





www.urmiacivil.mihanblog.com
sma519@yahoo.com

فهرست مطالب

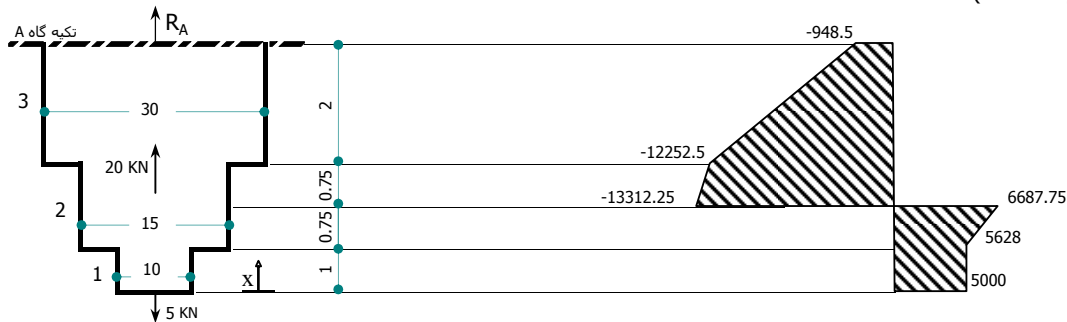
3	تنش عمودی و برشی مقاطع تحت اثر نیروهای محوری
5	کرنش اجسام تحت اثر نیروی حرارتی
7	تنش خمشی در مقاطع متشکل از چند ماده
8	تنش برشی در مقطع
9	مرکز برش در مقاطع
10	تنش کششی و فشاری در مقطع
11	بررسی تنشهای يك المان با دایره مور
12	تغییر مکان خاصا از خمش تیرها (شیب و خیز)
13	پیچش مقاطع



تنش عمودی و برشی مقاطع تحت اثر نیروهای محوری

۱ - مطلوب است عکس العمل تکیه گاهی مقطع استوانه ای مقابل که نیروی وزن و نیروی متمرکز بر آن اثر می کنند .
 $\rho = 80 \text{ KN/m}^3$ (جگالی)
 حل مثال :

توجه: (جهت نیروی عکس العمل تکیه گاه A فرضی است و در انتها درست یا نادرست بودن آن از علامت حاصل شده برای R_A به دست خواهد آمد .)



$$W_1 = (3.14 \times 0.1^2) / 4 \times 1 \times 80000 = 628 \text{ N}$$

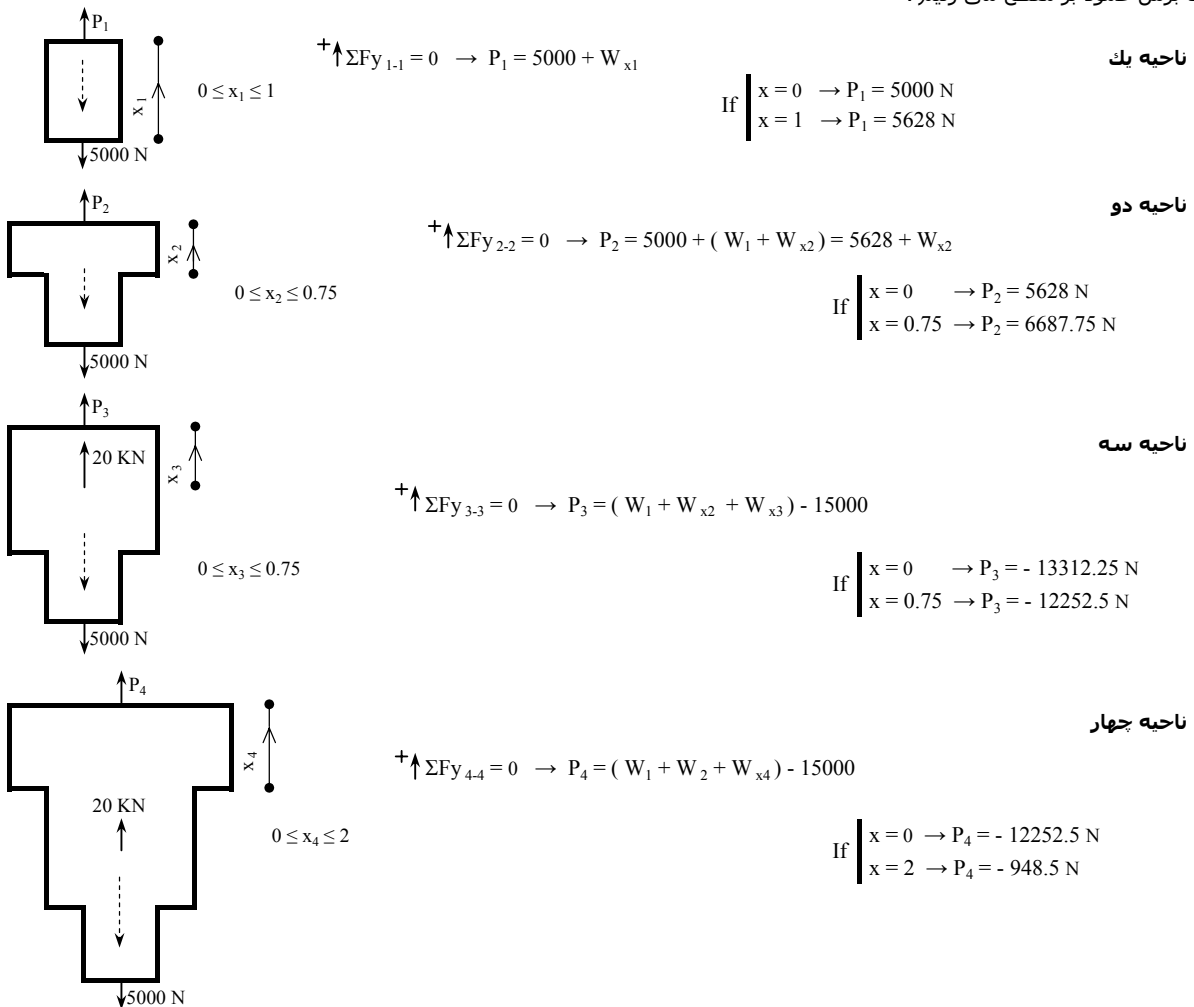
$$W_2 = (3.14 \times 0.15^2) / 4 \times 1.5 \times 80000 = 2119.5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow W = 14051.5 \text{ N}$$

$$W_3 = (3.14 \times 0.3^2) / 4 \times 2 \times 80000 = 5628 \text{ N}$$

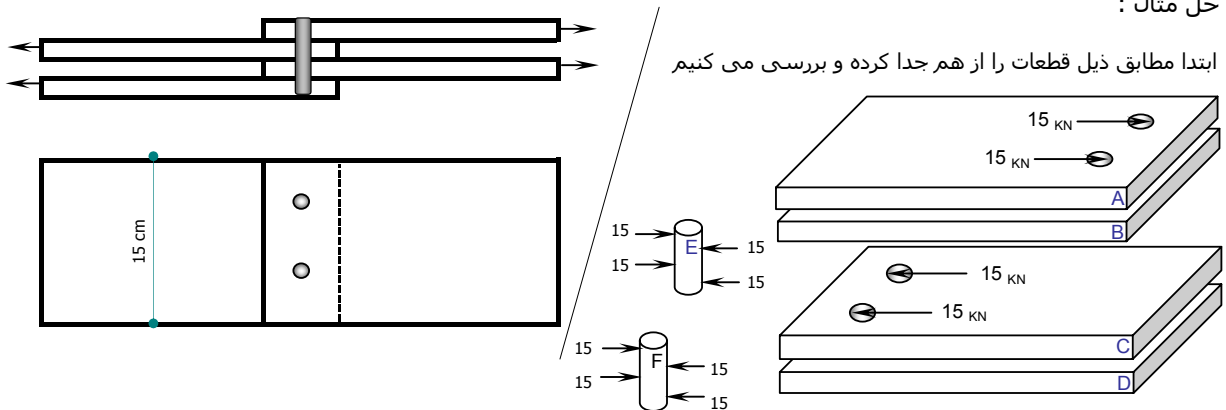
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A - W - 5000 + 2000 = 0 \rightarrow R_A = 5628 - 15000 = -948.5 \text{ N}$$

– (علامت منفی نشانگر این است که جهت عکس العمل تکیه گاهی A رو به پایین صحیح خواهد بود) .
 – اکنون نواحی تغییر مقطع و تغییر نیرو در جسم را معلوم کرده و برای پیدا کردن نیروهای داخلی محوری ، از هر ناحیه يك برش عمود بر مقطع می زنیم .



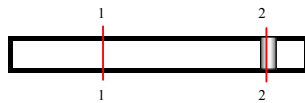
۲ - مطلوب است تنشهای عمودی ، برشی و لهیدگی در شکل ذیل .
 - ضخامت همه تسمه ها ۲ سانتیمتر ، قطر پیچها ۲۱ میلیمتر و نیروی کششی وارده به هر تسمه ۳۰ کیلو نیوتن است .

حل مثال :



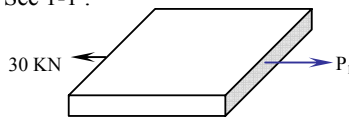
ابتدا مطابق ذیل قطعات را از هم جدا کرده و بررسی می کنیم

همانطور که ملاحظه می شود همه مشخصات عکس العمل ها در هر ۴ تسمه و هر ۲ پیچ یکسان است . لذا می توان تنها یک تسمه و یک پیچ را (به دلخواه) برای کل مسئله مورد بررسی قرار داد .



الف) بررسی تسمه A :

Sec 1-1 :

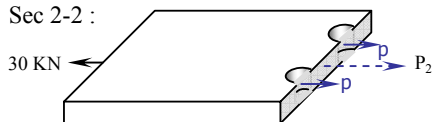


$$\sum F_{x \ 1-1} = 0 \rightarrow P_1 = 30 \text{ KN} \quad \text{نیروی کششی}$$

$$A = (15 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-2}) = 30 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\rightarrow \sigma_1 = (30 \times 10^3) / (30 \times 10^{-4}) = 10 \text{ MP} \quad \text{تنش کششی}$$

Sec 2-2 :



$$\sum F_{x \ 2-2} = 0 \rightarrow P_2 = 30 \text{ KN} \quad \text{نیروی کششی}$$

$$A = (b \times t) \quad [b = 15 - (2 \times 2.1) = 10.8 \text{ cm}]$$

$$A = (10.8 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-2}) = 21.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\rightarrow \sigma_2 = (30 \times 10^3) / (21.6 \times 10^{-4}) = 13.88 \text{ MP} \quad \text{تنش کششی}$$

(تنش لهیدگی) :

$$(n = 2) \rightarrow A_n = [(2.1 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-2})] \times 2 = 8.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

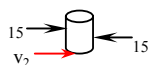
$$\rightarrow \sigma_b = (30 \times 10^3) / (8.4 \times 10^{-4}) = 35.71 \text{ MP}$$

ب) بررسی پیچ F :



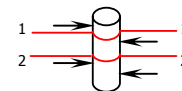
Sec 1-1 :

$$\sum F_{x \ 1-1} = 0 \rightarrow V_1 = 15 \text{ KN}$$



Sec 2-2 :

$$\sum F_{x \ 2-2} = 0 \rightarrow V_2 = 0 \text{ KN}$$



$$A = 3.14 (2.1 \times 10^{-2})^2 / 4 = 3.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\tau_1 = (15 \times 10^3) / (3.46 \times 10^{-4}) = 43.35 \text{ MP}$$

$$\tau_2 = 0 / (3.46 \times 10^{-4}) = 0 \text{ MP}$$

کرنش اجسام تحت اثر نیروی حرارتی

۳ - عکس العمل های تکیه گاهی را با روش جمع آثار قوا بدست آورید . (فاصله تا تکیه گاه B برابر ۳ میلیمتر است .)

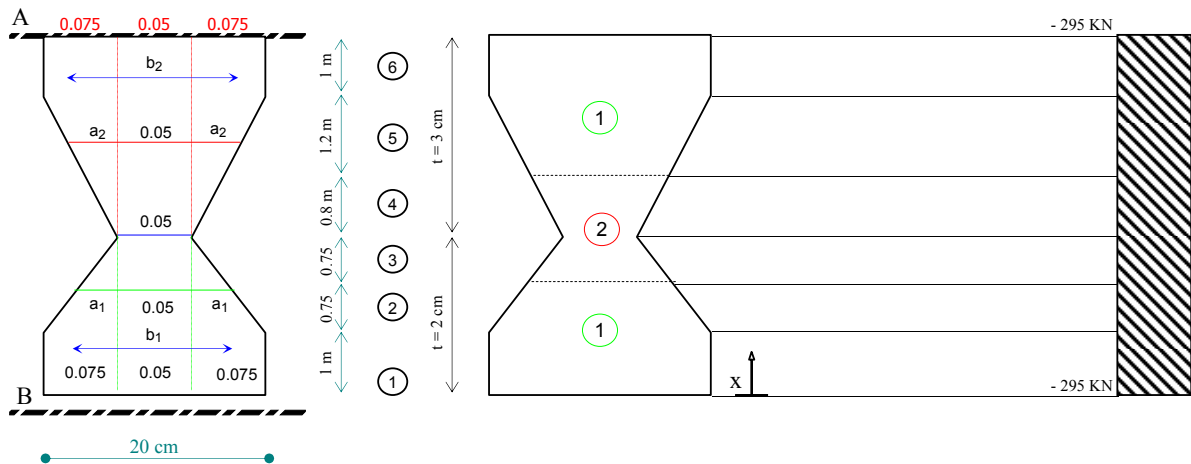
$$(t_1 = -5^\circ\text{C}, t_2 = 98^\circ\text{C})$$

$$(E_1 = 200 \text{ GP})$$

$$(\alpha_1 = 1.2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$$

$$(E_2 = 70 \text{ GP})$$

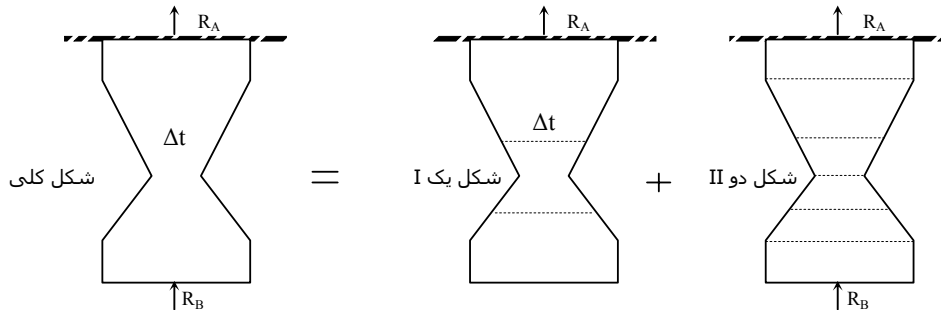
$$(\alpha_2 = 1.8 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})$$



حل مثال :

در این روش ابتدا مساله نامعین استاتیکی را به دو مساله معین تبدیل کرده ، سپس با استفاده از روش اول (سازگاری) عکس العمل های تکیه گاهی را محاسبه می کنیم . (جسم مذکور مطابق فوق دارای ۶ منطقه است و از باریکترین قسمت به دو ضخامت ۲ و ۳ سانتیمتری تقسیم می شود)

ابتدا به اختیار تکیه گاه B با حذف می کنیم :



$$\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow \Delta t = 98 - (-5) = 103^\circ\text{C}$$

$$b_1 = 0.2 - 2a_1 \quad (x/1.5) = (a_1/0.075) \rightarrow a_1 = 0.05x$$

$$\rightarrow b_1 = 0.1(2 - x) \text{ m}$$

$$b_2 = 0.2 - 2a_2 \quad (x/2) = (a_2/0.075) \rightarrow a_2 = 0.0375x$$

$$\rightarrow b_2 = 0.075(0.67 + x) \text{ m}$$

توجه : کنترل فرمولهای بدست آمده برای b_1 و b_2 ضروری است .

اکنون سطح مقطع هر شش منطقه را بدست می آوریم :

$$A_1 = (20 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-2}) = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = A_3 = b_1 \times t = 0.1(2 - x) \times 2 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-3}(2 - x) \text{ m}^2$$

$$A_4 = A_5 = b_2 \times t = 0.075(0.67 + x) \times 3 \times 10^{-2} = 2.25 \times 10^{-3}(0.67 + x) \text{ m}^2$$

$$A_6 = (20 \times 10^{-2})(3 \times 10^{-2}) = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

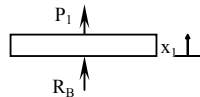
$$\text{شرط سازگاری } \Delta L = \delta L_I + \delta L_{II} = 3 \times 10^{-3}$$

$$(\delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta t)$$

$$\text{I} \quad \delta L_I = \delta L_I + \delta L_{II} \quad \begin{cases} \delta L_I = 1.2 \times 10^{-5} \times (1 + 0.75 + 1.2 - 1) \times 103 \\ \delta L_{II} = 1.8 \times 10^{-5} \times (0.75 + 0.8) \times 103 \end{cases} \Rightarrow \delta L_I = 7.75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

توجه : اگر کرنش شکل یک کمتر از فاصله بین جسم و تکیه گاه B بود ، نیازی به محاسبه R_B نبود . ولی اکنون بدست آوردن R_B الزامی است .

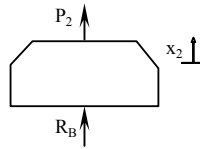
$$\textcircled{\text{II}} \delta L_{\text{II}} = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 + \delta L_4 + \delta L_5 + \delta L_6$$



$$0 \leq x_1 \leq 1 \quad \begin{cases} P_1 = -R_B \text{ N} \\ L = 1 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ E_1 = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۱ :

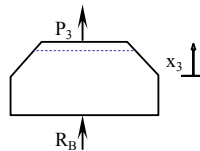
$$\delta L_1 = (-R_B \times 1) / (40 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9) = -1.25 \times 10^{-9} R_B$$



$$0 \leq x_2 \leq 0.75 \quad \begin{cases} P_2 = -R_B \text{ N} \\ L = 0.75 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = 2 \times 10^{-3} (2 - X) \text{ m}^2 \\ E_1 = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۲ :

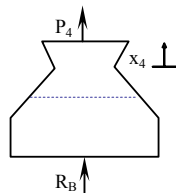
$$\delta L_2 = \int_0^{0.75} (-R_B) / [2 \times 10^{-3} (2 - X) \times 200 \times 10^9] dx = -1.175 \times 10^{-9} R_B$$



$$0.75 \leq x_3 \leq 1.5 \quad \begin{cases} P_3 = -R_B \text{ N} \\ L = 0.75 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_3 = 2 \times 10^{-3} (2 - X) \text{ m}^2 \\ E_2 = 70 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۳ :

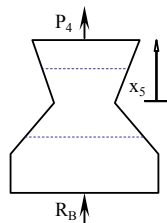
$$\delta L_3 = \int_{0.75}^{1.5} (-R_B) / [2 \times 10^{-3} (2 - X) \times 70 \times 10^9] dx = -6.57 \times 10^{-9} R_B$$



$$0 \leq x_4 \leq 0.8 \quad \begin{cases} P_4 = -R_B \text{ N} \\ L = 0.8 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = 2.25 \times 10^{-3} (0.67 + X) \text{ m}^2 \\ E_2 = 70 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۴ :

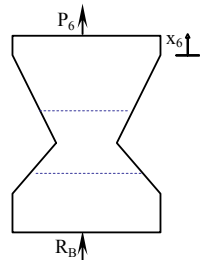
$$\delta L_4 = \int_0^{0.8} (-R_B) / [2.25 \times 10^{-3} (0.67 + X) \times 70 \times 10^9] dx = -4.99 \times 10^{-9} R_B$$



$$0.8 \leq x_5 \leq 2 \quad \begin{cases} P_5 = -R_B \text{ N} \\ L = 1.2 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_4 = 2.25 \times 10^{-3} (0.67 + X) \text{ m}^2 \\ E_1 = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۵ :

$$\delta L_5 = \int_{0.8}^2 (-R_B) / [2.25 \times 10^{-3} (0.67 + X) \times 200 \times 10^9] dx = -1.325 \times 10^{-9} R_B$$



$$0 \leq x_6 \leq 1 \quad \begin{cases} P_6 = -R_B \text{ N} \\ L = 1 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} A_6 = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ E_1 = 200 \times 10^9 \text{ Pa} \end{cases}$$

منطقه ۶ :

$$\delta L_6 = (-R_B \times 1) / (60 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9) = -8.33 \times 10^{-10} R_B$$

$$\Rightarrow \delta L_{\text{II}} = -1.61 \times 10^{-8} R_B \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta L = 7.75 \times 10^{-3} - 1.61 \times 10^{-8} R_B = 3 \times 10^{-3}$$

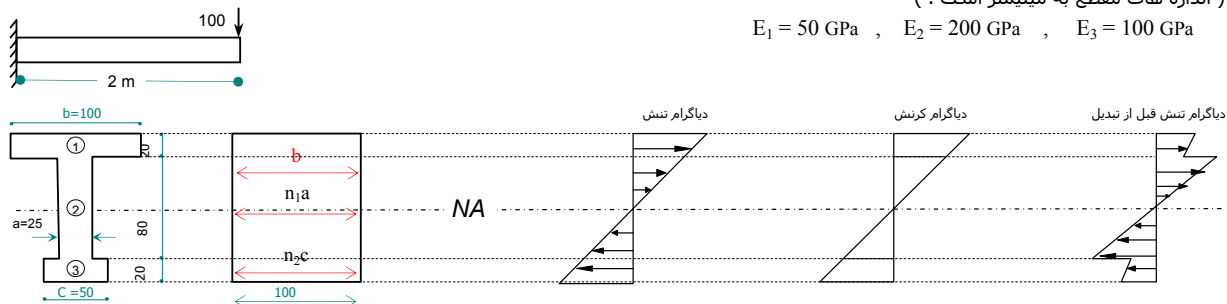
$$\begin{cases} R_B = 295 \text{ KN} \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow R_A = -R_B = -295 \text{ KN} \end{cases}$$

نتیجه : علامت منفی در R_A نشانگر اشتباه بودن جهت آن است و باید رو به پایین تغییر یابد .

تنش خمشی در مقاطع متشکل از چند ماده

۴ - تنش و کرنش را در محل اتصال بال به جان و در بالاترین و پایین ترین نقطه مقطع با رسم دیاگرام محاسبه کنید .
(اندازه های مقطع به میلیمتر است .)

$$E_1 = 50 \text{ GPa} , E_2 = 200 \text{ GPa} , E_3 = 100 \text{ GPa}$$



حل مثال :

- ابتدا مقطع را با یکی از سه جنس موجود که مدول الاستیسته کمتری دارد معادل می کنیم :
 $n_1 a = 4 \times 25 = 100 \text{ mm}$, $n_2 c = 2 \times 50 = 100 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$

$$n_1 = 200 / 50 = 4 , n_2 = 100 / 50 = 2$$

$$M_{\max} = -PL = -200 \text{ KN.m}$$

- اکنون محور تار خنثی و ممان اینرسی :

$$\bar{y} = \Sigma [(A_i y_i) / A_i] = [(20 \times 10^{-4} \times 110 \times 10^{-3}) + (80 \times 10^{-4} \times 60 \times 10^{-3}) + (20 \times 10^{-4} \times 10 \times 10^{-3})] / [(20+80+20) \times 10^{-4}] = 60 \text{ mm}$$

$$C = 60 \times 10^{-3} \rightarrow \sigma_{\max} = MC / I = (-200 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-3}) / (1440 \times 10^{-8}) = -833.33 \text{ Mpa}$$

$$I = bh^3 / 12 = (100 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})^3 / 12 \rightarrow I = 1440 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

الف (بررسی تنش و کرنش در مقطع معادل جسم يك (۱) :

$$y_1 = 60 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_1 = (-My_1) / I = [(-200 \times 10^3)(60 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \rightarrow \sigma_1 = 833.33 \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_1 = \sigma_1 / E_1 = 833.33 \times 10^6 / 50 \times 10^9 = 1.67 \times 10^{-2}$$

$$y_2 = -60 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_2 = (-My_2) / I = [(200 \times 10^3)(-60 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \rightarrow \sigma_2 = -833.33 \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_2 = \sigma_2 / E_1 = -833.33 \times 10^6 / 50 \times 10^9 = -1.67 \times 10^{-2}$$

ب (بررسی تنش و کرنش در حالت قبل از تبدیل به معادل جسم يك (۱) :

$$y_3 = 60 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_3 = (-My_3) / I = [(200 \times 10^3)(60 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \rightarrow \sigma_3 = 833.33 \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_3 = \sigma_3 / E_1 = 833.33 \times 10^6 / 50 \times 10^9 = 1.67 \times 10^{-2}$$

$$y_4 = 40 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_4 = (-My_4) / I = [(200 \times 10^3)(40 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \rightarrow \sigma_4 = 555.56 \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_4 = \sigma_4 / E_1 = 555.56 \times 10^6 / 50 \times 10^9 = 1.11 \times 10^{-2}$$

$$y_5 = 40 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_5 = [(-My_5) / I] \cdot n_1 = [(-200 \times 10^3)(40 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \times 4 \rightarrow \sigma_5 = 2.22 \text{ Gpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_5 = \sigma_5 / E_2 = 2.22 \times 10^9 / 200 \times 10^9 = 1.11 \times 10^{-2}$$

$$y_6 = -40 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_6 = [(-My_6) / I] \cdot n_1 = [(200 \times 10^3)(-40 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \times 4 \rightarrow \sigma_6 = -2.22 \text{ Gpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_6 = \sigma_6 / E_2 = -2.22 \times 10^9 / 200 \times 10^9 = -1.11 \times 10^{-2}$$

$$y_7 = -40 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_7 = [(-My_7) / I] \cdot n_2 = [(200 \times 10^3)(-40 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \times 2 \rightarrow \sigma_7 = -1.11 \text{ Gpa}$$

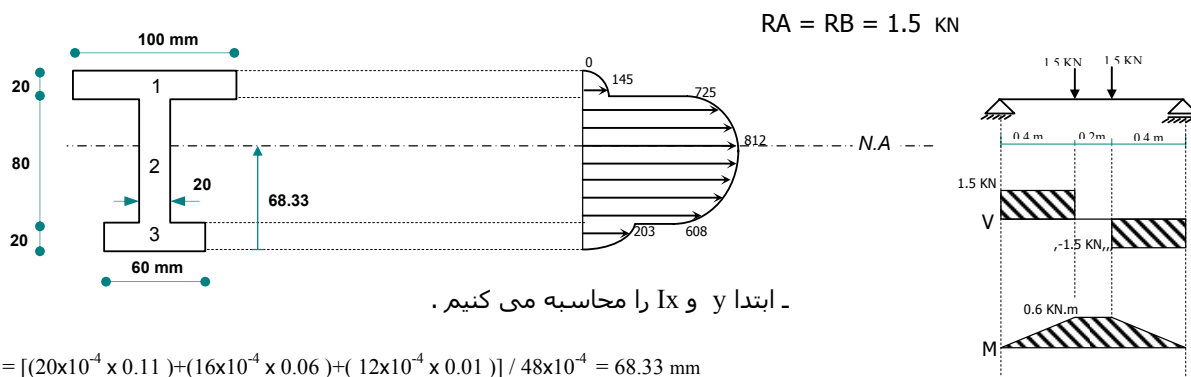
$$\rightarrow \epsilon_7 = \sigma_7 / E_3 = -1.11 \times 10^9 / 100 \times 10^9 = -1.11 \times 10^{-2}$$

$$y_8 = -60 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow \sigma_8 = [(-My_8) / I] \cdot n_2 = [(200 \times 10^3)(-60 \times 10^{-3})] / (1440 \times 10^{-8}) \times 2 \rightarrow \sigma_8 = -1.67 \text{ Gpa}$$

$$\rightarrow \epsilon_8 = \sigma_8 / E_3 = -1.67 \times 10^9 / 100 \times 10^9 = -1.67 \times 10^{-2}$$

تنش برشی در مقطع

۵ - مطلوب‌ست محاسبه تنش برشی در محل اتصال بال به جان و در ابتدا و انتهای مقطع .



- ابتدا y و I_x را محاسبه می کنیم .

$$\bar{y} = [(20 \times 10^{-4} \times 0.11) + (16 \times 10^{-4} \times 0.06) + (12 \times 10^{-4} \times 0.01)] / 48 \times 10^{-4} = 68.33 \text{ mm}$$

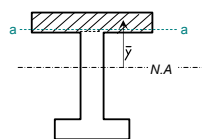
$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} = 863 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\bar{y} = 41.14 \text{ mm}, \quad t = 20 \text{ mm}$$

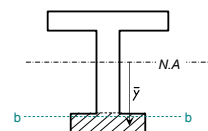
$$Q = A_v \bar{v} = (100 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(41.7 \times 10^{-3}) = 83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\rightarrow \tau = (V.Q) / (I . t) = (1.5 \times 10^3 \times 83.4 \times 10^{-6}) / (863 \times 10^{-8} \times 20 \times 10^{-3}) = 725 \text{ kPa}$$

۲. حال اتصال فوقانی را بررسی می کنیم :



۲- حال اتصال تحتانی را بررسی می کنیم :



$$\bar{y} = 58.33 \text{ mm}, \quad t = 20 \text{ mm}$$

$$Q = A \cdot \bar{y} = (60 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(58.33 \times 10^{-3}) = 70 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\rightarrow \tau = (V.Q) / (I . t) = (1.5 \times 10^3 \times 70 \times 10^{-6}) / (863 \times 10^{-8} \times 20 \times 10^{-3}) = 608 \text{ kPa}$$

نتیجه: باید از اتصالی استفاده کنیم که تنش برشی مجاز آن بیشتر از ۷۲۵ کیلو پاسگال باشد.

- اکنون تنش برشی را يك اپسیلون بالاتر از اتصال فوقانی و يك اپسیلون پایینتر از اتصال تحتانی بررسی می کنیم .

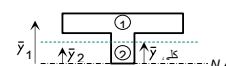
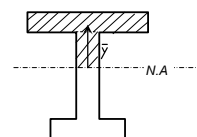
$$\tau_{a-a} = (V.Q) / (I . t) = (1.5 \times 10^3 \times 83.4 \times 10^{-6}) / (863 \times 10^{-8} \times 100 \times 10^{-3}) = 145 \text{ kpa}$$

$$\tau_{h-h} = (V.Q) / (I . t) = (1.5 \times 10^3 \times 70 \times 10^{-6}) / (863 \times 10^{-8} \times 60 \times 10^{-3}) = 203 \text{ kpa}$$

- حال به بررسی تنس برشی در محل تار خنثی می پردازیم :

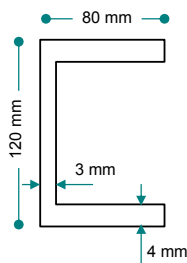
$$Q = A \cdot \bar{y} = [(100 \times 10^{-3})(20 \times 10^{-3})(41.7 \times 10^{-3})] + [(20 \times 10^{-3})(31.7 \times 10^{-3})(31.7 \times 10^{-3}/2)] = 93.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau = (V.Q) / (I . t) = (1.5 \times 10^3 \times 93.4 \times 10^{-6}) / (863 \times 10^{-8} \times 20 \times 10^{-3}) = 812 \text{ kpa}$$



۲- اکنون می توان مطابق فوق دیاگرام تنش برشی مقطع را ترسیم نمود .

تعیین مرکز برش در مقاطع



۶ - مقطع مقابل مفروض است ، مطلوب است تعیین مرکز برش و رسم دیاگرام تنش برشی در حالیکه $V=800\text{N}$ به مرکز برش اعمال می شود .

حل مثال :

ابتدا \bar{y} و I را تعیین می کنیم .

$$\bar{y} = h / 2 = 60 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$I_x = \Sigma (I_x + Ad^2) = [(1/12)(3 \times 10^{-3})(120 \times 10^{-3})^3] + 2[(1/12)(0.08)(4 \times 10^{-3})^3 + (80 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})^2] \rightarrow I_x = 274 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

توجه شود که در این مثال توترانس یک تا دو میلیمتر ناچیز به حساب می آید .

$$Q = (4 \times 10^{-3} \text{ S})(60 \times 10^{-3}) \rightarrow Q = 2.4 \times 10^{-4} \text{ S m}^3$$

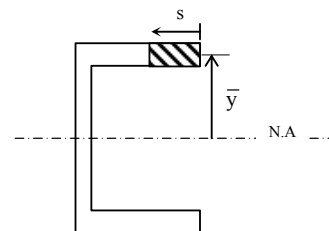
$$q = (V \times 2.4 \times 10^{-4} \text{ S}) / (274 \times 10^{-8}) \rightarrow q = (87.6 \text{ V}) \text{ S N/m}$$

$$F = \int_0^{0.08} (87.6 \text{ V}) \text{ S ds} = (87.6 \text{ V})(3.2 \times 10^{-3}) \rightarrow F = 0.28 \text{ V N}$$

$$F.H = V.e \rightarrow e = (F.H) / V = 0.28 \text{ V}(120 \times 10^{-3}) / V \rightarrow e = 33.6 \text{ mm}$$
 مرکز برش

$$q = VQ / I = (800 \times 2.4 \times 10^{-4} \text{ S}) / 274 \times 10^{-8} \rightarrow q = 70.07 \text{ S KN/m}$$

$$\tau = q / t = (70.07 \times 10^3 \text{ S}) / 4 \times 10^{-3} \rightarrow \tau = 17.52 \text{ S Mpa} \rightarrow \begin{cases} S = 0 \rightarrow \tau = 0 \\ S = 80 \rightarrow \tau = 1.4 \text{ Mpa} \end{cases}$$

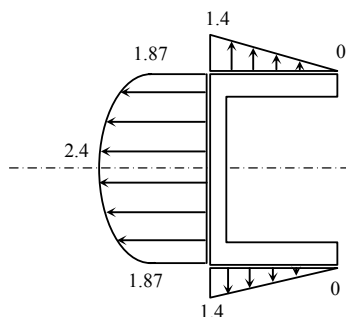
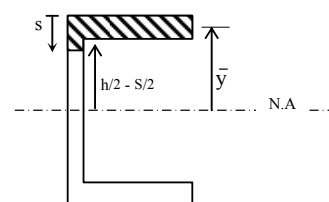


$$Q = (A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2) , A_1 \bar{y}_1 = (80 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3})(60 \times 10^{-3})$$

$$Q = [(19.2 \times 10^{-6}) + (3 \times 10^{-3} \text{ S})(60 \times 10^{-3} - S/2)] = [(19.2 \times 10^{-6}) + (180 \times 10^{-6} \text{ S}) - (1.5 \times 10^{-3} \text{ S}^2)]$$

$$q = VQ / I = 292 \times 10^6 [(19.2 \times 10^{-6}) + (1.8 \times 10^{-4} \text{ S}) - (1.5 \times 10^{-3} \text{ S}^2)]$$

$$\tau = q / t = 97.33 \times 10^9 [(19.2 \times 10^{-6}) + (1.8 \times 10^{-4} \text{ S}) - (1.5 \times 10^{-3} \text{ S}^2)]$$



$$\begin{cases} S = 0 \text{ mm} \rightarrow \tau = 1.87 \text{ Mpa} \\ S = 60 \text{ mm} \rightarrow \tau = 2.4 \text{ Mpa} \end{cases}$$

و اکنون رسم دیاگرام تنش برشی (توزیع تنشها بر روی مقطع) :

لازم به ذکر است که اگر نیرو به خارج از مرکز برش (مثلا به جان تیر) وارد شود تنش پیچشی نیز اعمال می شود :

$$a = 0.28 \text{ m}$$

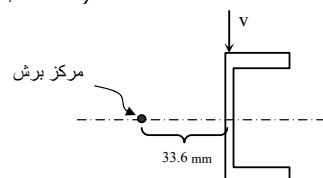
$$b = 0.003 \text{ m}$$
 (ضخامت جان را قرار می دهیم ، چون کمتر از ضخامت بال است و طراحی را مطمئن تر می کند)

$$c_1 = 0.333$$

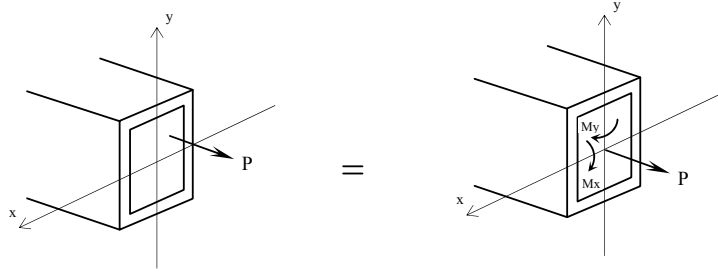
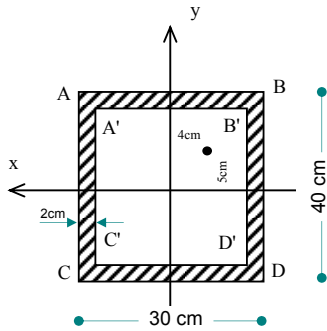
$$T = 800 \times (33.6 \times 10^{-3}) = 26.88 \text{ N.m}$$

$$\tau_{\max} (\text{پیچشی}) = T / c_1 . a . b^2 = 26.88 / 0.84 \times 10^{-6} = 32 \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \tau_{\max} = 2.4 + 32 = 34.4 \text{ Mpa}$$
 (برشی)



۷ - مطلوب است تنش وارد شده به هشت گوشه مقطع مفروض :



$$A_1 = (30 \times 10^{-2})(40 \times 10^{-2}) = 0.12 \text{ m}^2$$

$$A_2 = (26 \times 10^{-2})(36 \times 10^{-2}) = 0.094 \text{ m}^2$$

$$\rightarrow A = A_1 - A_2 = 260 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$M_x = (50 \times 10^3)(5 \times 10^{-2}) = 2.5 \text{ KN.m}^2$$

$$M_y = (50 \times 10^3)(4 \times 10^{-2}) = 2 \text{ KN.m}^2$$

با توجه به جهت ممانهای تفکیک شده

$$\left\{ \begin{array}{l} P = 50 \times 10^3 \text{ N} \text{ نیروی کششی} \\ M_x = -2.5 \text{ KN.m} \text{ ممان منفی} \\ M_y = 2 \text{ KN.m} \text{ ممان مثبت} \end{array} \right.$$

$$I_{x1} = (1/12)(30 \times 10^{-2})(40 \times 10^{-2})^3 = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{x2} = (1/12)(26 \times 10^{-2})(36 \times 10^{-2})^3 = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow I_x = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{y1} = (1/12)(30 \times 10^{-2})^3(40 \times 10^{-2}) = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{y2} = (1/12)(30 \times 10^{-2})^3(40 \times 10^{-2}) = 5.27 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\rightarrow I_y = 3.73 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$\sigma_0 = P / A = (50 \times 10^3) / (269 \times 10^{-4}) = 1.92 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_x = (-M_x y / I_x) = -(-2.5 \times 10^3 y) / (6 \times 10^{-4}) = 4.17 y \text{ Mpa}$$

$$\sigma_y = (-M_y x / I_y) = -(2 \times 10^3 x) / (3.73 \times 10^{-4}) = -5.36 x \text{ Mpa}$$

$$\rightarrow \sigma = 1.92 + 4.17 y - 5.36 x \text{ Mpa}$$

$$A : (x = 15 \times 10^{-2}, y = 20 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_A = 1.92 + 0.83 - 0.8 = 1.95 \text{ Mpa}$$

$$B : (x = -15 \times 10^{-2}, y = 20 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_B = 1.92 + 0.83 + 0.8 = 3.55 \text{ Mpa}$$

$$C : (x = 15 \times 10^{-2}, y = -20 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_C = 1.92 - 0.83 - 0.8 = 0.29 \text{ Mpa}$$

$$D : (x = -15 \times 10^{-2}, y = -20 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_D = 1.92 - 0.83 + 0.8 = 1.89 \text{ Mpa}$$

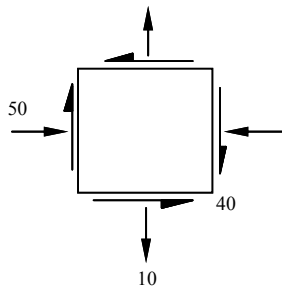
$$A' : (x = 13 \times 10^{-2}, y = 18 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_{A'} = 1.92 + 0.75 - 0.7 = 1.97 \text{ Mpa}$$

$$B' : (x = -13 \times 10^{-2}, y = 18 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_{B'} = 1.92 + 0.75 + 0.7 = 3.37 \text{ Mpa}$$

$$C' : (x = 13 \times 10^{-2}, y = -18 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_{C'} = 1.92 - 0.75 - 0.7 = 0.47 \text{ Mpa}$$

$$D' : (x = -13 \times 10^{-2}, y = -18 \times 10^{-2}) \rightarrow \sigma_{D'} = 1.92 - 0.75 + 0.7 = 1.87 \text{ Mpa}$$

۸ - مطلوب است : (τ_{\max}) , (σ_{\max}, \min) و بار دیگر همین تنشها در ۱۵ درجه چرخش ساعتگرد با دایره مور .



$$\sigma_{ave} = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 = (-50 + 10) / 2 = -20 \text{ Mpa}$$

$$R^2 = 40^2 + 30^2 = 50 \text{ Mpa}$$

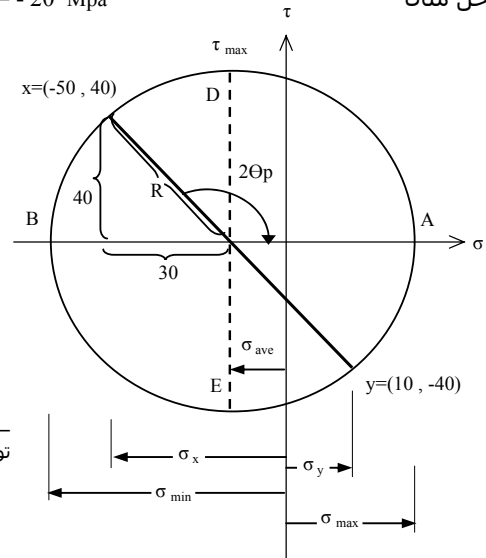
$$\sigma_{\max} = (\sigma_{ave} + R) = 30 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{\min} = (\sigma_{ave} - R) = -70 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{\max} = R = 50 \text{ Mpa}$$

$$2\theta_p = \tan^{-1} (40 / 30) = 126.9^\circ$$

حل مثال



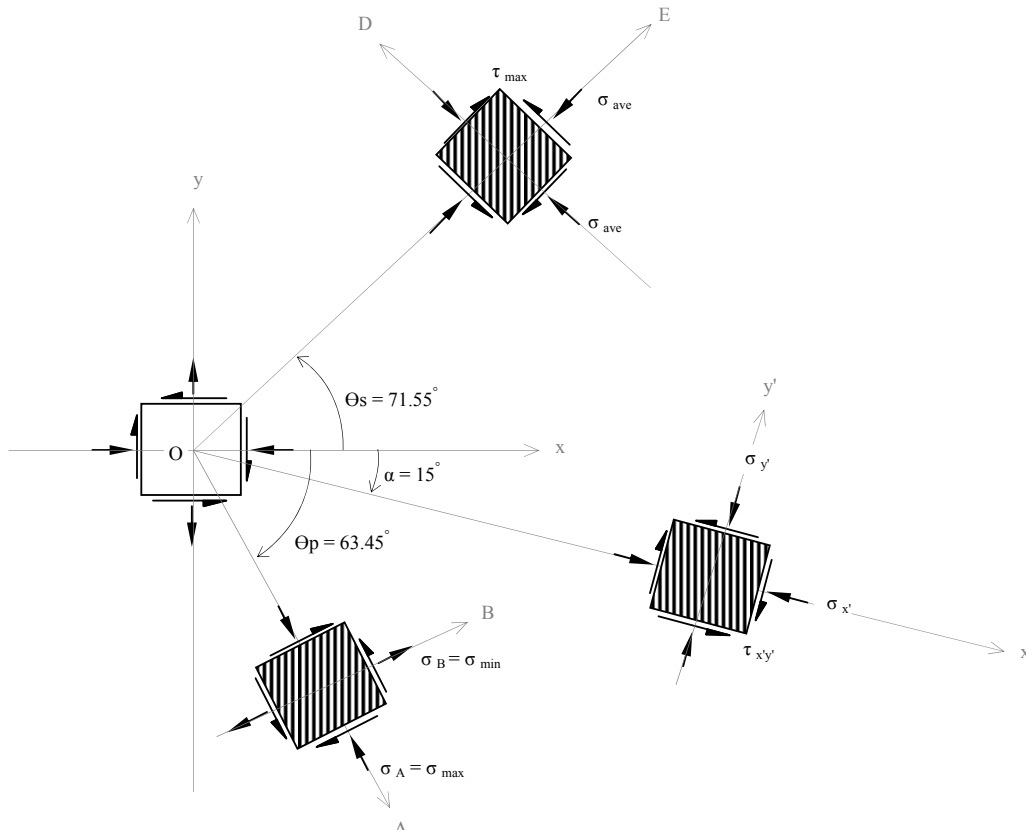
_ اکنون تنشها را پس از ۱۵ درجه دوران بدست می آوریم :
توجه : می دانیم که ۱۵ درجه دوران المان ، در روی دایره مور دو برابر خواهد بود .

$$\tau_{x'y'} = R \cdot \sin (2\theta_p - 30) = 50 \times \sin 96.9 = 49.64 \text{ Mpa}$$

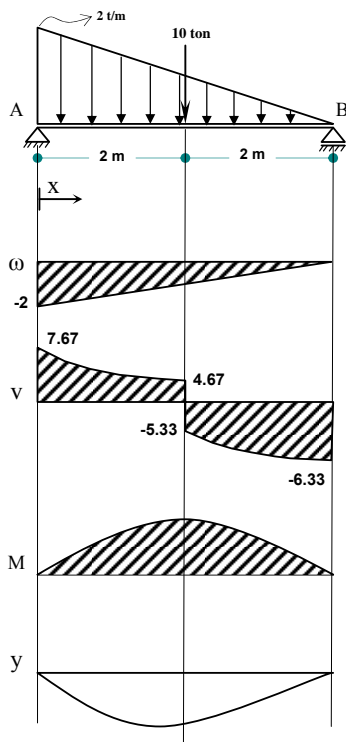
$$\sigma_{x'} = (R \cdot \cos 96.9) - 20 = -6 - 20 = -26 \text{ Mpa}$$

$$\tan 96.9 = [2 \tau_{x'y'} / (\sigma_{x'} - \sigma_{y'})] \rightarrow -26 - \sigma_{y'} = 99.28 / -8.26 \rightarrow \sigma_{y'} = -14 \text{ Mpa}$$

_ حال تنشها را در حالتهاى مختلف روی المان نشان می دهیم . توضیح اینکه المانها حرکت انتقالی ندارند و فقط به خاطر درک بهتر مساله آنها را با فاصله از محل اصلی شان ترسیم می کنیم :



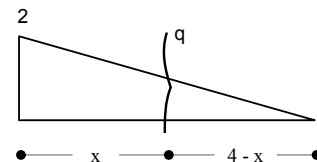
۹ - مطلوب است تحلیل شیب و خیز در تیر مقابل .



$$R_A = 7.67 \text{ ton} , R_B = 6.33 \text{ ton}$$

$$2/4 = q/(4-x) \rightarrow q = 2 - 0.5x$$

$$\omega = -q = 0.5x - 2$$



_ به ازای هر بار متمرکز یک معادله به معادلات (V, M, y, θ) اضافه می شود .
(در این مثال برای هر کدام دو معادله خواهیم داشت .)

① $0 \leq x \leq 2$

$$V_1 = \int \omega dx = \int [(1/2)x - 2] dx = (1/4)x^2 - 2x + C$$

$$\text{If } x = 0 \rightarrow V_1 = C = 7.67 \rightarrow V_1 = (1/4)x^2 - 2x + 7.67$$

② $2 \leq x \leq 4$

$$V_2 = \int \omega dx - 10 = \int [(1/2)x - 2] dx - 10$$

$$\rightarrow V_2 = (1/4)x^2 - 2x + C_1 - 10$$

$$\text{If } x = 4 \rightarrow V_2 = -6.33$$

$$\rightarrow -6.33 = (1/4)(4)^2 - 2(4) + C_1 - 10 \rightarrow C_1 = 7.67 \rightarrow V_2 = (1/4)x^2 - 2x - 2.33$$

① $\begin{cases} V_{(0)} = 7.67 \text{ ton} \\ V_{(2)} = 4.67 \text{ ton} \end{cases}$

② $\begin{cases} V_{(2)} = 7.67 \text{ ton} \\ V_{(4)} = 4.67 \text{ ton} \end{cases}$

① $M_1 = \int V_1 dx = (1/12)x^3 - x^2 + 7.67x + C_2$, If $x = 0 \rightarrow M_1 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow M_1 = (1/12)x^3 - x^2 + 7.67x$

② $M_2 = \int V_2 dx = (1/12)x^3 - x^2 - 2.33x + C_3$, If $x = 4 \rightarrow M_2 = 0 \rightarrow C_3 = 20 \rightarrow M_2 = (1/12)x^3 - x^2 - 2.33x + 20$

① $EI\theta_1 = \int M_1 dx = (1/48)x^4 - (1/3)x^3 + (7.67/2)x^2 + C_4$

$$EIy_1 = (1/240)x^5 - (1/12)x^4 + (7.67/6)x^3 + C_4x + C_5$$
 , If $x = 0 \rightarrow y_1 = 0 \rightarrow C_5 = 0$

② $EI\theta_2 = (1/48)x^4 - (1/3)x^3 - (2.33/2)x^2 + 20x + C_6$

$$EIy_2 = (1/240)x^5 - (1/12)x^4 - (2.33/6)x^3 + 10x^2 + C_6x + C_7$$

_ اکنون با شرایط مرزی مجهولات را بدست می آوریم :

② If $x = 4 \rightarrow y_2 = 0 \rightarrow (1/240)(4)^5 - (1/12)(4)^4 - (2.33/6)(4)^3 - 10(4)^2 + C_6(4) + C_7 = 0 \rightarrow 4C_6 + C_7 + 118.08 = 0$

If $x = 2 \rightarrow \theta_1 = \theta_2 \rightarrow (1/48)(2)^4 - (1/3)(2)^3 - (7.67/2)(2)^2 + C_4 = (1/48)(2)^4 - (1/3)(2)^3 - (2.33/2)(2)^2 + 20(2) + C_6 \rightarrow C_4 = 20 + C_6$

If $x = 2 \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow (1/240)(2)^5 - (1/12)(2)^4 - (7.67/6)(2)^3 + C_4(2) = (1/240)(2)^5 - (1/12)(2)^4 - (2.33/6)(2)^3 + 10(2)^2 + C_6(2) + C_7$
 $\rightarrow C_4 = 20 + C_6$

_ حال با جاگذاری فرمولها ، مجهولات را بدست می آوریم :

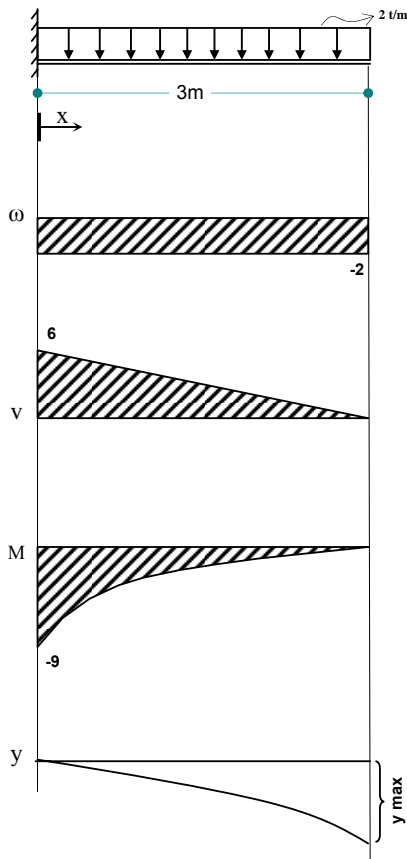
$$2(20 + C_6) - 2C_6 - C_7 = 26.67 \rightarrow C_7 = 13.33$$

$$4C_6 + 13.33 + 118.08 = 0 \rightarrow C_6 = -32.85$$

$$C_4 = 20 - 32.85 = -12.85$$

خیز ماکزیمم در این مساله از روش آزمون - خطا بدست خواهد آمد .

۱۰ - تغییر مکان ناشی از خمش در کنسول مقابل را بررسی کنید .



$$R_A = 6 \text{ ton} \quad , \quad \omega = -q = -2$$

$$V = \int \omega \, dx + C = -2x + C \quad , \quad \text{If } x = 0 \rightarrow V = 6 \rightarrow C = 6$$

$$\rightarrow V_{(x)} = -2x + 6 \quad \begin{cases} V_{(0)} = 6 \\ V_{(3)} = 0 \end{cases}$$

$$M = \int (-2x + 6) \, dx + C_1 = -x^2 + 6x + C_1 \quad , \quad \text{If } x = 3 \rightarrow M = 0 \rightarrow C_1 = -9$$

$$\rightarrow M_{(x)} = -x^2 + 6x - 9 \quad \begin{cases} M_{(0)} = -9 \\ M_{(3)} = 0 \end{cases}$$

$$EI\theta = \int M \, dx + C_2 = -(1/3)x^3 + 3x^2 - 9x + C_2 \quad , \quad \text{If } x = 0 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\rightarrow EI\theta = -(1/3)x^3 + 3x^2 - 9x$$

(شیب ماکزیمم در انتهای تیر طره ای حادث میشود)

$$\theta_{\max} = \theta_{(3)} = (-9 + 27 - 27) / EI \rightarrow \theta_{\max} = (-9 / EI)$$

$$EIy = -(1/12)x^4 + x^3 - 4.5x^2 + C_3 \quad , \quad \text{If } x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$\rightarrow EIy = -(1/12)x^4 + x^3 - 4.5x^2$$

(خیزماکزیمم نیز در انتهای تیر طره ای حادث میشود)

$$\rightarrow y_{\max} = y_{(3)} = (-6.75 + 27 - 40.5) / EI \rightarrow y_{\max} = (-20.25 / EI)$$

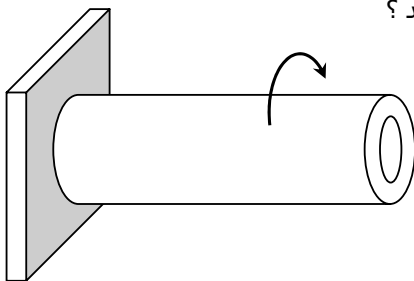
پیچش در مقاطع

۱۱ - با توجه به اطلاعات داده شده مطلوب است :

الف) لنگر پیچشی (T) ؟

ب) اندازه زاویه ϕ در حالی که تنش قسمت توخالی شفت ۷۰ مگا پاسگال باشد ؟

قطر بزرگ ۶۰ و قطر کوچک ۴۰ میلیمتر ، طول شفت ۱۵۰ سانتیمتر
($\phi = 2^\circ$, $G = 80 \text{ GP}$)



حل مثال :

$$\boxed{\phi = TL / GJ} \rightarrow T = (GJ \phi) / L$$

قسمت الف :

$$\phi = 2 \times 2\pi / 360 = 34.9 \times 10^{-3} \text{ Rad} \rightarrow \text{تبدیل } \phi \text{ به رادیان}$$

$$J = \pi/2 (C_2^4 - C_1^4) = 3.14/2 [(30 \times 10^{-3})^4 - (20 \times 10^{-3})^4] = 102.1 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$T = [(80 \times 10^9) (102.1 \times 10^{-8}) (34.9 \times 10^{-3})] / 1.5 = 1.9 \text{ KN.m}$$

$$\tau_{\min} = 70 \text{ MP} \rightarrow \phi = ? \quad , \quad \tau_{\min} = G \cdot \gamma_{\min} \rightarrow \gamma_{\min} = \tau_{\min} / G = 70 \times 10^6 / 80 \times 10^9$$

قسمت ب :

$$\rightarrow \gamma_{\min} = 8.75 \times 10^{-4} \text{ Rad} \quad \rightarrow \phi = (L \cdot \gamma_{\min}) / C_1 = 1.5 \times 8.75 \times 10^{-4} / 20 \times 10^{-3} = 6.56 \times 10^{-2} \text{ Rad} = 3.76^\circ$$