ نشان دهید که جریانهای i_k نیز در محدودیت‌های KCL صدق می‌کند.

ب - اگر جریانهای j_k در محدودیت‌های KCL صدق کرد. و قضیه تلگان صادق باشد، نشان دهید که ولتاژهای V_k نیز در محدودیت‌های KVL صدق می‌کند.

حل)

الف - فرض می‌کنیم گراف پیوسته بوده و شاخه‌های موازی نداشته باشد و شامل b شاخه و n_t گره باشد. گره (۱) را به عنوان مبنا انتخاب می‌کنیم بنابراین $e_1 = 0$ می‌باشد فرض کنیم شاخه k، گره α را به گره β مطابق شکل زیر متصل کند.



$$V_k j_k = [e_\alpha - e_\beta]\, j_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad V_k j_k = \frac{1}{2}\left[[e_\alpha - e_\beta]\, j_{\alpha\beta} + [e_\beta - e_\alpha]\, j_{\beta\alpha}\right]$$

$$V_k j_k = [e_\beta - e_\alpha]\, j_{\beta\alpha}$$

می‌دانیم که $j_{\alpha\beta} = -j_{\beta\alpha}$ پس اگر رابطه فوق را برای تمام شاخه‌ها نوشته و با هم جمع کنیم خواهیم داشت.

$$\sum_{k=1}^{b} V_k j_K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n_1} e_\alpha \left[\sum_{\beta=1}^{n_1} j_{\alpha\beta}\right] - \frac{1}{2}\sum_{\beta=0}^{n_1} e_\beta \left[\sum_{\alpha=1}^{n_1} j_{\alpha\beta}\right]$$

حال اگر قضیه تلگان برقرار باشد، $\sum_{k=0}^{b} V_k j_k = 0$ و اگر V_kها در محدودیت‌های KVL صدق کنند پس:

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n_1} e_\alpha \left[\sum_{\beta=1}^{n_1} j_{\alpha\beta}\right] - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n_1} e_\beta \left[\sum_{\alpha=1}^{n_1} j_{\alpha\beta}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n_1} j_{\alpha\beta}=\sum_{\beta=1}^{n_1}\sum_{\alpha=1}^{n_1}=0$$

عبارت آخر نشان دهنده این موضوع می‌باشد که جمع جبری جریانهای تمام گره‌ها برابر صفر است و یا اینکه جریان شاخه‌ها در محدودیت‌های KCL صدق می‌کنند. حال به شرط اولیه‌ای که قرار دادیم نگاه می‌کنیم، اگر شاخه‌های موازی وجود داشته باشد آنها را فقط با یک شاخه که جریان آن برابر مجموع جریان آن شاخه‌ها باشد در نظر می‌گیریم و اگر چند جزء جدا از هم وجود داشته باشد عبارات فوق نشان می‌دهد که محدودیت‌های KCL برای هر جزء آن صادق است. پس برای گراف کلی نیز صادق است.

ب - مانند قسمت (الف) با برقراری قضیه تلگان رابطه (۱) برقرار بوده و اگر محدودیتهای KCL برقرار باشد داریم.

$$\sum_{\alpha=1}^{n_1}\sum_{\beta=1}^{n_1}\left[e_{\alpha}-e_{\beta}\right]=0$$

پس به ازای هر حلقه در مدار محدودیتهای KVL صادق خواهد بود.

۱۳ـ فرض کنید دسته متغیرهای ولتاژ شاخه $V_1(t), V_2(t), ..., V_b(t)$ کلیه محدودیتهای KVL و دسته متغیرهای جریان شاخه $j_1(t), j_2(t), ..., j_b(t)$ کلیهٔ محدودیت‌های KCL را برآورده سازند. نشان دهید که روابط زیر همواره برقرار است:

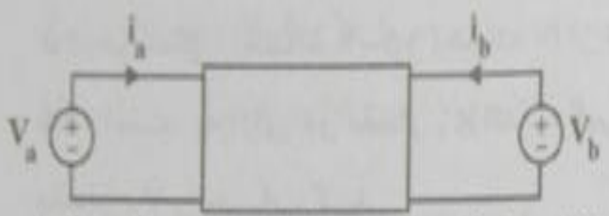
$$\sum_{k=1}^{b} V_k(t_1)\ .\ \frac{d}{dt}j_k(t_2)=0\ ,\ \sum_{k=1}^{b}\frac{d}{dt}V_k(t_1).j_k(t_2)=0$$

حل)

همانطور که می‌دانیم محدودیتهای KVL و KCL، معادلاتی خطی با ضرایب حقیقی می‌باشند لذا می‌توان از آنها مشتق گرفته و بنابراین برای دسته متغیرهای $\frac{dV_1(t)}{dt}, \frac{dV_2(t)}{dt}, ..., \frac{dV_b(t)}{dt}$ کلیه محدودیت‌های KVL و برای دسته متغیرهای $\frac{dj_1(t)}{dt}, \frac{dj_2(t)}{dt}, ..., \frac{dj_b(t)}{dt}$ کلیه محدودیت‌های KCL برقرار است و لذا بنا به قضیه تلگان:

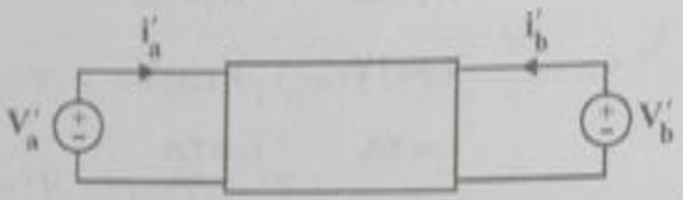
$$\sum_{k=1}^{b} V_k(t_1).\frac{d}{dt}j_k(t_2)=0\ ,\ \sum_{k=1}^{b}\frac{d}{dt}V_k(t_1).j_k(t_2)=0$$

۱۴ـ الف - فرض کنید که یک دو قطبی باشد که از به هم پیوستن تعداد دلخواهی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده باشد. دو آزمایش زیر را در نظر بگیرید.



آزمایش ۱: دو منبع ولتاژ V_a و V_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i_a و i_b را اندازه می‌گیریم.

آزمایش ۲: دو منبع ولتاژ V'_a و V'_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i'_a و i'_b را اندازه می‌گیریم.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۴)

ثابت کنید این دو دسته اندازه گیری‌ها به صورت زیر به هم مربوط هستند.

$$V_a i'_a + V_b i'_b = V'_a i_a + V'_b i_b$$

ب - اگر $V_b = V'_a = ۰$ ، $V_a = V'_b$ باشد چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت:

حل)

الف - با توجه به قضیه تلگان داریم.

$$\sum_{k=۱}^{b} V'_k j_k = \sum_{k=۱}^{b} V_k j'_k$$

اگر شبکه‌ها از N شاخه تشکیل شده باشد داریم:

$$a) \sum_{k=۱}^{b} V'_K j_k = V'_a j_a + V'_b j_b - \sum_{k=۱}^{N} V'_k j_k = ۰ \Rightarrow V'_a j_a + V'_b j_b = \sum_{k=۱}^{N} V'_k j_k$$

$$\Rightarrow V'_a j_a + V'_b j_b = \sum_{k=۱/}^{N} [R_k j_k][j_k] = \sum_{k=۱/}^{N} R_k j_k^{۲}$$

از طرفی دیگر،

$$b) \sum_{k=۱}^{b} V_k j'_k = V_a j'_a + V_b j'_b - \sum_{k=۱}^{N} V_k j'_k = ۰ \Rightarrow V_a j'_a + V_b j'_b = \sum_{k=۱}^{N} V_k j'_k$$

$$\Rightarrow V_a j'_a + V_b j'_b = \sum_{k=۱}^{N} V_k \left[\frac{V_k}{R}\right] = \sum_{k=۱}^{N} \frac{V_k^{۲}}{R} = \sum_{k=۱}^{N} \frac{[R j_k]^{۲}}{R} = \sum_{k=۱}^{N} R_k j_k^{۲}$$

⇐ از a و b نتیجه می‌گیریم ⇐ $V'_a j_a + V'_b j_b = V_a j'_a + V_b j'_b$

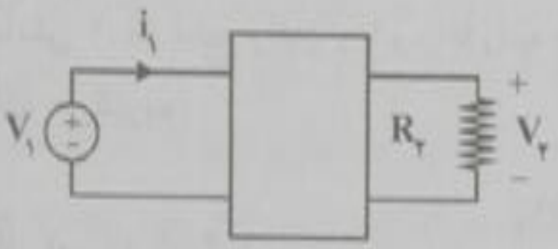
ب -

$$V_b = V'_a = ۰ \quad , \quad V_a = V'_b \Rightarrow ۰ \times j_a + V_a j_b = V_a j'_a + ۰ \times j'_b \Rightarrow$$

$$j_b = j'_a$$

۱۵ـ در شکل (مسألهٔ ۹-۱۵) شبکه N از تعدادی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. به ازای دو مقدار $R_۲$ اندازه‌گیری‌های زیر به دست آمده است. مقدار $\hat{V}_۲$ را حساب کنید.

$R_۲=۸\Omega$	$R_۲=۵\Omega$
$\hat{V}_۱=۷V$	$V_۱=۴V$
$\hat{i}_۱=۳A$	$i_۱=۲A$
$\hat{V}_۲=?\ V$	$V_۲=۳V$



شکل (مسألهٔ ۹-۱۵)

حل)

$$\hat{V}_۱ j_۱+\hat{V}_۲ j_۲=V_۱\hat{j}_۱+V_۲\hat{j}_۲$$

$$j_۱=i_۱=۲$$

$$j_۲=-i_۲=-\frac{V_۲}{R_۲}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\hat{j}_۱=\hat{i}_۱=۳$$

$$\hat{j}_۲=-\hat{i}_۲=-\frac{\hat{V}_۲}{R_۲}=-\frac{\hat{V}_۲}{۸}$$

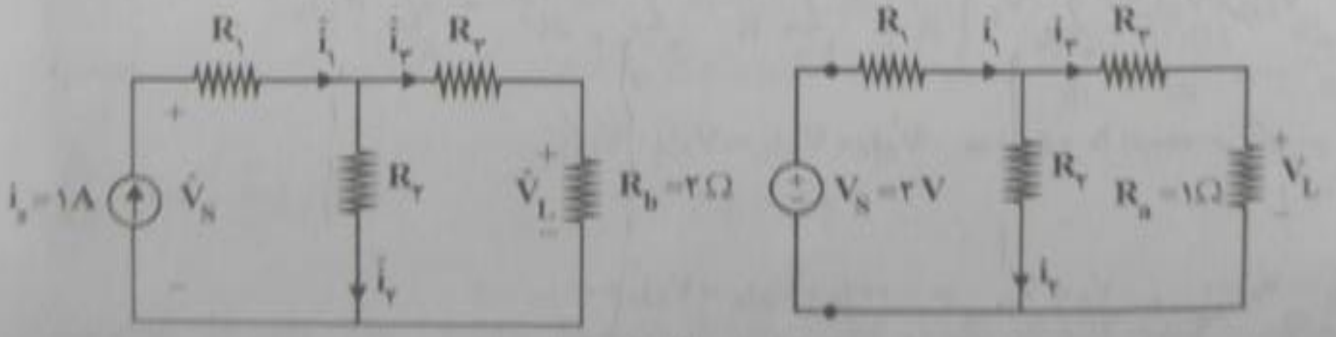
$$۷\times۲+\hat{V}_۲\times\left[-\frac{۳}{۵}\right]=۴\times۳+۳\times\left[-\frac{\hat{V}_۲}{۸}\right]$$

$$۱۴-۱۲=\hat{V}_۲\left[\frac{۳}{۵}-\frac{۳}{۸}\right]=\frac{۹\hat{V}_۲}{۴۰}\Rightarrow\hat{V}_۲=\frac{۸۰}{۹}V$$

۱۶ـ فرض کنید در مدارهای شکل (مسألهٔ ۹-۱۶) V_k و i_k ولتاژ شاخه و جریان شاخهٔ مدار شکل (الف) و $\hat{V}_k$ و $\hat{i}_k$ ولتاژ شاخه و جریان شاخهٔ مدار شکل (ب) باشند. اندازه‌گیری‌های زیر بدست آمده است:

$i_۱=۱A$, $V_L=۲V$, $\hat{V}_S=۳V$

به فرض اینکه مقاومتهای مجهول $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ مقاومتهای خطی باشند، با استفاده از قضیهٔ تلگان $\hat{V}_L$ را تعیین کنید.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۶)

حل)

$$\hat{V}_S i_S+\hat{V}_L i_L=V_S\hat{i}_S+V_L\hat{i}_L$$

$$V_S=۲\ ,\ i_S=i_۱=۱A\ ,\ V_L=۲V\ ,\ i_L=-\frac{V_L}{R_a}=-\frac{۲}{۱}=-۲A$$

$$\hat{V}_S=۳\ ,\ \hat{i}_S=۱\ ,\ \hat{V}_L=?\ ,\ \hat{i}_L=-\frac{\hat{V}_L}{R_b}=-\frac{\hat{V}_L}{۲}$$

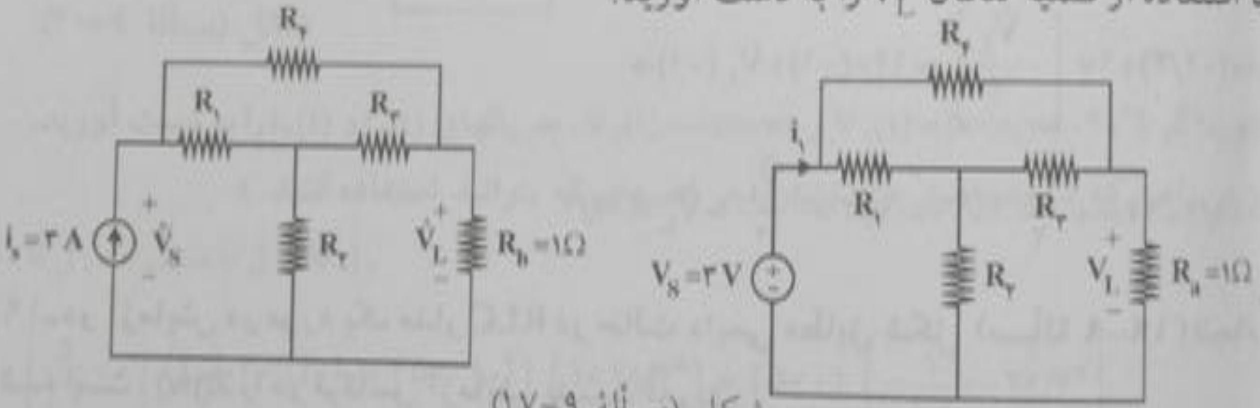
$$V_S\hat{i}_S+V_L\hat{i}_L=\hat{V}_S i_S+\hat{V}_L i_L\Rightarrow ۲\times ۱+۲\times\left[\frac{-\hat{V}_L}{۲}\right]=۳\times ۱+\hat{V}_L\times(-۲)\Rightarrow$$

$$۳-۲=۲\hat{V}_L-\hat{V}_L\Rightarrow\hat{V}_L=۱V$$

۱۷ـ در مدارهای شکل (مسألهٔ ۹–۱۷) V_k و i_k ولتاژ و جریان شاخهٔ k ام مدار شکل (الف) و $\hat{V}_k$ و $\hat{i}_K$ ولتاژ و جریان شاخهٔ k ام مدار شکل (ب) هستند. اندازه‌گیری‌های زیر به دست آمده است:

$$i_۱=۲A\ ,\ V_L=۲V\ ,\ \hat{V}_S=۳V$$

با استفاده از قضیه تلگان $\hat{V}_L$ را به دست آورید.



شکل (مسألهٔ ۹–۱۷)

حل)

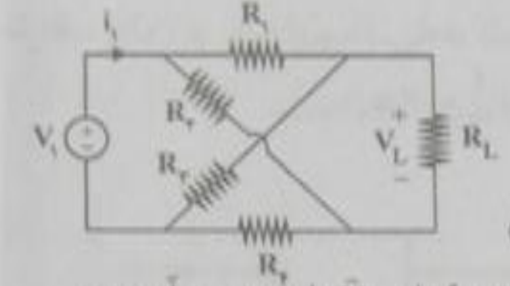
$$V_S=۳V\ ,\ i_S=i_۱=۲A\ ,\ V_L=۲V\ ,\ i_L=\frac{-V_L}{R_a}=-\frac{۲}{۱}=-۲A$$

$$\hat{V}_S=۳V\ ,\ \hat{i}_S=۳A\ ,\ \hat{V}_L=?\ ,\ \hat{i}_L=-\frac{\hat{V}_L}{R_b}=-\frac{\hat{V}_L}{۲}$$

$$\hat{V}_S i_S+\hat{V}_L i_L=V_S\hat{i}_S+V_L\hat{i}_L\Rightarrow$$

$$۳\times ۲+\hat{V}_L\times(-۲)=۳\times ۳+۲\times\left[-\frac{\hat{V}_L}{۲}\right]\Rightarrow ۹-۶=-\hat{V}_L\Rightarrow\hat{V}_L=-۳V$$

۱۸ـ در مدار شکل نشان داده شده در شکل (مسألهٔ ۹–۱۸) دو دسته اندازه‌گیری به شرح زیر انجام گرفته است:



برای $R_L=۲\Omega$، $V_1=۸V$ و $i_1=-۲A$ و $V_L=۲V$

برای $R_L=۴\Omega$، $\hat{V}_1=۱۲V$ و $\hat{i}_1=-۲/۴A$

شکل (مسألهٔ ۹-۱۸)

با فرض اینکه R_1، R_2، R_3 و R_4 مقاومتهای خطی هستند مقدار $\hat{V}_L$ را به‌دست آورید.

حل)

$$V_1=۸V \quad , \quad i_1=-۲A \quad , \quad V_L=۲V \quad , \quad i_L=-\frac{V_L}{R_L}=-\frac{۲}{۲}=-۱A$$

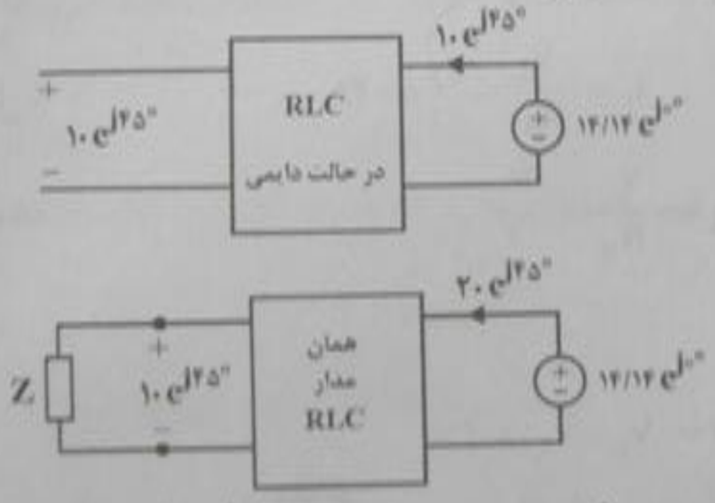
$$\hat{V}_1=۱۲V \quad , \quad \hat{i}_1=-۲/۴A \quad , \quad \hat{V}_L=? \quad , \quad \hat{i}_L=-\frac{\hat{V}_L}{\hat{R}_L}=-\frac{\hat{V}_L}{۴}$$

$$V_1\hat{i}_1+V_L\hat{i}_L=\hat{V}_1 i_L+\hat{V}_L i_L$$

$$۸\times(-۲/۴)+۲\times\left[-\frac{\hat{V}_L}{۴}\right]=۱۲\times(-۱)+\hat{V}_L(-۱)\Rightarrow$$

$$-۱۹/۲+۱۲=+\frac{\hat{V}_L}{۲}-\hat{V}_L\Rightarrow-۷/۲=-\frac{\hat{V}_L}{۲}\Rightarrow\hat{V}_L=۱۴/۴$$

۱۹ـ دو آزمایش در مورد یک مدار RLC در حالت دایمی مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۱۹) انجام شده است. $Z(jw)$ را در فرکانس آزمایش بدست آورید.



شکل (مسألهٔ ۹-۱۹)

حل)

$$V_1=۱۰e^{j۴۵°}, \quad \hat{I}_1=۰ \quad , \quad V_۲=۱۴/۱۴e^{j۰°} \quad , \quad I_۲=-۱۰e^{j۴۵°}$$

$$\hat{V}_1=۱۰e^{j۴۵°} \quad , \quad \hat{I}_1=\frac{\hat{V}_1}{Z}=\frac{۱۰e^{j۴۵°}}{Z} \quad , \quad \hat{V}_۲=۱۴/۱۴e^{j۰°} \quad , \quad \hat{I}_۲=-۲۰e^{j۴۵°}$$

$$V_1\hat{I}_1+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_1 I_1+\hat{V}_۲ I_۲ \quad \Rightarrow$$

$$۱۰e^{j۴۵°}\left[-\frac{۱۰e^{j۴۵°}}{Z}\right]+۱۴/۱۴e^{j۰°}\times ۲۰e^{j۴۵°}=۱۰e^{j۴۵°}\times ۰+۱۴/۱۴e^{j۰°}\times ۱۰e^{j۴۵°}$$

$$-\frac{۱۰۰e^{j۹۰°}}{Z}+۲۸۲/۸e^{j۴۵°}=۱۴۱/۴e^{j۴۵°}\Rightarrow$$

$$\frac{۱۰۰e^{j۹۰°}}{Z}=۱۴۱/۴e^{j۴۵°}\Rightarrow Z=\frac{۱۰۰e^{j۹۰°}}{۱۴۱/۴e^{j۴۵°}}=۰/۷۰۷e^{j۴۵°}$$

۲۰ـ در مدار شکل (مسألهٔ ۹–۲۰) وقتی که $V_۱(t)=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\cos wt$ و $V_۲(t)=۰$ به‌دست می آوریم:

$$i_۱(t)=\cos(wt+۱۸/۴°)$$

$$i_۲(t)=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\cos(wt-۲۶/۶°)$$

شکل (مسألهٔ ۹–۲۰)

اکنون اگر $V_۱(t)=۵\cos(wt-۹۰°)$ و $V_۲(t)=۵\cos wt$، جریانهای $i_۱(t)$ و $i_۲(t)$ را به دست آورید. (از هر راهی که می‌خواهید حل کنید و هر قضیه‌ای که بتوانید استفاده کنید.)

$$V_۱\hat{I}_۱+V_۲\hat{I}_۲=\hat{V}_۱I_۱+\hat{V}_۲I_۲$$

حل)

$$\left[\frac{۵}{\sqrt{۲}}<۰\right]\left[\hat{I}_۱\right]+۰\left[\hat{I}_۲\right]=\left[۵<-۹۰°\right]\left[۱<۱۸/۴°\right]+\left[۵<۰\right]\left[-\frac{۱}{\sqrt{۲}}<-۲۶/۶°\right]$$

$$\frac{۵}{\sqrt{۲}}\hat{I}_۱=۵<-۷۱/۶°-\frac{۵}{\sqrt{۲}}<-۲۶/۶°=-۱/۵۸-j۳/۱۶$$

$$\hat{I}_۱=-۰/۴۴-j\,۰/۸۹\simeq ۱<۲۴۳/۶°\Rightarrow i_۱(t)=\cos\left[wt+۲۴۳/۶°\right]$$

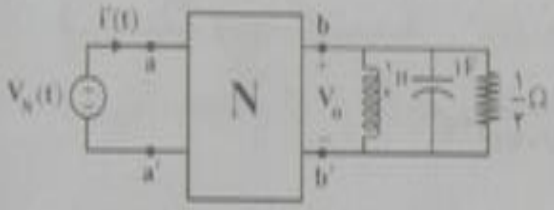
و همانطور که مشاهده می‌کنید $\hat{I}_۲$ را نمی‌توان به دست آورد زیرا در عبارت بالا صفر در آن ضرب شده.

۲۱ـ مدارهای N و $N_۱$ از عناصر R، L و C تشکیل یافته و دو آزمایش مطابق شکل (مسألهٔ ۹-۲۱) انجام می‌گیرد. نتایج آزمایشها در حالت دایمی سینوسی عبارتند از:

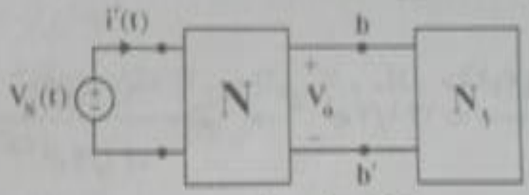
شکل (الف)	شکل (ب)
$v_s(t)=۲\cos ۲t$	$\hat{v}_s(t)=۲\cos ۲t$
$i(t)=\frac{۱}{۲}\cos(۲t-۶۰°)$	$\hat{i}(t)=\cos ۲t$

$v'_{\circ}(t)=\cos(۲t-۴۰^{\circ})$ $\qquad$ $v_{\circ}(t)=\frac{۱}{۲}\cos(۲t-۲۰^{\circ})$

با توجه به نتایج این آزمایش، یک قطبی $N_۱$ از چه عناصری می‌تواند ساخته شود؟ این عناصر را تعیین کنید.



شکل (الف)



شکل (ب)

حل)

در حالت دائمی سینوسی با $w=۲$

$$I_{\circ}=-\frac{V_{\circ}}{Z}=\frac{-V_{\circ}}{\frac{۱}{\frac{۱}{jLw}+jcw+\frac{۱}{R}}}=-\frac{\frac{۱}{۲}<-۲۰^{\circ}}{\frac{۱}{-j۲+j۲+۱}}=-۱<-۲۰^{\circ}$$

$$V_S=۲<۰^{\circ}\quad,\quad I=\frac{۱}{۲}<-۶۰^{\circ}\quad,\quad V_{\circ}=\frac{۱}{۲}<-۲۰^{\circ}\quad,\quad I_{\circ}=-۱<-۲۰^{\circ}$$

$$V'_s=۲<۰^{\circ}\quad,\quad I'=۱<۰^{\circ}\quad,\quad V'_{\circ}=۱<-۴۰^{\circ}\quad,\quad I'_{\circ}=?$$

$$V_sI'+V_{\circ}I'_{\circ}=V'_sI+V'_{\circ}I_{\circ}$$

$$(۲<۰)\,(۱<۰)+\left[\frac{۱}{۲}<-۲۰^{\circ}\right]\left[I'_{\circ}\right]=(۲<۰)\left[+\frac{۱}{۲}<-۶۰^{\circ}\right]+\left[۱<-۴۰^{\circ}\right]\left[-۱<-۲۰^{\circ}\right]$$

$$۲<۰+\frac{I'_{\circ}}{۲}<-۲۰^{\circ}=۱<-۶۰^{\circ}-۱<-۶۰^{\circ}\Rightarrow$$

$$۲<۰=-\frac{I'_{\circ}}{۲}<-۲۰^{\circ}\Rightarrow I'_{\circ}=\frac{-۴<۰}{۱<-۲۰^{\circ}}=-۴<۲۰^{\circ}$$

$$Z_۱=-\frac{V'_{\circ}}{I'_{\circ}}\Rightarrow Z_۱=\frac{-۱<-۴۰^{\circ}}{-۴<۲۰^{\circ}}=\frac{۱}{۴}<-۶۰^{\circ}\Rightarrow Y_۱=۴<۶۰^{\circ}$$

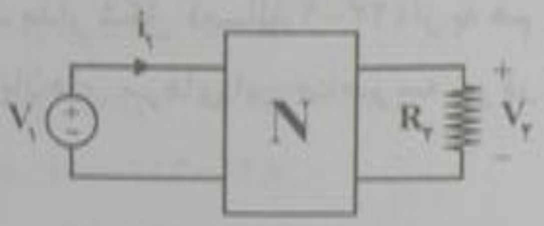
$$\Rightarrow\ Y_۱=۲+j۲\sqrt{۳}$$

شبکه $N_۱$ از موازی قرار گرفتن مقاومتی با رسانایی ۲ مهو و خازنی با ظرفیتی $\sqrt{۳}$ فاراد در حالت دائمی سینوسی $w=۲$

۲۲ـ شبکه N داده شده در شکل (مسألهٔ ۹-۲۲) از تعداد b مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. اندازه‌گیری‌های ولتاژ و جریان برای سه مقدار مختلف R، انجام گرفته و نتایج در جدول زیر نشان داده شده است. کمیتهای x، y و z مشخص شده در جدول را تعیین

کنید.

$R_۲$	$V_۲$	$i_۱$	$V_۱$	شماره آزمایش
۱	x	۲	۴	۱
۳	۳	y	۷	۲
۵	۵	۴	z	۳



شکل (مسألهٔ ۹-۳۲)

حل)

$$۱,۲ \Rightarrow V_۱\hat{I}_۱+V_۲\left[\frac{-\hat{V}_۲}{\hat{R}_۲}\right]=\hat{V}_۱ I_۱+\hat{V}_۲\left[-\frac{V_۲}{R_۲}\right]\Rightarrow$$

$$۴y+x\left[-\frac{۳}{۳}\right]=۷\times۲+۳\left[\frac{-x}{۱}\right]\Rightarrow ۴y+۲x=۱۴ \Rightarrow$$

$$۲y+x=۷$$

$$۱,۳ \Rightarrow V_۱\hat{I}_۱+V_۲\left[-\frac{\hat{V}_۲}{\hat{R}_۲}\right]=\hat{V}_۱ I_۱+\hat{V}_۲\left[-\frac{V_۲}{R^۲}\right]\Rightarrow$$

$$۴\times۴+x\left[-\frac{۵}{۵}\right]=z\times۲+۵\left[\frac{-x}{۱}\right]\Rightarrow$$

$$۱۶=۲z-۴x \Rightarrow z-۲x=۸$$

$$۲,۳ \Rightarrow V_۱\hat{I}_۱+V_۲\left[\frac{-\hat{V}_۲}{\hat{R}_۲}\right]=\hat{V}_۱ I_۱+\hat{V}_۲\left[-\frac{V_۲}{R_۲}\right]\Rightarrow$$

$$۷\times۴+۳\left[-\frac{۵}{۵}\right]=zy+۵\left[\frac{-۳}{۳}\right]\Rightarrow$$

$$zy=۲۸-۳+۵=۳۰ \Rightarrow zy=۳۰$$

$$\begin{cases} ۲y+x=۷ \Rightarrow y=\frac{۷-x}{۲} \\ z-۲x=۸ \Rightarrow z=۸+۲x \\ zy=۳۰ \Rightarrow (۸+۲x)(۷-x)=۶۰ \Rightarrow \end{cases}$$

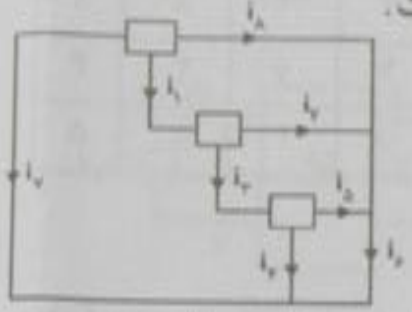
$$۵۶-۸x+۱۴x-۲x^۲=۶۰ \Rightarrow$$

$$۲x^۲-۶x+۴=۰ \Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow x=۱ \;,\; x=۲$$

a) $x=۱ \Rightarrow z=۸+۲x=۱۰ \;,\; y=\frac{۷-x}{۲}=۳$

$$b)\,x=۲ \Rightarrow z=۸+۲x=۱۲ \quad , \quad y=\frac{۷-x}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۲۳ـ مدار شکل (مسألهٔ ۹-۲۳) از به هم پیوستن سه عنصر سه سر تشکیل یافته است. جریان‌های سرهای این عناصر سه سر در شکل مشخص شده است.



شکل (مسألهٔ ۹-۲۳)

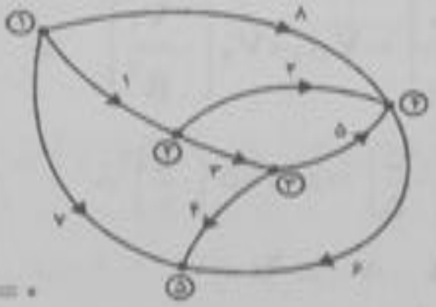
الف - گراف نشان دهندهٔ این مدار را رسم کنید. معادلات گره را هم در این مدار و هم در گراف آن بنویسید.

ب - آیا این گراف روابط ولتاژ شاخه را هم به خوبی نشان می‌دهد.

پ - برای $i_{۵}=۱A$، $i_{۶}=۲A$، $i_{۷}=۳A$ و $i_{۸}=۴A$ جریانهای شاخه‌های دیگر را تعیین کنید.

حل)

الف -



معادلات گره برای مدار:

KCL برای گره (۱) $\Rightarrow$ $i_{۱}+i_{۷}+i_{۸}=۰$

KCL برای گره (۲) $\Rightarrow$ $-i_{۱}+i_{۲}+i_{۳}=۰$

KCL برای گره (۳) $\Rightarrow$ $-i_{۳}+i_{۴}+i_{۵}=۰$

KCL برای گره (۴) $\Rightarrow$ $-i_{۲}-i_{۵}+i_{۶}-i_{۸}=۰$

KCL برای گره (۵) $\Rightarrow$ $-i_{۴}-i_{۶}-i_{۷}=۰$

معادلات گره برای گراف:

KCL برای گره (۱) $\Rightarrow$ $j_{۱}+j_{۷}+j_{۸}=۰$

KCL برای گره (۲) $\Rightarrow$ $-j_{۱}+j_{۲}+j_{۳}=۰$

KCL برای گره (۳) $\Rightarrow$ $-j_{۳}+j_{۴}+j_{۵}=۰$

KCL برای گره (۴) $\Rightarrow$ $-j_{۲}-j_{۵}+j_{۶}-j_{۸}=۰$

KCL برای گره (۵) $\Rightarrow$ $-j_{۴}-j_{۶}-j_{۷}=۰$

ب - خیر زیرا عناصر سه سر بوده و ولتاژ میان هر دو سر از آن مشخص نبوده پس این گراف روابط ولتاژ شاخه را به خوبی نشان نمی‌دهد.

ب ـ

$i_{۵}=۱A \quad , \quad i_{۶}=۲A \quad , \quad i_{۷}=۳A \quad , \quad i_{۸}=۴A$

$i_{۱}=-i_{۷}-i_{۸}=-۳-۴=-۷A$

$i_{۲}=-i_{۵}+i_{۶}-i_{۸}=-۱+۲-۴=-۳A$

$i_{۳}=i_{۱}-i_{۲}=-۷+۳=-۴A$

$i_{۴}=-i_{۶}-i_{۷}=-۲-۳=-۵A$

۲۴ـ اگر درجه یک گره از یک گراف G برابر تعداد شاخه‌های وصل شده به آن گره تعریف شده نشان دهید که در هر گراف پایاندار G تعداد گره‌های با درجهٔ فرد همواره زوج است.

حل)

گرافی با یک شاخه و دو گره را در نظر بگیرید. واضح است که این گراف شامل دو گره با درجه فرد است یعنی تعداد گره‌ها با درجه فرد آن زوج است. حال اگر شاخه‌ای به یکی از گره‌ها اضافه شود آن گره درجه دو یعنی زوج شده و گره سومی با درجه یک یعنی فرد بوجود می‌آید و در نتیجه باز هم دو گره با درجه فرد داریم و اگر به همین ترتیب شاخه‌ای اضافه شود باز هم تعداد گره‌های با درجه فرد، زوج خواهد شد زیرا سه حالت می‌توانند وجود داشته باشد.

۱ـ شاخه اضافه شده بین دو گره با درجه زوج باشد.

۲ـ شاخه اضافه شده بین دو گره با درجه فرد باشد.

۳ـ شاخه اضافه شده بین گره‌ای با درجه فرد و گره‌ای با درجه زوج باشد.

در حالت ۱، هر دو گره با درجه فرد می‌شوند در نتیجه دو گره با درجه فرد به گره‌های درجه فرد اضافه می‌شود و تعداد آنها همچنان زوج باقی می‌ماند.

در حالت ۲، هر دو گره با درجه زوج می‌شود در نتیجه دو گره با درجه فرد از گره‌های درجه فرد کم می‌شود و تعداد آنها همچنان زوج باقی می‌ماند.

در حالت ۳، گره با درجه زوج، درجه فرد شده و گره با درجه فرد، درجه زوج شده و در نتیجه تعداد گره‌های با درجه فرد همچنان زوج باقی می‌ماند.

۲۵ـ نشان دهید که رتبهٔ ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a برابر $n=n_t-۱$ است (n_t تعداد کل گره‌ها است) و اگر هر سطر ماتریس A_a حذف شود، رتبهٔ ماتریس باقیمانده $n=n_t-۱$ است. اگر دو سطر از ماتریس A_a حذف شود رتبهٔ ماتریس باقیمانده چگونه خواهد بود؟

ماتریس تلاقی گره از نوشتن $n_t-۱$ معادله مستقل خطی برای $n_t-۱$ گره ایجاد می‌شود (زیرا برای گره مبنا معادله‌ای نمی‌نویسیم). پس ماتریس تلاقی گره با شاخه A_a از مرتبه $n_t-۱$ است. اگر دو سطر ماتریس A_a حذف شود مرتبه ماتریس باقی مانده $n_t-۲$ می‌شود.