

استدلال ۱- خارج از کشور

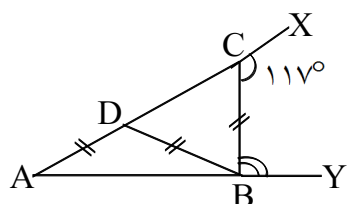
۱- در مثلثی زوایای A و B و C به نسبت ۷ و ۴ و ۱ تقسیم شده‌اند. زاویه‌ای که نیمساز داخلی A با نیمساز خارجی B می‌سازد، چند درجه است؟

۱۵° (۴)

۷۵° (۳)

۵۲/۵° (۲)

۳۵° (۱)



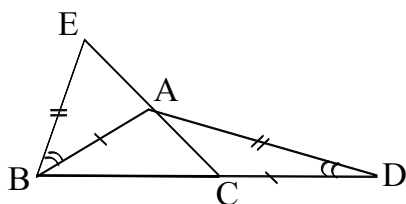
۲- در شکل مقابل $\angle BCX = 117^\circ$. زاویه‌ی $\angle CBY$ چند درجه است؟

۹۴/۵ (۲)

۹۳ (۱)

۹۶ (۴)

۹۵/۵ (۳)



۳- با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

$AB = AC$ (۱)

$AB = BC$ (۲)

$AE = BC$ (۳)

$AE = AC$ (۴)

۴- مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیر قائمه‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است، زاویه‌ی بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ی کوچک‌تر است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷/۵ (۲)

۷ (۱)

۵- یک مثلث متساوی‌الاضلاع به سه مثلث هم‌نهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث هم‌نهشت کدام است؟

۱۲۰ و ۳۰ و ۳۰ (۴)

۹۰ و ۶۰ و ۳۰ (۳)

۹۰ و ۳۰ و ۳۰ (۲)

۶۰ و ۶۰ و ۶۰ (۱)

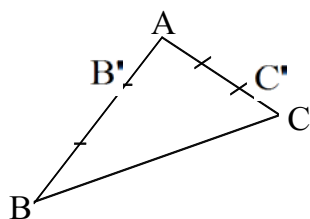
۶- در شکل $BB' = 2AB'$ و $AC' = 2CC'$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $AB'C'$ است؟

۶ (۲)

۹ (۱)

$\frac{9}{2}$ (۴)

$\frac{9}{4}$ (۳)



جواب استدلال ۱- خارج از کشور

۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث مجموع زوایای داخلی 180° می شود، پس در مثلث ABC داریم:

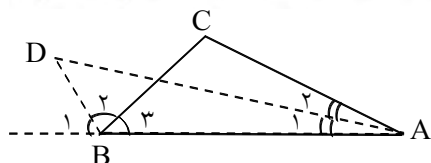
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = x + 4x + 7x = 180^\circ \rightarrow x = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 15^\circ \\ \hat{B} = 4 \times 15^\circ = 60^\circ \end{cases}$$

هم چنین داریم:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 180^\circ \rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 60^\circ$$

حال در مثلث ADB داریم:

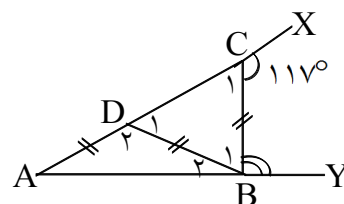
$$\hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{A}_1 + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow 60^\circ + 60^\circ + 7/5^\circ + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \hat{D} = 52/5^\circ$$



۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در شکل زیر، مثلث های ABD و BCD متساوی الساقین بوده و زوایای مجاور قاعده ی آنها برابرند. با توجه به این توضیح داریم:

$$\hat{BCX} = 117^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 63^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 63^\circ \Rightarrow$$

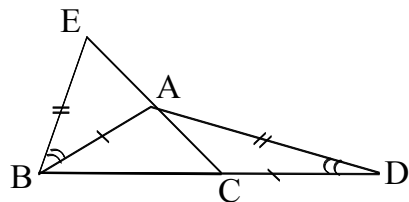
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (63^\circ + 63^\circ) = 54^\circ$$



$$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_2 \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}_1} 2\hat{B}_2 = 63^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 = 31/5^\circ$$

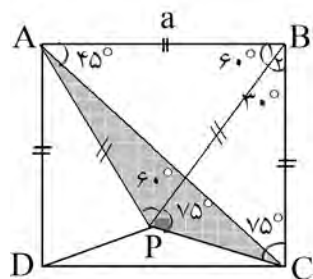
$$\Rightarrow \hat{CBY} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 180^\circ - (54^\circ + 31/5^\circ) = 180^\circ - 85/5^\circ = 94/5^\circ$$

۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث ADC و ABE به حالت «ضرض» هم نهشت هستند. بنابراین



$$AE = AC$$

۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مثلث متساوی الاضلاعی را در درون مربع طوری قرار می دهیم که در یک ضلع مشترک باشند. حال با توجه به شکل مقابل داریم:

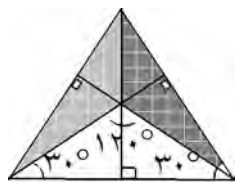


چون مثلث BPC متساوی الساقین است ($BP = BC$)، نتیجه می گیریم زوایای مجاور قاعده ی این مثلث هر کدام برابر $\frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ می باشند. یعنی:

$$\widehat{BPC} = \widehat{BCP} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{BPC} + \widehat{APB} = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \text{ (زاویه ی بزرگ تر)}$$

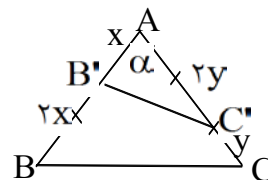
بنابراین نسبت زاویه ی بزرگ تر به زاویه ی کوچک تر در مثلث APC برابر با $\frac{135^\circ}{75^\circ} = 9$ است. (توجه کنید که زاویه ی دیگر مثلث APC (زاویه ی متوسط) برابر با 30° است.)

۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. برای این که یک مثلث متساوی الاضلاع را به سه مثلث هم نهشت (متساوی) تقسیم کنیم. باید از محل هم رسی میانه ها که همان محل هم رسی نیمسازها، عمود منصف ها و ارتفاع ها می باشد، سه خط به سه رأس این مثلث وصل کنیم. با کمی دقت به راحتی پی می بریم زوایای داخلی این سه مثلث هم نهشت برابر 30° و 30° و 120° است.



۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه ی بین آنها، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}(rx)(ry)\sin\alpha}{\frac{1}{2}x(ry)\sin\alpha} = \frac{9}{2}$$



استدلال ۱- سنجش

۱- از به هم پیوستن اوساط اضلاع چهار ضلعی محاط در دایره کدام چهار ضلعی حاصل می شود؟
 (۱) مستطیل (۲) متوازی الاضلاع (۳) چهار ضلعی محاطی (۴) چهار ضلعی محیطی

۲- زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۵ و ۴ و ۱ می باشد. نوع مثلث کدام است؟
 (۱) منفرجه الزاویه (۲) متساوی الساقین (۳) هر سه زاویه حاده (۴) قائم الزاویه

۳- اضلاع مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و $\sqrt{3}$ است، بزرگترین زاویه آن چند درجه است؟
 (۱) 75° (۲) 105° (۳) 90° (۴) 120°

۴- زاویه های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ است. ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟
 (۱) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵- در مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ قاعده BC از هر دو طرف با اندازه های برابر تا M و N امتداد می دهیم. اگر در مثلث AMN کوچکترین زاویه 25° درجه باشد، بزرگترین زاویه آن چند درجه است؟
 (۱) 110° (۲) 125° (۳) 130° (۴) 120°

۶- دو زاویه از مثلثی برابر 50° درجه است. نیمساز زاویه خارجی یکی از زاویه ها با امتداد ضلع مقابل زاویه ای برابر چند درجه می سازد؟
 (۱) 15° (۲) 20° (۳) 25° (۴) 30°

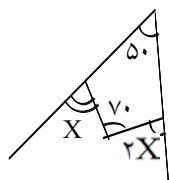
۷- اندازه زاویه های مثلثی 35° و 55° است، زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع آن چند درجه است؟
 (۱) 10° (۲) 15° (۳) 20° (۴) 25°

۸- با رسم دو قطر از یک پنج ضلعی منتظم، کدام چهار ضلعی محدب در داخل آن ایجاد می شود؟
 (۱) لوزی (۲) متوازی الاضلاع (۳) دوزنقه (۴) مستطیل

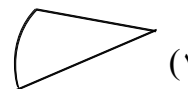
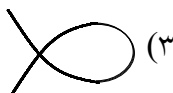
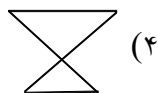
۹- در مثلثی اندازه ی دو زاویه 40° و 80° است. با امتداد ضلع بزرگتر، مثلث متساوی الساقینی با ساق ضلع کوچکتر از مثلث مفروض می سازیم، کوچکترین زاویه ی ایجاد شده چند درجه است؟
 (۱) 20° (۲) 25° (۳) 30° (۴) 40°

۱۰- در شکل مقابل زاویه X چند درجه است؟

(۱) 30° (۲) 35° (۳) 40° (۴) 45°



۱۱- کدام شکل زیر یک خم ساده است؟



۱۲- در یک پنج ضلعی مجموع زاویه‌های خارجی آن چند درجه است؟

(۴) ۴۵۰

(۳) ۴۰۰

(۲) ۳۶۰

(۱) ۲۷۰

۱۳- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۵ و ۳ و ۲ است، نسبت میانه وارد بر ضلع بزرگتر به همان ضلع کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۱۴- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $2AM = BC$ اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی C اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی

B است، زاویه‌ی C از این مثلث چند درجه است؟

(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

(۲) ۳۰

(۱) ۲۰

۱۵- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $BC = 2AM$ و اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی C دو و نیم برابر اندازه‌ی زاویه داخلی B است، زاویه‌ی C از این مثلث چند درجه است؟

(۴) ۵۰

(۳) ۴۰

(۲) ۳۰

(۱) ۲۰

۱۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ ضلع BC را از طرف C به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم در مثلث

$\triangle ABD$ نسبت زاویه‌ها کدام است؟

(۴) ۱ و ۲ و ۴

(۳) ۱ و ۳ و ۴

(۲) ۲ و ۳ و ۵

(۱) ۱ و ۲ و ۳

۱۷- با رسم دو قطر از یک پنج ضلعی منتظم کدام چهار ضلعی محدب در داخل آن ایجاد می‌شود؟
(۱) دوزنقه (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) لوزی

۱۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ضلع BC را از طرف C به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم در مثلث ABD نسبت زاویه‌ها کدام است؟

(۴) ۲ و ۳ و ۵

(۳) ۱ و ۳ و ۴

(۲) ۱ و ۲ و ۴

(۱) ۱ و ۲ و ۳

۱۹- در مثلث ABC داریم: $\hat{B} = \hat{C}$ ، ضلع AB را از طرف A به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم زاویه‌ی $\angle BCD$ چگونه است؟

(۴) نامشخص

(۳) قائمه

(۲) منفرجه

(۱) حاده

۲۰- در مثلثی به اضلاع $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و ۲ کسینوس زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{12}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

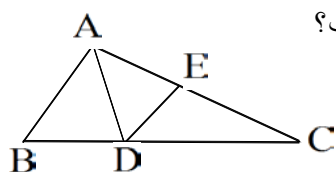
(۱) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

۲۱- در مثلث متساوی الساقین، یکی از ساق‌ها را به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم، نقطه حاصل را به رأس سوم مثلث وصل می‌کنیم. بزرگترین زاویه حاصل چگونه است؟
 (۱) حاده (۲) قائمه (۳) منفرجه (۴) بستگی به زاویه رأس دارد

۲۲- در مربعی به مساحت ۷۲ واحد مربع، خطی که رأس مربع را به وسط ضلع مقابل وصل کند قطر مربع را در M قطع می‌کند. فاصله M تا مرکز مربع کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) ۳

۲۳- از سه رأس یک مثلث خطوطی موازی اضلاع آن رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود، مساحت مثلث دوم حاصل چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۴- در دوزاویه‌ی مجاور و مکمل اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمسازها چند درجه است؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰



۲۵- در شکل مقابل $AB \parallel DE$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. کدام تساوی درست است؟

- (۱) $AD = DB$ (۲) $AD = AB$
 (۳) $EC = DC$ (۴) $DE = AE$

۲۶- در دو زاویه‌ی مجاور و متمم اندازه‌ی یکی سه برابر دیگری است. زاویه‌ی بین نیمساز آن‌ها چند درجه است؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۶۰

۲۷- در یک مثلث قائم الزاویه نیمسازهای دو زاویه‌ی حاده با یکدیگر زاویه‌ای برابر چند درجه می‌سازند؟
 (۱) ۲۹۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۲۸- در یک مثلث متساوی الساقین یکی از ساق‌ها را از طرف رأس به اندازه‌ی خود امتداد داده و نقطه‌ی پایانی را به رأس سوم آن وصل می‌کنیم بزرگترین مثلث حاصل کدام نوع است؟
 (۱) قائم الزاویه (۲) منفرجه الزاویه (۳) متساوی الاضلاع (۴) نامشخص

۲۹- نیمسازهای داخلی دو زاویه از مثلثی با یکدیگر زاویه‌ی ۱۳۵ درجه می‌سازند، ارتفاع‌های این مثلث در کجا متقاطع‌اند؟
 (۱) بر رأس (۲) بیرون مثلث (۳) روی یک ضلع (۴) داخل مثلث

۳۰- در یک مثلث متساوی الساقین بزرگترین زاویه‌ی آن ۸۰ درجه است. بزرگترین ضلع را از دو طرف به اندازه‌ی ضلع مجاور خود امتداد می‌دهیم و دو نقطه‌ی حاصل را به رأس سوم مثلث وصل می‌کنیم. کوچکترین زاویه‌ی مثلث حاصل چند درجه است؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۳۱- دو زاویه‌ی مجاور مکمل یکدیگرند، اگر اندازه‌ی یکی بر حسب درجه برابر نصف اندازه‌ی دیگری بر حسب گراد باشد، زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه چند رادیان است؟

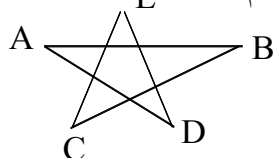
$$\frac{\pi}{2} \quad (1) \quad \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{3\pi}{7} \quad (3) \quad \frac{2\pi}{5} \quad (4)$$

۳۲- قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین را از دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها امتداد می‌دهیم رأس مثلث را به دو نقطه‌ی حاصل وصل می‌کنیم اگر کوچکترین زاویه در مثلث حاصل ۲۵ درجه باشد زاویه‌ی رأس مثلث اولیه چند درجه است؟

$$90 \quad (1) \quad 85 \quad (2) \quad 80 \quad (3) \quad 75 \quad (4)$$

۳۳- در مثلث ABC داریم $a = b \cos C + c \cos B$ نوع مثلث کدام است؟
(۱) قائم الزاویه (۲) متساوی الساقین (۳) منفرجه الزاویه (۴) نامشخص

۳۴- در شکل مقابل مجموع زاویه‌های A, B, C, D, E کدام است؟



$$135 \quad (1) \quad 180 \quad (2) \quad 270 \quad (3) \quad \text{نامشخص} \quad (4)$$

۳۵- در مثلث ABC داریم $AB = AC$ نقطه‌ی تلاقی نیمساز خارجی A نیمساز داخلی B را در D قطع می‌کند. طول پاره خط AD برابر کدام است؟

$$AB \quad (1) \quad BC \quad (2) \quad \text{شعاع دایره‌ی محیطی} \quad (3) \quad \text{شعاع دایره‌ی محاطی} \quad (4)$$

۳۶- در پنج ضلعی منظم امتداد اضلاع یک دیگر را در A و B و C و D و E قطع می‌کنند مجموع ۵ زاویه حاصل از امتداد اضلاع چند درجه است؟

$$120 \quad (1) \quad 135 \quad (2) \quad 180 \quad (3) \quad 370 \quad (4)$$

۳۷- در مثلث ABC، ارتفاع AH ارتفاع مثلث a, b, c اندازه اضلاع مثلث باشند. حاصل $b \cos C + c \cos B$ برابر کدام است؟

$$a \text{ ضلع} \quad (1) \quad \text{ارتفاع AH} \quad (2) \quad \text{تصویر AH روی ضلع a} \quad (3) \quad \text{نصف محیط} \quad (4)$$

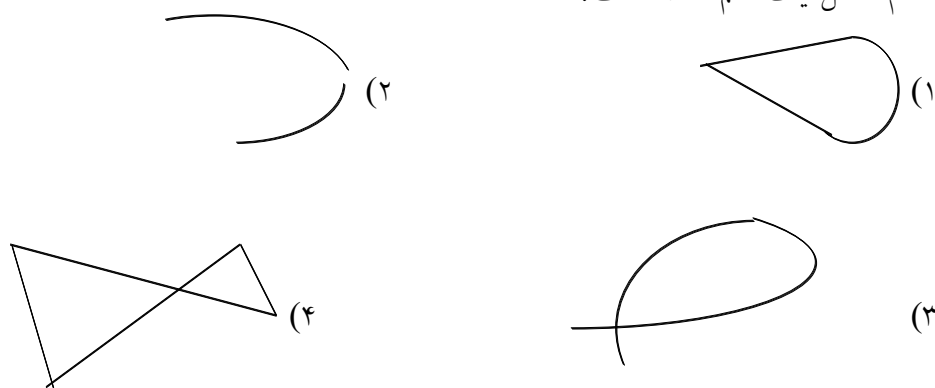
۳۸- در مثلث متساوی الساقین $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ قاعده را از دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. کوچکترین زاویه‌ی مثلث ADE چند درجه است؟

$$18 \quad (1) \quad 20 \quad (2) \quad 25 \quad (3) \quad 27 \quad (4)$$

۳۹- تعداد نقاط واقع در صفحه‌ی یک مثلث که از هر سه میانه‌ی آن به یک فاصله غیر صفر باشد کدام است؟

$$0 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

۴۰- کدام شکل یک خم ساده است؟



۴۱- در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵، یک رأس و وسط دو ضلع دیگر آن، سه رأس یک مثلثند. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) ۹ (۴) $\frac{12}{5}$

۴۲- در مثلثی $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{B} = 75^\circ$ و $a = \sqrt{6}$ ، اندازه‌ی ضلع c چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۳- در یک چهارضلعی اندازه دو زاویه مقابل ۵۰ و ۷۰ درجه است. نسبت دو زاویه خارجی دیگر، ۱ به ۲ می‌باشد، بزرگ‌ترین زاویه‌ی این چهار ضلعی چند درجه است؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۴۰

۴۴- محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $6\sqrt{3}$ واحد است، مساحت آن چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۴۵- در مثلث ABC نقطه M وسط BC است و $BC = 2AM$ ، اندازه زاویه خارجی \hat{C} دو و نیم برابر اندازه زاویه داخلی B است. زاویه C از این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۶۰

۴۶- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ضلع BC را از طرف C به اندازه خود تا D امتداد می‌دهیم در مثلث ABD نسبت زاویه‌ها کدام است؟

- (۱) ۱، ۲، ۳ (۲) ۱، ۲، ۴ (۳) ۱، ۳، ۴ (۴) ۲، ۳، ۵

۴۷- از برخورد نیمسازهای داخلی کدام چهارضلعی، مستطیل ایجاد می‌شود؟

- (۱) دوزنقه (۲) محاط در دایره (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) محیط بر دایره

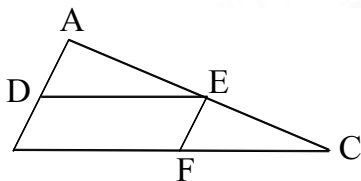
۴۸- در ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه نسبت قاعده‌ها $\frac{2}{3}$ است. وسط ساق قائم به وسط قاعده‌ی کوچک تر وصل شده‌است. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه‌ی اصلی است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{10}$

۴۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌ها ۵۲ درجه است، زاویه‌ی بین وتر و میانه وارد بر آن چند درجه است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۷۶ (۴) ۷۸

۵۰- در شکل مقابل چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. $AD = ۸$ و $DE = ۶$ و $FC = ۳$ محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

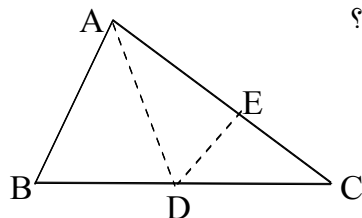
۵۱- از رأس یک مثلث خطوطی موازی اضلاع آن رسم می‌کنیم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۲- در دو زاویه‌ی مجاور و مکمل اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است، زاویه‌ی بین نیمسازها چند درجه است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۵۳- در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A و $DE \parallel AB$ ، کدام تساوی درست است؟



- (۱) $AD = AB$
(۲) $AD = DB$
(۳) $EC = DC$
(۴) $DE = AE$

۵۴- در دو زاویه‌ی مجاور و متمم اندازه‌ی یکی سه برابر دیگری است زاویه بین نیمساز آنها چند درجه است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۴۰

۵۵- اگر زاویه‌ی خارجی در هر رأس n ضلعی منتظم، ۱۵ درجه باشد، n کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۵ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۵۶- زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۱، ۱ و ۳ هستند. ضلع بزرگ‌تر را از هر دو طرف به اندازه‌ی ضلع دیگر امتداد می‌دهیم. دو نقطه‌ی حاصل را به رأس سوم وصل می‌کنیم. بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث حاصل چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی آن است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۵۷- در یک متوازی‌الاضلاع یک ضلع ۳ برابر ضلع دیگر است، خط گذرا بر محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع را به دو دوزنقه تقسیم می‌کند، اگر نسبت مساحت دو دوزنقه K باشد، تغییرات K کدام است؟

$$(1) K = 1 \quad (2) K = \frac{2}{3} \quad (3) \frac{2}{3} \leq K \leq 1 \quad (4) \frac{2}{3} < K \leq 1$$

۵۸- زاویه‌ی مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند، اگر کوچک‌ترین ضلع مثلث ۴ واحد باشد، ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 4 \quad (3) 2\sqrt{3} \quad (4) 4\sqrt{3}$$

۵۹- سه نقطه‌ی $A(-1, 7)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D کدام است؟

$$(1) (5, 6) \quad (2) (2, 9) \quad (3) (2, 10) \quad (4) (3, 10)$$

۶۰- کدام بیان برای درک شهودی نادرست است؟
(۱) استدلال حتمی (۲) استدلال موقت (۳) دانش غریزی (۴) احساس بدون استدلال

۶۱- در مثلث ABC رابطه‌ی $\sin A = 2 \sin B \cos C$ بین زاویه‌ها برقرار است. نوع مثلث کدام است؟
(۱) قائم‌الزاویه (۲) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الساقین (۴) غیر مشخص

۶۲- در مثلث ABC داریم $a = 2b = 6$, $c = 3b - 1$ نیمساز خارجی زاویه A امتداد ضلع مقابل را در D قطع کرده است DC چقدر است؟

$$(1) 3/2 \quad (2) 3/5 \quad (3) 3/6 \quad (4) 3/7$$

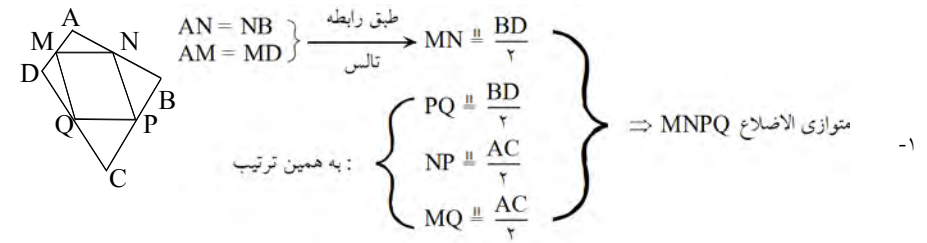
۶۳- در مثلث ABC از نقطه D محل تلاقی نیمساز زاویه A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن دو ضلع را در M , N قطع کند AD , MN نسبت بهم کدام وضع را دارند؟
(۱) فقط عمود بر هم (۲) فقط منصف هم (۳) زاویه بین آنها مکمل \hat{A} (۴) عمود منصف هم

۶۴- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ و $A = 42^\circ$ است)، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی E امتداد می‌دهیم. A را به E وصل می‌کنیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی بزرگ‌ترین مثلث حاصل چند درجه است؟
(۱) ۳۴ (۲) ۳۴/۵ (۳) ۳۵/۵ (۴) ۳۶

۶۵- نقطه‌ی M درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $6\sqrt{3}$ قرار دارد. مجموع فواصل M از سه ضلع این مثلث کدام است؟

$$(1) 6 \quad (2) 9 \quad (3) 4\sqrt{3} \quad (4) 4 + 3\sqrt{3}$$

جواب استدلال ۱ - سنجش



بنابراین ۴ ضلعی $ABCD$ دارای هر ویژگی که باشد، $MNPQ$ همواره متوازی الاضلاع خواهد بود و به خواص ۴ ضلعی $ABCD$ بستگی ندارد بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۲- مجموع زوایای داخلی مثلث برابر 180° است. زوایای این مثلث برابر k ، $2k$ و $5k$ می باشد.

$$k + 2k + 5k = 180 \Rightarrow k = 18 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = k = 18 \\ \beta = 2k = 36 \\ \gamma = 5k = 90 \end{cases}$$

یکی از زوایای مثلث 90° بوده و در نتیجه مثلث قائمه خواهد بود. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۳- طول اضلاع مثلث عبارتند از: k ، $2k$ و $\sqrt{3}k$. مشاهده می شود که رابطه فیثاغورث بین ۳ ضلع مثلث برقرار است در

$$(2k)^2 = (\sqrt{3}k)^2 + k^2$$

نتیجه، مثلث قائمه بوده و بزرگترین زاویه آن برابر 90° خواهد بود.

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۴- اگر زاویه کوچکتر مثلث را برابر x اختیار کنیم ۲ زاویه دیگر $2x$ و $3x$ خواهند بود. داریم:

$$3x + 2x + x = 180 \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} A = x = 30^\circ \\ B = 2x = 60^\circ \\ C = 3x = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{مثلث } ABC \text{ قائم الزاویه است}$$

ضلع متوسط AC روبرو به زاویه 60° است داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ CN = BM \\ \hat{C}_1 = \hat{B}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ACN} = \hat{ABM} \Rightarrow \Delta_{AMN} \text{ متساوی الساقین است}$$

$$\hat{M} = \hat{N} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 180 - (\hat{M} + \hat{N}) = 130^\circ$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

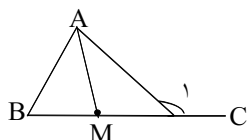
۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر C, B, A زاویای این مثلث باشند داریم.

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{2+3+5} = \frac{180}{10} = 18 \quad \begin{cases} A = 36 \\ B = 54 \\ C = 90 \end{cases}$$

پس مثلث \widehat{ABC} قائم الزاویه است و در این مثلث میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

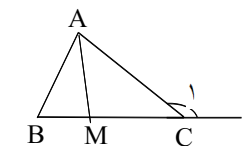
راه حل: چون $AM = \frac{BC}{2}$ پس زاویه A قائمه است.



$$\widehat{C}_1 = 2/5 \widehat{B} \Rightarrow 90 + B = 2/5 B \Rightarrow 1/5 B = 90 \Rightarrow B = 450$$

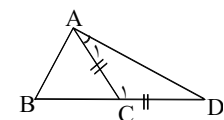
$$B + C = 90 \Rightarrow C + 450 = 90 \Rightarrow C = 360$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس. از آنجاییکه



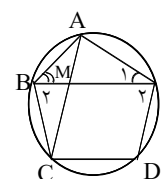
$$\widehat{C}_1 = 2/5 \widehat{B} \Rightarrow 90 + B = 2/5 B \Rightarrow 1/5 B = 90 \Rightarrow B = 450$$

$$B + C = 90 \Rightarrow C + 450 = 90 \Rightarrow C = 360$$



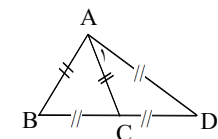
$$\widehat{C}_1 = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D} = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BAD} &= 60 + 30 = 90 \\ \widehat{B} &= 60 \\ \widehat{D} &= 30 \end{aligned} \right\} \text{زوایا با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسبند}$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم دایره محیطی پنج ضلعی داریم:

$$\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \text{دوازده } BEDC \quad \left. \begin{aligned} &\text{دوازده } MEDC \\ &ED = BC \end{aligned} \right\} \text{لوزی}$$



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث \widehat{ACD} مثلث متساوی الاضلاع با زاویه راس

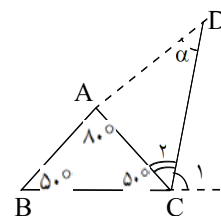
۱۲۰ درجه می باشد. پس $\widehat{D} = 30 = \widehat{A}_1$ می باشد. پس زوایای مثلث \widehat{ABD}

عبارتند از: ۳۰ و ۶۰ و ۹۰ و این زوایا با اعداد ۱ و ۲ و ۳ متناسبند.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر زاویه ای که از برخورد نیمساز خارجی زاویه C با امتداد AB پدید می آید را α بنامیم، داریم:

$$C_1 = C_2 = \frac{180 - 50}{2} = 65$$

$$\widehat{ACD} : (\text{زاویه خارجی}) = C_2 + \alpha \Rightarrow 80 = 65 + \alpha \Rightarrow \alpha = 15$$

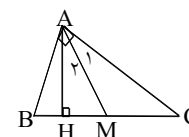


۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث مورد نظر قائم الزاویه است. و با توجه به این که میانه ی وارد بر وتر نصف وتر است، خواهیم داشت:

$$AM = MC \Rightarrow A_1 = C = 35$$

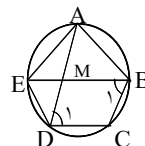
$$A_1 + A_2 + C = 90 \Rightarrow A_1 + A_2 = 90 - C = B = 55$$

$$\Rightarrow B - C = \widehat{A}_2 = 20^\circ$$



نکته: در مثلث قائم الزاویه بین ارتفاع و میانه ی وارد بر وتر برابر قدر مطلق تفاضل زوایای حاد می باشد.

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم دایره محیطی ۵ ضلعی داریم:

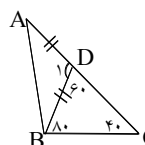


$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\widehat{CD} + \widehat{DE}}{2} \\ D_1 &= \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } BMCD$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AE} + \widehat{DE}}{2} \text{ و } \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AE}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{M}$$

در متوازی الاضلاع $BCDM$ چون دو ضلع مجاورش برابرند ($BC = CD$) بنابراین ۴ ضلعی لوزی خواهد بود. (متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاورش برابرند.)



$$\widehat{D}_1 = 180 - 60 = 120 \Rightarrow \widehat{A} = \frac{180 - A_1}{2} = 30^\circ$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموع دو زاویه خارجی $2x$ و x برابر مجموع زوایای داخلی 50 و 70 می باشد.

$$2x + x = 50 + 70 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل گزینه ۱ یک خم ساده بسته می باشد

گزینه ۲ خم نیست و گزینه های ۳ و ۴ خم ساده نیستند

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در هر n ضلعی محذب مجموع زوایای خارجی برابر 360 درجه است.

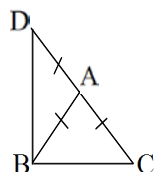
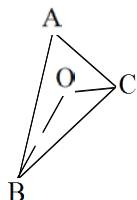
۲۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. همواره زاویه بین دو نیمساز ۲ زاویه متمم و مجاور نصف مجموع آنها است پس ۴۵ درجه است.



۲۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $A = 90^\circ$ است.

$$\alpha + \beta = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = \frac{90}{2} = 45 \Rightarrow \hat{O} = 180 - 45 = 135$$

نکته: زاویه بین نیمسازهای داخلی ۲ زاویه B و C همواره برابر $90^\circ + \frac{A}{2}$ است.

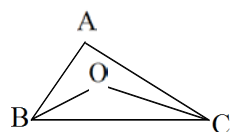


۲۸- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

(۱) قائم‌الزاویه \Rightarrow رأس B دیگر مقابل به قطر دایره است \Rightarrow دایره‌ای بر مرکز A و

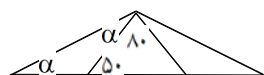
به شعاع ساق مثلث رسم شود.

(۲) $B = 90^\circ \Rightarrow$ میانه وارد بر ضلع CD نصف CD است. $AB = AC = AD \Rightarrow$



۲۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. $\hat{O} = 135 \Rightarrow \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 45 \Rightarrow A = 90^\circ$

مثلث قائمه بوده و نقطه‌ی تلاقی ارتفاع‌های مثلث بر رأس قائم (A) منطبق است.



۳۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

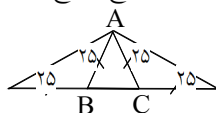
$$2\alpha = 50 \Rightarrow \alpha = 25$$

۳۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بین نیمسازهای ۲ زاویه مکمل و مجاور همواره برابر قائمه است.

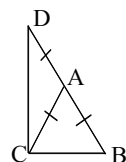
$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۳۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\hat{B} = \hat{C} = 50 \Rightarrow \hat{BAC} = 180 - (50 + 50) = 80$$



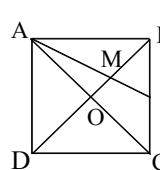
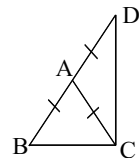
۱۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. $\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow AB = AC$. در مثلث BCD میانه‌ی وارد بر BD نصف آن است بنابراین مثلث قائمه است.



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \theta \Rightarrow 4 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

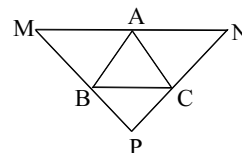
۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث BCD، AC میانه‌ی وارد بر ضلع BD بوده و خود نصف BD است بنابراین مثلث قائمه است.



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC، M مرکز ثقل است. $MO = \frac{1}{3}BO$

$$S = \sqrt{72} \Rightarrow AB = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow BO = 6 \Rightarrow MO = 2$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهار ضلعی‌های حاصله برای مثلث AMBC متوازی‌الاضلاع‌اند بنابراین ۴ مثلث برابرند مثلث حاصل ۴ برابر مثلث اولی است.

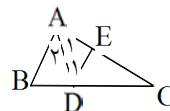


۲۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. زاویه‌ی بین نیمسازهای ۲ زاویه مکمل و مجاور همواره قائمه است.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

۲۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

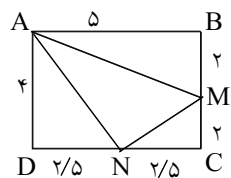
$$A_1 = A_2 = D_1 \Rightarrow AE = ED$$



۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها نقطه‌ای که از هر سه میانه ی مثلث به یک فاصله است، نقطه ی برخورد آن ها می‌باشد و این فاصله برابر صفر می‌باشد.

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گزینه ی ۲ خم نیست و گزینه‌های ۳ و ۴ خم ساده نیستند.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مستطیل ABCD، مساحت مثلث AMN مورد سوال است:



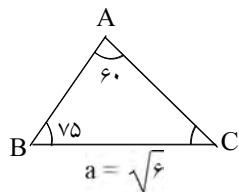
$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{MNC})$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = 20 - \left(5 + 5 + \frac{5}{2}\right) = 7\frac{1}{2}$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow[\hat{B} = 75^\circ]{\hat{A} = 60^\circ} \hat{C} = 45^\circ$$

با توجه به قضیه سینوس ها داریم:

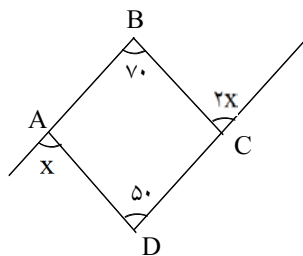


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 2$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض تست شکل مقابل را خواهیم داشت.

$$x + 2x = 70 + 50 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

پس زاویه داخلی A برابر ۱۴۰ درجه است و بزرگترین زاویه داخلی خواهد بود.



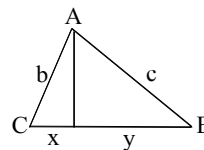
۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر a ضلع مثلث متساوی الاضلاع باشد.

$$\text{محیط} = 3a \Rightarrow 3a = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

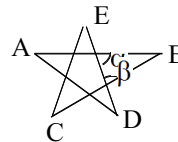
$$\text{مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در هر مثلث داریم:
 $x = b \cos C, y = c \cos B, x + y = a$

بنابراین نوع مثلث نامشخص است.

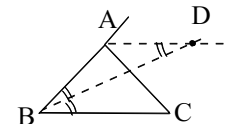


۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} A + D + \alpha = 180 \\ C + E + \beta = 180 \\ B + (180 - \alpha) + (180 - \beta) = 180 \end{cases} \Rightarrow A + B + C + D + E = 180$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



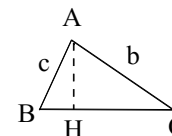
۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{هر زاویه پنج ضلعی منظم} = \frac{3 \times 180}{5} = 108^\circ \rightarrow \text{زاویه خارجی} = 72$$

$$A = 180 - 2(72) = 36 \rightarrow A + BC + D + E = 5 \times 36 = 180^\circ$$

$$C \cos B, CH = b \cos C, BH + CH = a$$

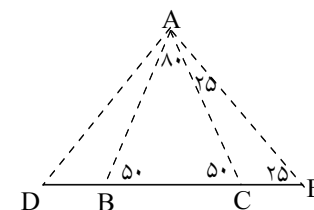
$$b \cos C + c \cos B = a$$



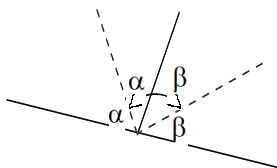
۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$C = \frac{180 - 80}{2} = 50, E = D = \frac{50}{2} = 25$$

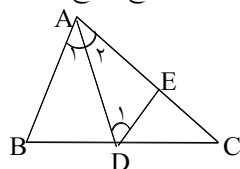


$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ$$



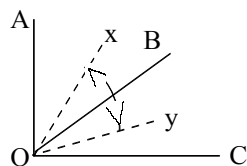
۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$(\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{D}_1 = \hat{A}_1) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow DE = AE$$

$$xoy = \frac{AOB}{2} + \frac{BOC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



۵۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{360}{n} = 15 \Rightarrow n = 24$$

۵۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

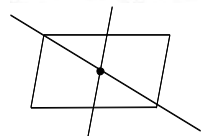
$$A = \frac{3 \times 180}{5} = 108$$

۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{BAC} = 108 + 18 + 18 = 144 \Rightarrow \frac{144}{18} = 8$$

همواره متوازی الاضلاع را نصف می کند لذا $K = 1$

۵۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



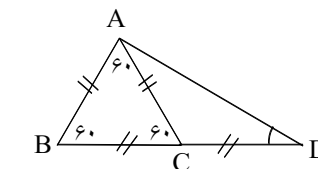
۵۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{180 \times 1}{6} = 30 \Rightarrow 30, 60, 90$$

$$4 \times 4 \sqrt{3} = ah \quad h = 2\sqrt{3}$$

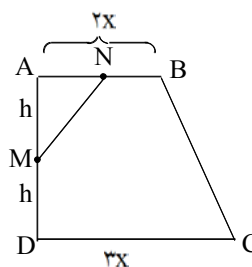
۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون میانه AM نصف BC است مثلث ABC قائم الزاویه است. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = 2/5B \\ \hat{C}_1 = 90 + \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow 2/5B = 90 + B \Rightarrow B = 60 \Rightarrow C = 30$$



۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث \widehat{ACD} متساوی الساقین است. پس: $\hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 30$. بنابراین اندازه ی زاویه های مثلث \widehat{ABD} برابر ۹۰ و ۶۰ و ۳۰ است.

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از برخورد نیمسازهای متوازی الاضلاع یک مستطیل حاصل می شود.

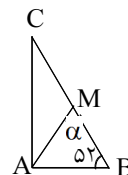


۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم N وسط AB و M وسط AD باشد.

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times x}{\frac{1}{2}(2h)(2x + 3x)} = \frac{x}{10x} = \frac{1}{10}$$

$$\alpha = 2(90 - 52) = 2(38) = 76$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

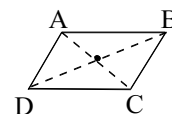
پس مثلث \widehat{AMC} متساوی الساقین است.

$$\frac{8}{x+8} = \frac{6}{6+3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 4 \quad \text{محیط متوازی الاضلاع} = 2(4+6) = 20$$

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴ برابر \Rightarrow ۴ مساحت برابرند.

۵۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



قطرها منصف اند

$$\begin{aligned} x_A + x_C &= x_B + x_D \Rightarrow -1 + 6 = 2 + x \\ y_A + y_C &= y_B + y_D \Rightarrow 0 + 7 = -3 + y \Rightarrow D(3, 10) \end{aligned}$$

۶۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. استدلال حتمی زیرا درک شهودی به خاطر خطای حواس پنج گانه، قابل اعتماد نیستند.

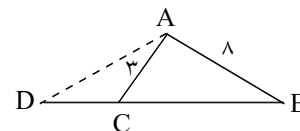
۶۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin(B + C) = 2 \sin B \cos C \Rightarrow \sin B \cos C - \cos B \sin C = 0 \Rightarrow \sin(B - C) = 0$$

$B = C$ متساوی الساقین

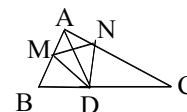
۶۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = 6, b = 3, c = 8$$



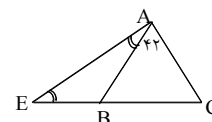
$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{DC}{5} = \frac{3}{8} \Rightarrow DC = \frac{3}{5} \times 6 = 3.6$$

۶۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در متوازی الاضلاع ANDM قطر AD نیمساز است لذا لوزی است دو قطر لوزی



عمود منصف یک دیگرند.

۶۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\hat{B} = \frac{180 + 42}{2} = \frac{138}{2} = 69 \Rightarrow E = 34/5$$

۶۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموع فواصل M از سه ضلع برابر ارتفاع می باشد.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} (6\sqrt{3}) = 9 \Rightarrow \text{مجموع فواصل} = 9$$

استدلال ۱- سراسری

۱- کدام عبارت زیر نادرست است؟

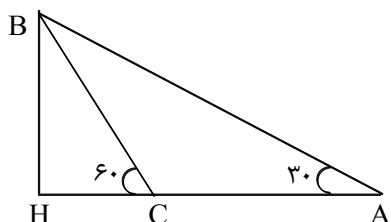
- (۱) در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از دو ضلع دیگر کوچکتر یا مساوی است.
- (۲) در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از میانه نظیر آن ضلع کوچکتر است.
- (۳) مثلثی هست که ارتفاع وارد بر یک ضلع آن از میانه نظیر آن ضلع کوچکتر است.
- (۴) مثلثی هست که ارتفاع وارد بر یک ضلع و عمود منصف همان ضلع دو خط موازی متمایز نیستند.

۲- اندازه ۳ زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع
- (۲) متساوی الساقین
- (۳) قائم الزاویه
- (۴) منفرجه الزاویه

۳- در شکل زیر زاویه A برابر ۳۰ درجه و زاویه C برابر ۶۰ درجه است اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد طول AH چند متر است؟

- (۱) ۷۵
- (۲) ۸۰
- (۳) ۸۵
- (۴) ۹۰



۴- در پنج ضلعی منتظم ABCDE اگر دو قطر BD و CE یکدیگر را در M قطع کنند. چهارضلعی ABME کدام است؟

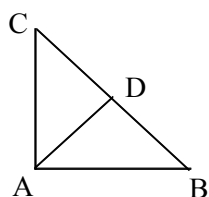
- (۱) مربع
- (۲) مستطیل
- (۳) لوزی
- (۴) دوزنقه متساوی الساقین

۵- مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع القاعده کدام چهارضلعی نمی تواند باشد؟

- (۱) مستطیل
- (۲) مربع
- (۳) لوزی
- (۴) دوزنقه متساوی الساقین

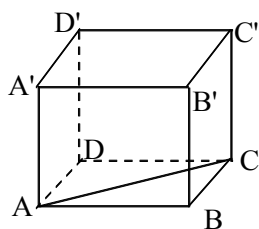
۶- در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه و مثلث ADB متساوی الاضلاع است. اگر $AC=6$ باشد طول وتر BC کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
- (۲) $5\sqrt{2}$
- (۳) $6\sqrt{2}$
- (۴) $5\sqrt{3}$



۷- در شکل مقابل صفحه‌ی گذرنده از AC (که از یالها نگذرد) سطح مکعب را در کدام چهار ضلعی قطع می کند؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین
- (۲) لوزی
- (۳) متوازی الاضلاع
- (۴) مستطیل



۸- دو زاویه‌ی A و B متمم اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A برابر $\frac{4}{9}$ اندازه مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

- (۱) ۲۷
- (۲) ۳۶
- (۳) ۶۳
- (۴) ۷۲

۹- چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی هر مستطیل همواره کدام است؟
 (۱) لوزی (۲) مربع (۳) مستطیل (۴) متوازی الاضلاع

۱۰- یکی از زاویه‌های مثلث متساوی الساقین برابر ۱۰۰ درجه است نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟
 (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰

۱۱- بر قاعده BC از مثلث متساوی الساقین ABC، دو نقطه M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $BM = NC$ این نقاط را به رأس A وصل می‌کنیم مثلث AMN همواره چگونه است؟
 (۱) غیر مشخص (۲) متساوی الاضلاع (۳) متساوی الساقین (۴) قائم الزاویه

۱۲- سه نقطه A (۰, -۱) و B (۳, ۱) و C (۲, -۴) سه رأس یک مثلث‌اند. این مثلث همواره چگونه است؟
 (۱) متساوی الاضلاع (۲) متساوی الساقین است ولی قائم الزاویه نیست
 (۳) قائم الزاویه و متساوی الساقین است (۴) قائم الزاویه است ولی متساوی الساقین نیست

۱۳- در مثلثی که $\widehat{A} = \widehat{B} = ۲۰^\circ$ و زاویه $\widehat{C} = ۳۰^\circ$ ، زاویه \widehat{B} چند درجه است؟
 (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۱۴- اگر P یعنی «چهارضلعی ABCD دو قطرش مساوی است» و Q یعنی «چهارضلعی ABCD مستطیل است» کدام گزاره درست است؟
 (۱) P شرط لازم و کافی برای Q است
 (۲) P شرط کافی برای Q است
 (۳) Q شرط کافی برای P است
 (۴) Q شرط لازم برای P است

۱۵- اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر کدام است؟
 (۱) نصف طول قاعده
 (۲) طول میانه یک ضلع دیگر
 (۳) طول شعاع دایره محیطی مثلث
 (۴) طول نیمساز زاویه مقابل به قاعده

۱۶- یک ساق مثلث متساوی الساقین را از طرف راس مثلث به اندازه خودش ادامه می‌دهیم، نقطه حاصل و قاعده مثلث چه نوع مثلثی تشکیل می‌دهد؟
 (۱) قائم الزاویه
 (۲) قائم الزاویه متساوی الساقین
 (۳) متساوی الساقین
 (۴) منفرجه الزاویه

۱۷- در مثلثی $A = \frac{\pi}{۲}$, $B = ۳C$ ، نسبت اضلاع $\frac{b}{c}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{۲} - ۱$ (۲) ۲ (۳) $۱ + \sqrt{۲}$ (۴) ۳

۱۸- در مثلث متساوی الساقین $\widehat{B} = \widehat{C}$ مقدار $\frac{b}{a} \cdot \sin \frac{A}{۲}$ چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۹- کدام چهار ضلعی الزاماً یک مربع است؟

- (۱) متوازی الاضلاعی که اقطارش عمود منصف هم باشند
- (۲) مستطیلی که بر یک دایره محیط شود
- (۳) لوزی که بر یک دایره محیط شود
- (۴) دوزنقه متساوی الساقینی که اقطارش عمود منصف هم باشند

۲۰- فصل مشترک هر صفحه با سطح منشوری که مقطع قائم آن مربع است، کدام چهار ضلعی است؟
 (۱) دوزنقه (۲) لوزی (۳) متوازی الاضلاع (۴) مستطیل

۲۱- در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB = AC)$ نیمساز خارجی \hat{A} و نیمساز داخلی \hat{B} در نقطه D متلاقض اند. طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

- (۱) AC
- (۲) طول نیمساز داخلی زاویه \hat{B}
- (۳) BC
- (۴) شعاع دایره محیطی

۲۲- یکی از زوایای مثلث متساوی الساقین برابر 100° است. نیمساز خارجی یکی از زاویه ها ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می کند؟

- (۱) 25°
- (۲) 30°
- (۳) 35°
- (۴) 40°

۲۳- نقطه ای در بیرون یک دایره به قطر ۱۰ واحد قرار دارد. با کدام استدلال می توان گفت که فاصله آن نقطه تا مرکز دایره بیشتر از ۵ واحد است؟

- (۱) درک شهودی
- (۲) استقرایی
- (۳) استنتاجی
- (۴) تمثیلی

۲۴- زاویه های مثلثی متناسب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ می باشد. اندازه کوچکترین زاویه خارجی این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۷۲
- (۲) ۸۲
- (۳) ۸۴
- (۴) ۹۶

۲۵- در مثلث متساوی الساقین ABC ($\hat{A} = 32^\circ$, $AC = AB$) قاعده BC را به اندازه ی ساق تا نقطه D امتداد می دهیم. زاویه \widehat{ADC} چند درجه است؟

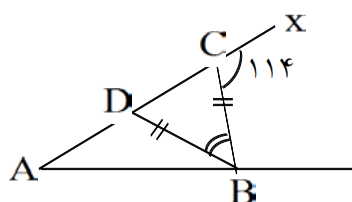
- (۱) 36°
- (۲) 34°
- (۳) 37°
- (۴) 39°

۲۶- در مثلث قائم الزاویه ای زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر برابر 26° درجه است. کوچکترین زاویه مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۴
- (۲) ۲۸
- (۳) ۳۲
- (۴) ۳۴

۲۷- از به هم وصل کردن وسط ضلع های مربعی یک مربع جدید ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع بزرگتر به کوچکتر کدام است؟

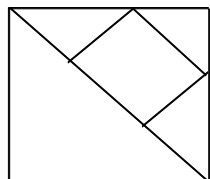
- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) ۲
- (۳) $\sqrt{3}$
- (۴) ۴



۲۸- در شکل مقابل زاویه ی $\widehat{BCX} = 114^\circ$ زاویه ی \widehat{CBD} چند درجه است؟

- (۱) ۴۴
(۲) ۴۶
(۳) ۴۸
(۴) ۵۲

۲۹- در شکل مقابل هر دو چهار ضلعی مربع اند، مساحت مربع بزرگتر چند برابر مساحت کوچکترین مثلث ها است؟



- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۱۸
(۴) ۲۴

۳۰- در مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد فاصله تلاقی میانه ها از بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

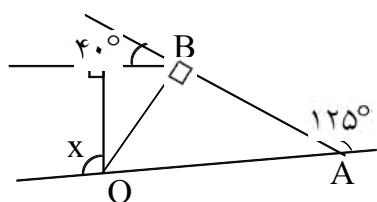
- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) $\frac{1}{6}$
(۳) $\frac{1}{8}$
(۴) ۲

۳۱- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{6}$ واحد را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم اندازه ضلع بزرگتر از یک مثلث همنهشت چقدر است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\sqrt{3}$

۳۲- در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خطهای $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می کنیم. اگر زاویه ی $\widehat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه ی \widehat{MAN} چند درجه است؟

- (۱) ۵۴
(۲) ۵۲
(۳) ۴۸
(۴) ۴۲

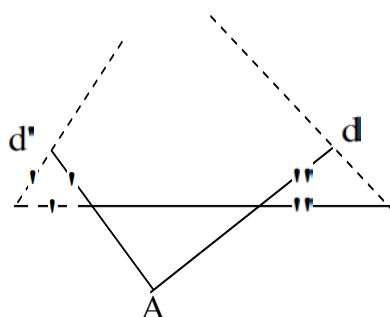


۳۳- در شکل مقابل $\widehat{A} = 125^\circ$ و $\widehat{B} = 40^\circ$ است، زاویه x چند درجه است؟

- (۱) ۱۰۵
(۲) ۱۱۰
(۳) ۱۱۵
(۴) ۱۲۵

۳۴- در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین اند. زاویه ی $\widehat{A} = 100^\circ$

دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع اند؟

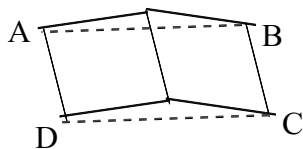


- (۱) ۲۰
(۲) ۵۰
(۳) ۴۵
(۴) ۴۰

۳۵- در یک دوزنقه ی متساوی الساقین، از برخورد نیمساز زاویه های داخلی، کدام چهار ضلعی حاصل می شود؟

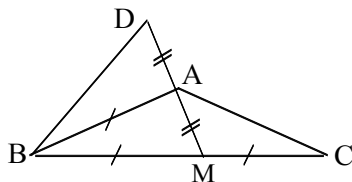
- (۱) مستطیل
(۲) محاطی
(۳) متوازی الاضلاع
(۴) لوزی

۳۶- در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی 60° درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟



- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۰۵
(۳) ۱۲۰
(۴) ۱۳۵

۳۷- در شکل مقابل، $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{ABC} چند درجه است؟



- (۱) ۳۹
(۲) ۵۶
(۳) ۵۸
(۴) ۶۱

جواب استدلال ۱- سراسری

۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است زیرا در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده با هم مساویند.

۲- زاویه‌های مثلث با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است پس یک زاویه برابر $5x$ یک زاویه برابر $4x$ و یک زاویه برابر x است.

$$\text{جمع زوایای داخلی مثلث} = 180 \Rightarrow 5x + 4x + x = 180 \Rightarrow 10x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{10} \Rightarrow x = 18$$

پس زاویه‌های مثلث برابر است با:

$$\begin{cases} 5 \times 18 = 90^\circ \\ 4 \times 18 = 72^\circ \\ 1 \times 18 = 18^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{چون یکی از زاویه‌ها ۹۰ درجه است پس مثلث قائم الزویه است.}$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.

۳- با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = 30^\circ \\ \hat{A}_1 = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{A} = 30 + \hat{B}_1 = 60 \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

$$ABC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow CB = CA = 50 \Rightarrow \hat{B}_2 = 90 - \hat{C} = 30^\circ$$

می‌دانیم در مثلث قائم الزویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است پس:

$$CH = \frac{1}{2}CB = 25 \Rightarrow AH = AC + CH = 75$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.

$$\hat{E}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2}, \hat{A} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE}}{2}$$

۴- داریم:

و چون همه کمانها برابرند. پس:

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{E}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE}}{2} = \frac{5\widehat{AB}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

در چهار ضلعی ABME مجموع دو زاویه مجاور ۱۸۰ می‌باشد پس ۴ ضلعی متوازی الاضلاع خواهد بود. لذا در هر پنج ضلعی منتظم هر قطر، موازی ضلعی از آن پنج ضلعی است که دو رأس آن ضلع در یک طرف قطر قرار دارند. پس: $AE \parallel BD, CE \parallel AB$ در نتیجه ABME متوازی الاضلاع است که دو ضلع AB و AE برابرند. پس متوازی الاضلاع اخیر لوزی است. یعنی گزینه ۳ صحیح است.

۵- اگر صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند، فصل مشترک‌های ایجاد شده که دو خط هستند موازیند. لذا در چهارضلعی ایجاد شده، اضلاع روبرو موازی هم هستند. پس چهارضلعی ایجاد شده، دوزنقه متساوی الساقین نمی‌تواند باشد. یعنی گزینه ۴ صحیح است.

۶- در مثلث متساوی الاضلاع همه زاویه‌ها برابر با 60° می‌باشد، پس:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۷- نکته: هرگاه صفحه‌ای دو صفحه موازی را قطع کند فصل مشترک‌های ایجاد شده همواره موازیند.

صفحه مار بر AC وجه A'B'C'D' را در پاره خط MN قطع می‌کند لذا $MN \parallel AC$. چون صفحه بر یالها نمی‌گذرد پس $MN < AC$ در نتیجه MNCA دوزنقه است و به دلیل C متقارن بودن شکل، یک دوزنقه متساوی الساقین است. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} &= 90^\circ \\ \hat{A} &= \frac{1}{9}(180 - B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 72^\circ \\ \hat{B} = 18^\circ \end{cases}$$

۹- مثلثهای NBC و QAD قائم الزویه و متساوی الساقین و برابر یکدیگر و همچنین مثلثهای MCD و PAB قائم الزویه و متساوی الساقین و برابر یکدیگر هستند. در روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \hat{P} = \hat{N} = \hat{M} = \hat{Q} &= 90^\circ \\ \left. \begin{aligned} MC &= MD \\ NC &= QD \end{aligned} \right\} &\Rightarrow MC - NC = MD - QD \Rightarrow MN = MQ \end{aligned}$$

پس شکل حاصل، مربع است و گزینه ۲ صحیح است.

۱۰- چون در هر مثلث فقط یک زاویه می‌تواند منفرجه باشد الزاما زاویه ۱۰۰ زاویه راس مثلث متساوی الساقین است. فرض

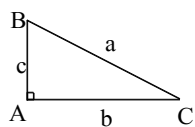
$$B = C = \frac{180 - 100}{2} = 40$$

می‌کنیم $A = 100$ است چون مثلث متساوی الساقین است پس $AB = AC$ در نتیجه $B = C = \frac{180 - 100}{2} = 40$ می‌باشد.

می‌دانیم نیمساز خارجی زاویه A با قاعده BC موازی است پس مورد سؤال تعیین زاویه نیمساز خارجی B با امتداد ساق AC است. در مثلث ABD داریم (طبق شکل):

$$\begin{aligned} A_1 &= 80 \\ B_1 &= \frac{140}{2} = 70 \\ D &= 180 - (70 + 80) = 30 \end{aligned}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

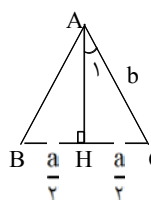


۱۷- طبق فرض:

$$\left. \begin{aligned} A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2} \\ B = rC \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = \frac{\pi}{1+r}, B = \frac{r\pi}{1+r}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \frac{r\pi}{1+r} = \sqrt{r+1}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۱۸- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، بر میانه قاعده و همچنین نیمساز زاویه رأس منطبق است.

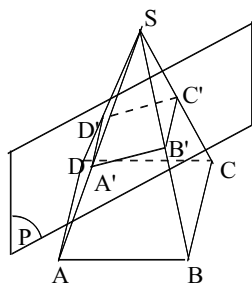
چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، AH میانه BC نیز می‌باشد، پس:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}, CH = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \sin A_1 = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۹- گزینه یک در لوزی نیز صادق است و الزاماً مربع را تشریح نمی‌کند. در گزینه ۲، مستطیلی که بتواند بر دایره محیط شود باید نیمساز زوایایش هم‌رس باشند که در اینصورت تبدیل به مربع می‌شود. پس گزینه ۲ مربع را توصیف می‌کند. هر لوزی می‌تواند بر یک دایره محیط‌شود، پس گزینه ۳ نیز صحیح نیست. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.



۲۰- فرض می‌کنیم صفحه P منشور SABCD را قطع کرده است و چهار ضلعی

A'B'C'D' را بوجود آورده است.

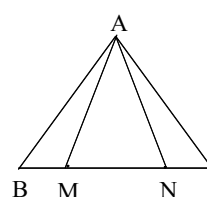
هرگاه صفحه موازی قاعده باشد سطح منشوری را به دو هرم متشابه تقسیم

می‌کند در آنصورت سطح مقطع مربع خواهد بود اما هرگاه صفحه موازی قاعده

نباشد، سطح مشترک حاصل یک متوازی الاضلاع خواهد بود. بنابراین مقطع

حاصل، همواره یا مربع و یا متوازی‌الاضلاع است. با توجه به اینکه مربع، خود

نوعی متوازی‌الاضلاع است، می‌توان نتیجه گرفت که شکل حاصل، همواره متوازی‌الاضلاع است. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۱۱- $\left\{ \begin{aligned} CN = BM \\ AC = AB \\ \hat{C} = \hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ANC}$ (ض ز ض)

با توجه به تساوی دو مثلث \widehat{AMB} و \widehat{ANC} به حالت (ض ز ض) دو ضلع نظیر در آنها یعنی AN و AM مساوی می‌شوند، بنابراین مثلث \widehat{AMN} متساوی‌الساقین می‌باشد. و گزینه ۳ صحیح است.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{13}$$

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{13}$$

$$|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{26}$$

با توجه به اندازه اضلاع مثلث چون $|AB| = |AC|$ است پس مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد و از طرفی چون اندازه سه ضلع در قضیه فیثاغورث یعنی $|AC|^2 + |AB|^2 = |BC|^2$ صدق می‌کند پس قائم‌الزاویه است. بنابراین مثلث ΔABC متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه می‌باشد. و گزینه ۳ صحیح است.

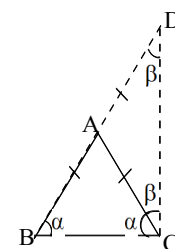
۱۳- می‌دانیم در هر مثلث مجموع ۳ زاویه برابر 180° است.

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{C} = 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} = 150^\circ \\ \hat{A} = 2\hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\hat{B} = 150^\circ \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۴- می‌دانیم که اگر چهارضلعی مستطیل باشد، دو قطرش برابر خواهند بود ولی عکس این موضوع صادق نیست. لذا گزاره شرطی چنین بیان می‌شود $Q \Rightarrow P$ یعنی Q شرط کافی برای P است. پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۱۵- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبقند. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۱۶- با توجه به شکل، در مثلث جدید (DBC): $AC = AD \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = \beta$
 $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$
 بنابراین مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود. پس گزینه ۱ جواب صحیح است.



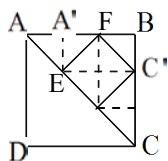
$$\frac{S}{S'} = \frac{a \times a}{\frac{a \times a}{2}} = 2$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$BCX = 114^\circ \Rightarrow \widehat{DCB} = 66^\circ$$

$$BC = BD \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{DCB} = 66^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 48^\circ$$



۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

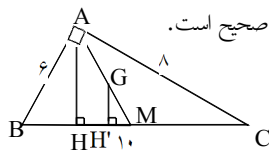
کوچکترین مثلث، مثلث \widehat{BFC} با تقسیم بندی شکل داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{BFC} &= \frac{1}{4} S_{ABC} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{4} S_{ABCD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{BFC} = \frac{1}{16} S_{ABCD}$$

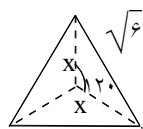
$$\Rightarrow S_{ABCD} = 16 S_{BFC}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{6 \times 8}{2} \\ S &= \frac{AH \times 10}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$$

$$\frac{GM}{AM} = \frac{GH'}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH' = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \times 4.8 = 1.6$$



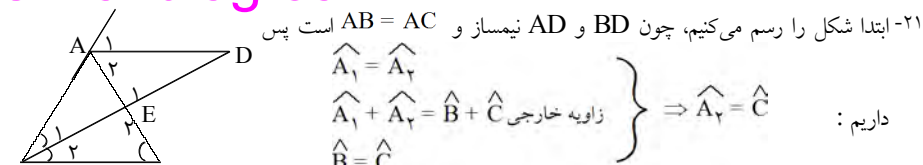
۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه کسینوسها مطابق شکل داریم:

هر یک از ۳ مثلث همنهشت متساوی الساقین است. به طوری که زاویه ی راس آن 120° درجه است.

$$x^2 + x^2 - 2xx \cos 120^\circ = (\sqrt{6})^2 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

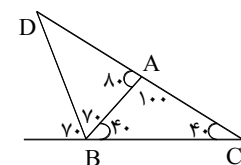


$$\left. \begin{aligned} AB &= AC \text{ پس } \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{A_1} + \widehat{A_2} &= \widehat{B} + \widehat{C} \text{ زاویه خارجی} \\ \widehat{B} &= \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$$

پس در دو مثلث ADE و EBC داریم: $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ و $\widehat{A_1} = \widehat{C}$ پس $\widehat{B_1} = \widehat{D}$ می باشد یعنی:

$$\widehat{B_1} = \widehat{B_1} = \widehat{D} \Rightarrow ADB \Rightarrow \text{متساوی الساقین} \Rightarrow AD = AB = AC$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

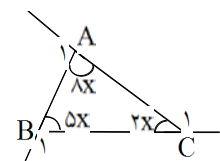


$$\widehat{B} + \widehat{C} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{A} \text{ زاویه خارجی} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{D} = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ + 40^\circ) = 30^\circ$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۳- با توجه به اینکه فاصله هر نقطه خارج دایره از مرکز آن، از شعاع دایره بزرگتر است بنابراین می توان گفت که فاصله نقطه از مرکز دایره، از شعاع دایره که برابر نصف قطر آن یعنی ۵ واحد است، بزرگتر است بنابراین این مطلب را می توان طبق استدلال استنتاجی اثبات نمود بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.



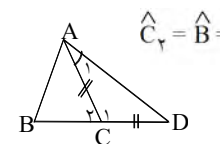
$$2x + 5x + 8x = 15x = 180^\circ \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 8x = 96^\circ \Rightarrow A_1 = 180^\circ - A = 84^\circ \\ B = 5x = 60^\circ \Rightarrow B_1 = 120^\circ \\ C = 2x = 24^\circ \Rightarrow C_1 = 156^\circ \end{cases}$$

۲۴-

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: کوچکترین زاویه خارجی مثلث مربوط به بزرگترین زاویه داخلی مثلث (A) می باشد.



$$\widehat{C_1} = \widehat{B} = \frac{180^\circ - A}{2} = \frac{148^\circ}{2} = 74^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = 180^\circ - \widehat{C_1} = 106^\circ$$

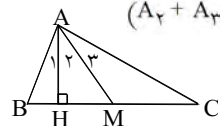
$$AC = CD \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D} = \frac{180^\circ - \widehat{C_1}}{2} = \frac{74^\circ}{2} = 37^\circ$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم میانه ی نظیر وتر، نصف وتر است.

$$AM = MC \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$$

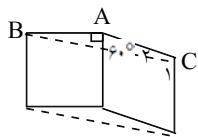
$$(A_1 + A_2) + C = 90^\circ \Rightarrow A_1 + A_2 = 90^\circ - C = B \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} - \widehat{C} = \widehat{A_1} = 26^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \end{cases}$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} &= 58^\circ \\ \widehat{C} &= 32^\circ \end{aligned} \right\} \text{ باحل دستگاه فوق داریم:}$$

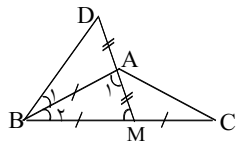
نکته: در مثلث قائمه زاویه ی بین ارتفاع و میانه ی وارد بر وتر برابر با تفاضل زوایای حاده ی مثلث است.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث متساوی الساقین است.



$$\hat{C}_r = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ \Rightarrow C_1 = 120^\circ - 15^\circ = 105^\circ$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث \widehat{ABD} و \widehat{AMC} به حالت (ضرض) مساوی اند، پس: $\hat{B}_1 = \hat{C}$. بنابراین



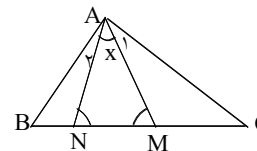
$$\widehat{ABC} = \hat{B}_r = 180 - (61 + 61) = 58$$

$$\hat{M}_1 = 61, \hat{A}_1 = 61 \text{ در نتیجه } \hat{D} + \hat{B}_1 = 61$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\hat{N} = \hat{x} + \hat{A}_1$$

$$\hat{M} = \hat{x} + \hat{A}_r$$

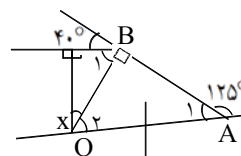


$$\begin{cases} \hat{N} + \hat{M} + \hat{x} = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{x} + \hat{A}_r = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{x} + \hat{A}_1 + \hat{x} + \hat{A}_r + \hat{x} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{x} = 108 \Rightarrow x = 36^\circ$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$40 + \hat{B}_1 + 90 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 50^\circ$$

$$90 + 50 + \hat{O}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 40^\circ$$



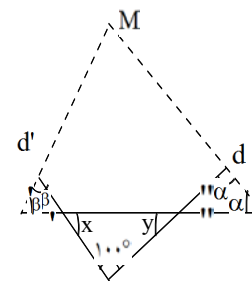
$$\hat{A}_1 = 180 - 125 = 55^\circ$$

$$\hat{O}_r + 90 + 55 = 180 \Rightarrow \hat{O}_r = 35^\circ$$

$$\hat{x} + \hat{O}_1 + \hat{O}_r = 180 \Rightarrow \hat{x} + 40 + 35 = 180 \Rightarrow x = 105^\circ$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

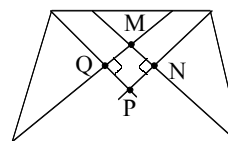
$$\begin{aligned} x + y &= 180^\circ \\ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + (x + y) &= 2 \times 180^\circ \\ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \\ \alpha + \beta &= 90^\circ \\ M &= 40^\circ \end{aligned}$$



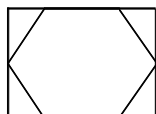
۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$$\hat{Q} + \hat{N} = 180^\circ$$

در نتیجه چهارضلعی MNPQ محاطی است.



مساحت و فیثاغورس - خارج از کشور



۱- در شکل مقابل، مساحت شش ضلعی منتظم چند برابر مساحت مستطیل محیط بر آن است؟

(۴) $\frac{11}{12}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۲- یک متوازی الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم الزاویه ی مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت مربع و یک مثلث قائم الزاویه به ترتیب ۶۴ و ۲۴ واحد مربع باشند، محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

(۴) ۵۴

(۳) ۴۸

(۲) ۳۶

(۱) ۳۲

۳- در مربعی به ضلع a ، کوچک ترین مربع ممکن را به طریقی محاط می کنیم که هر راس مربع بر روی ضلع مربع اصلی قرار گیرد. نسبت ضلع این مربع به ضلع مربع اصلی کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۴- در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$ مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ رسم می کنیم، مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

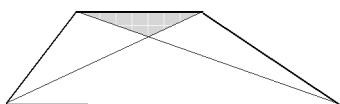
(۴) ۲

(۳) $\sqrt{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{4}{3}$

۵- قاعده ی بزرگ تر دوزنقه دو برابر قاعده ی کوچک تر آن است. مساحت کل دوزنقه چند برابر مساحت مثلث سایه زده است؟



(۲) ۸

(۱) ۷

(۴) ۱۰

(۳) ۹

۶- در مثلثی به اضلاع ۱۵ و ۱۲ و ۹، طول بزرگترین میانه کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{657}}{4}$

(۳) $\frac{\sqrt{657}}{2}$

(۲) $\sqrt{657}$

(۱) $\frac{7}{5}$

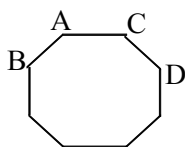
۷- در شش ضلعی منتظم به ضلع $4\sqrt{3}$ ، طول کوتاه ترین قطر کدام است؟

(۴) $8\sqrt{3}$

(۳) ۲۴

(۲) ۱۲

(۱) ۶



۸- در هشت ضلعی منتظم، مساحت مثلث ABD چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

(۲) $2 + 2\sqrt{2}$

(۱) $2 + \sqrt{2}$

(۴) $2 + 4\sqrt{2}$

(۳) $1 + \sqrt{2}$

۹- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، دو قطر عمود برهم‌اند. اگر قاعده‌های این دوزنقه ۱۴ و ۲ واحد باشند، اندازه‌ی ساق کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

۱۰- در مثلث ABC طول $AB = ۴$ و $BC = ۳$ و $AC = ۶$ و طول ارتفاع AH برابر $\frac{1}{k}$ است. مجموع طول دو ارتفاع دیگر کدام است؟

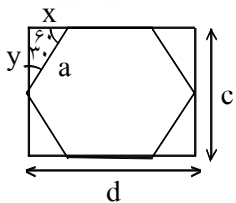
- (۱) $\frac{4}{5k}$
(۲) $\frac{5}{k}$
(۳) $\frac{5}{4k}$
(۴) $\frac{4}{k}$

جواب مساحت و فیثاغورس - خارج از کشور

۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم ضلع شش ضلعی منتظم برابر a باشد، در این صورت مساحت شش

ضلعی منتظم برابر است با $S_1 = 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right)$. اما برای محاسبه ی مساحت مستطیل باید اضلاع آن را به دست آوریم و با توجه به این که هر زاویه ی داخلی ۶ ضلعی منتظم 120° است، زاویه های خارجی برابر 60° است.

$$x = \frac{a}{2} \text{ و } y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \begin{cases} c = 2y = \sqrt{3}a \\ d = \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a \end{cases} \rightarrow S_2 = cd = 2\sqrt{3}a^2 \rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{6a^2 \sqrt{3}}{4}}{2\sqrt{3}a^2} = \frac{3}{4}$$

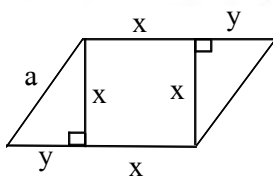


۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. مساحت مربع برابر است با $S = x^2$ و مساحت هر یک از مثلث ها برابر است با

$$S = \frac{xy}{2}, \text{ بنابراین:}$$

$$x^2 = 64 \rightarrow x = 8$$

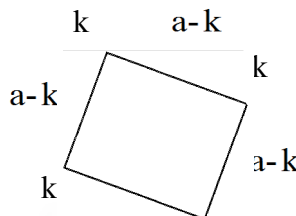
$$\frac{xy}{2} = 24 \rightarrow \frac{8 \times y}{2} = 24 \rightarrow y = 6 \rightarrow a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$



بنابراین محیط متوازی الاضلاع به ابعاد ۱۰ و $14 = 8 + 6$ برابر است با: $2(10 + 14) = 48$.


۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. $y = \sqrt{k^2 + (a - k)^2}$ ضلع مربع کوچک

برای می نیم شدن y ، کافی است $f(k) = k^2 + (a - k)^2$ می نیم شود، بنابراین:



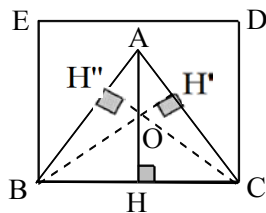
$$f'(k) = 0 \rightarrow 2k - 2(a - k) = 0 \rightarrow k = \frac{a}{2}$$

بنابراین باید راس های مربع کوچک تر در وسط اضلاع مربع بزرگ تر قرار بگیرد، در نتیجه:



$$\frac{x\sqrt{2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۴- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC}$



$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 &= \frac{1}{2}OH \times BC + \frac{1}{2}OH'' \times AB + \frac{1}{2}OH' \times AC \\ \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3 &= \frac{1}{2}OH \times \sqrt{3} + \frac{1}{2}OH'' \times \sqrt{3} + \frac{1}{2}OH' \times \sqrt{3} \end{aligned}$$

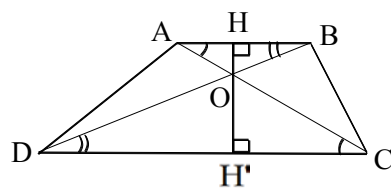
$$\rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}(OH + OH' + OH'') \rightarrow OH + OH' + OH'' = \frac{3}{2}$$

روش دوم: در مثلث قائم الزاویه $\triangle AOH'$ زاویه ی A برابر با 30° است (زیرا AH نیمساز زاویه ی A در مثلث $\triangle ABC$ است). بنابراین در مثلث $\triangle AOH'$ ، OH' نصف وتر AO است. به همین ترتیب در مثلث $\triangle AOH''$ ثابت می شود که OH'' نیز نصف AO است. پس:

$$OH' + OH'' = \frac{AO}{2} + \frac{AO}{2} = AO \rightarrow OH + OH' + OH'' = OH + AO = AH =$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

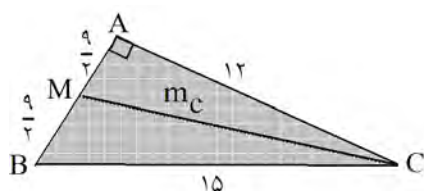
۵- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به توازی AB و CD و مورب بودن قطرها، مطابق شکل $\widehat{B} = \widehat{D}$ و $\widehat{A} = \widehat{C}$ و در نتیجه مثلث های OAB و OCD متشابه اند داریم:



$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{CD} \xrightarrow{CD = 2AB} \frac{OH}{OH'} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{OH}{OH' + OH} = \frac{1}{2 + 1}$$

$$\rightarrow \frac{OH}{HH'} = \frac{1}{3} \rightarrow HH' = 3OH$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OAB}} = \frac{\frac{1}{2}(AB + CD) \times HH'}{\frac{1}{2}AB \times OH} = \frac{(AB + 2AB) \times 3OH}{AB \times OH} = \frac{9 AB \times OH}{AB \times OH} = 9$$



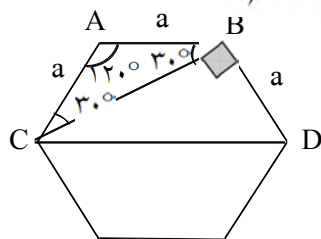
۶- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ ترین میانه بر کوچک ترین ضلع وارد می شود. از آنجایی که $15^2 = 12^2 + 9^2$ پس مثلث قائم الزاویه است. حال در مثلث \widehat{AMC} داریم:

$$m_c^2 = 12^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 144 + \frac{81}{4} = \frac{657}{4} \rightarrow m_c = \frac{\sqrt{657}}{2}$$

۷- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در شش ضلعی منتظم به ضلع a ، طول کوتاه ترین قطر $a\sqrt{3}$ و طول بزرگ ترین قطر $2a$ است، بنابراین:

$$d_1 = a\sqrt{3} = (4\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 12$$

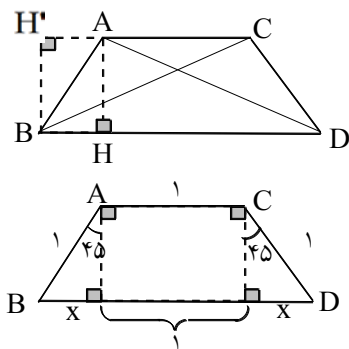
توجه: بد نیست دلیل حکم فوق را بدانید، هر زاویه ی شش ضلعی منتظم $120^\circ = \frac{6-2}{6} \times 180^\circ$ است.



$$\widehat{ABC} : BC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3a^2} \rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

$$\widehat{BCD} : CD = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2} \rightarrow CD = 2a$$

۸- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}BH' \times AC} \xrightarrow{AH = BH'} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{AC}$$

اگر طول AC را ۱ فرض کنیم، کافی است طول BD را به دست آوریم تا مساله حل شود، هر زاویه ی داخلی ۸ ضلعی منتظم برابر با $135^\circ = \frac{(8-2)}{8} \times 180^\circ$ است،

بنابراین \widehat{AHB} یک مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است و در نتیجه $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

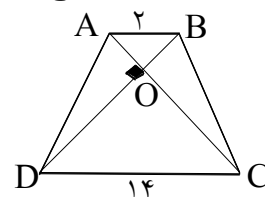
بنابراین $BD = 1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$.

۹- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث های OAB و OCD مثلث های قائم الزاویه ی متساوی الساقین هستند. بنابراین

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \xrightarrow{OA = OB} 2OA^2 = 4 \Rightarrow OA^2 = OB^2 = 2 \quad \text{داریم:}$$

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 \xrightarrow[CD = 14]{OC = OD} 2OC^2 = 196 \Rightarrow OC^2 = OD^2 = 98$$

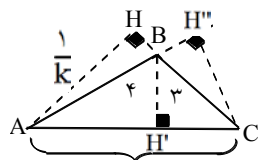
$$AD^2 = OA^2 + OD^2 = 2 + 98 = 100 \Rightarrow AD = BC = 10.$$



۱۰- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC طول AB = ۴، BC = ۳ و

AC = ۶ و طول ارتفاع AH برابر با $\frac{1}{k}$ است. از طرفی در هر مثلث نسبت طول

دو ضلع، برابر با عکس نسبت طول ارتفاع های نظیر آنها است، بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{CH''} &\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\frac{1}{k}}{CH''} \Rightarrow CH'' = \frac{3}{4k} \\ \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BH'} &\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{\frac{1}{k}}{BH'} \Rightarrow BH' = \frac{1}{2k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BH' + CH'' = \frac{1}{2k} + \frac{3}{4k} = \frac{5}{4k}$$

مساحت و فیثاغورس - سنجش

۱- مساحت یک مربع به ضلع a دو برابر مساحت یک لوزی به ضلع a است. تانژانت نصف زاویه کوچکتر لوزی کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 2 - \sqrt{3} & (2) & 2 - \sqrt{2} \\ (3) & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & (4) & \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \end{array}$$

۲- مساحت یک لوزی به طول ضلع ۵ واحد و زاویه بزرگتر برابر $\text{ArcCos}\left(\frac{-3}{5}\right)$ ، کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 15 & (2) & 17/5 \\ (3) & 20 & (4) & 22/5 \end{array}$$

۳- در مثلثی $\hat{C} = 75^\circ$ و $\hat{A} = 45^\circ$ و $b = 6$ است. ضلع a کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 2\sqrt{6} & (2) & 2\sqrt{7} \\ (3) & 3\sqrt{2} & (4) & 3\sqrt{5} \end{array}$$

۴- ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، وتر را به طولهای ۳ و ۱۲ واحد تقسیم کرده است. مساحت مثلث چند واحد مربع است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 42 & (2) & 48 \\ (3) & 36 & (4) & 45 \end{array}$$

۵- در مثلث قائم‌الزاویه $(\hat{B} = \frac{\pi}{4})$ رابطه $b^2 = 2ac$ برقرار است، زاویه \hat{C} چند درجه است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 30^\circ & (2) & 45^\circ \\ (3) & 60^\circ & (4) & 75^\circ \end{array}$$

۶- طول مستطیل منطبق بر قاعده‌ی یک مثلث و عرض مستطیل $\frac{5}{12}$ ارتفاع وارد بر این قاعده‌ی مثلث است. مساحت مثلث چند برابر مساحت مستطیل است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 0/9 & (2) & 1/2 \\ (3) & 0/8 & (4) & 1/25 \end{array}$$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر مساحت مثلث را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، اگر اندازه‌ی ارتفاع برابر ۴ باشد، مساحت مثلث اولیه چقدر است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 9\sqrt{2} & (2) & 12 \\ (3) & 12\sqrt{2} & (4) & 15 \end{array}$$

۸- در یک مثلث قائم‌الزاویه اضلاع دو ضلع قائم متناسب با اعداد ۲ و ۳ است. و طول وتر آن ۲۶ واحد، کوچکترین ضلع آن کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & 4\sqrt{26} & (2) & 2\sqrt{39} \\ (3) & 4\sqrt{13} & (4) & 2\sqrt{13} \end{array}$$

۹- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BD رسم شده است، نسبت $\frac{AH}{BD}$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} (1) & \frac{BC}{AC} & (2) & \frac{AC}{AB} \\ (3) & \frac{AB}{AC} & (4) & \frac{AC}{BC} \end{array}$$

۱۰- فاصله‌ی وسط ضلع یک مربع از قطر آن چند برابر ضلع مربع است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۱- مساحت مثلث متساوی‌الساقین ۱۲ واحد مربع و قاعده‌ی آن ۸ واحد است. اندازه‌ی نیمساز داخلی زاویه‌ی بین دو ساق آن چند واحد است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۶

۱۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو جزء ۴ و ۹ واحدی تقسیم کرده است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۳۶ (۳) ۳۹ (۴) ۴۲

۱۳- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۴ و ۵ و ۹ می‌باشد زاویه بین میانه و ارتفاع نظیر ضلع بزرگتر چند درجه است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای کوچکترین زاویه برابر ۴۰ درجه است، زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر چند درجه است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۵- مساحت مربعی ۷۲ واحد مربع است، طول قطر آن کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۱۶- از یک قطعه سیم به طول $6\sqrt{3}$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم، ارتفاع این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۷- در یک مربع به طول ضلع ۴ واحد نقاط A, B, C, D بر روی هر یک از اضلاع چنان اختیار شده که فاصله آن نقاط از سر یک قطر مربع برابر واحد است. مساحت چهارضلعی ABCD چند درصد مساحت مربع است؟

- (۱) ۳۲ (۲) $32/5$ (۳) ۳۶ (۴) $37/5$

۱۸- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $2AM = BC$ اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی $\frac{5}{4}C$ اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی B است، زاویه‌ی C از این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۱۹- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است و $BC = 2AM$ و اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی C دو و نیم برابر اندازه‌ی زاویه داخلی B است، زاویه C از این مثلث چند درجه است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۰- مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر ۱۲ واحد و ارتفاع h قابل رسم است، کدام مقدار برای h مورد قبول نیست؟

- (۱) ۵ (۲) $5/5$ (۳) ۶ (۴) $6/5$

۲۱- در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 90^\circ$ و $AC = 1$ ارتفاع AH برابر کدام است؟

- (۱) $\cos B$ (۲) $\tan B$ (۳) $\cos C$ (۴) $\tan C$

۲۲- مساحت مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و ۱ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۳- فاصله‌ی نقطه (۱- و ۰) A از خط به معادله $3x - 4y = 6$ کدام است؟

- (۱) $0/4$ (۲) $0/6$ (۳) $0/8$ (۴) $1/2$

۲۴- در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زاویه‌ها ۵۲ درجه است. زاویه بین وتر و میانه وارد بر آن چند درجه است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۶ (۴) ۷۸

۲۵- طول دو ضلع از مثلثی $\sqrt{2}$ و ۱ و مساحت آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اندازه ضلع سوم چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۲۶- در یک مربع ۱ واحد از بعد آن کم کرده و به بعد دیگر ۱ واحد اضافه می‌کنیم. تا مستطیل ایجاد شود. افزایش تغییر

مساحت و محیط کدام است؟

- (۱) مساحت ۱ و محیط صفر
(۲) مساحت ۱- و محیط صفر
(۳) مساحت صفر و محیط ۱
(۴) مساحت صفر و محیط ۱-

۲۷- نسبت اضلاع قائم از مثلثی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و میانه آن ۸ واحد است، ضلع متوسط چقدر است؟

- (۱) $8\sqrt{3}$ (۲) ۹ (۳) $9\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

۲۸- در مثلث به اضلاع ۵ و ۷ و ۸ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگتر آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. کوچکترین قسمت کدام

است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۲۹- طول مستطیلی دو برابر عرض آن است، اگر قطر مستطیل $4\sqrt{5}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳۰- در مثلثی سه زاویه داخلی متناسب با اعداد ۳ و ۲ و ۱ می‌باشند، ضلع متوسط چند برابر ضلع کوچکتر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۳۱- در مربعی به ضلع سه واحد مستطیلی محاط می‌کنیم که هر راس مستطیل ضلع مربع را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، مساحت کوچکترین مستطیل کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

۳۲- مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع $3\sqrt{3}$ واحد مربع است، میانه این مثلث چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۳۳- دو مثلث‌الزاویه در وتر مشترک‌اند با تساوی کدام دو جزء ممکن است متشابه هم نباشند؟
(۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) میانه وارد بر وتر (۳) زاویه حاده (۴) ضلع قائم

۳۴- در مثلث قائم‌الزاویه نسبت دو ضلع قائم ۱ به ۲ است اگر مساحت مثلث ۸ واحد مربع باشد، ضلع متوسط مثلث کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) ۶ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۳۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک زاویه حاده برابر 25° است زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر چند درجه است؟
(۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

۳۶- در متوازی‌الاضلاعی اندازه دو ضلع ثابت و یک زاویه متغیر است، مساحت و محیط آن چگونه است؟
(۱) محیط ثابت، مساحت ثابت (۲) محیط ثابت، مساحت متغیر
(۳) محیط متغیر، مساحت متغیر (۴) محیط متغیر، مساحت ثابت

۳۷- محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $(3 + 3\sqrt{2})$ واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2/25$ (۳) $2/75$ (۴) ۳

۳۸- در نیم‌دایره به قطر $AB = 5$ ، وتر $CD = 3$ موازی AB رسم شده است، $tg C$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) -۲ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۳۹- محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $(3 + 3\sqrt{2})$ واحد است، مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2/75$ (۳) $2/25$ (۴) $2\sqrt{2}$

۴۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۴۱- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند، ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۲- در یک مثلث قائم الزاویه یکی از زاویه‌های حاده سه برابر زاویه‌ی دیگر است. نسبت دو ضلع قائم کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad 2 - \sqrt{2} \quad (3) \quad 1 + \sqrt{2} \quad (4)$$

۴۳- طول اضلاع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است، تصویر ضلع کوچک‌تر بر روی وتر کدام است؟

$$3/2 \quad (1) \quad 3/6 \quad (2) \quad 4/5 \quad (3) \quad 4/8 \quad (4)$$

۴۴- مساحت دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های ۸ و ۶ واحد و طول ساق $\sqrt{5}$ چقدر است؟

$$12 \quad (1) \quad 14 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 16 \quad (4)$$

۴۵- در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ واحد قطر آن را به نسبت ۱۶ و ۹ تقسیم می‌کنیم. از نقطه تقسیم شده خطی بر قطر عمود

می‌کنیم تا نیم‌دایره در A قطع کند نزدیک‌ترین فاصله A از دو سر قطر کدام است؟

$$4 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 8 \quad (4)$$

۴۶- در مثلث قائم الزاویه‌ای طول وتر برابر $15\sqrt{6}$ واحد است. اگر ارتفاع وارد بر وتر آن را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کند

اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

$$12 \quad (1) \quad 16 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 20 \quad (4)$$

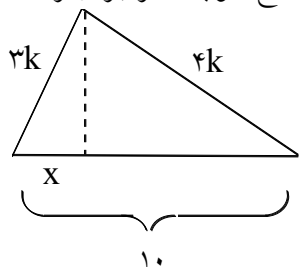
۴۷- زاویه‌ی مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد اگر کوچکترین ضلع مثلث ۴ واحد باشد ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 4\sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{3} \quad (4)$$

۴۸- زاویه‌های مثلث ABC در رابطه‌ی $\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1}$ صدق می‌کنند نسبت $\frac{BC}{AC}$ کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$

۴۹- در مثلث قائم الزاویه ای نسبت به دو ضلع قائم ۳ به ۴ و طول وتر ۱۰ واحد است. تصویر ضلع کوچک تر بر وتر کدام



است؟

(۲) $\frac{3}{6}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{4}{2}$

۵۰- در مثلث قائم الزاویه ای اندازه دو ضلع قائم ۹ و ۱۲ واحد است ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

(۴) $\frac{8}{4}$

(۳) $\frac{8}{1}$

(۲) $\frac{7}{2}$

(۱) $\frac{6}{4}$

۵۱- در مثلث قائم الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می آوریم، مساحت دوزنقه حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۵۲- در مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۲ واحد، سطح کل چند واحد مربع است؟

(۴) ۵۶

(۳) ۵۸

(۲) ۶۲

(۱) ۶۴

۵۳- جمله ی n ام یک تصاعد عددی $(4n-1)$ است، مجموع ۱۲ جمله ی اول آن کدام است؟

(۴) ۳۶۰

(۳) ۳۰۰

(۲) ۲۸۰

(۱) ۲۴۰

۵۴- در مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم ۳ و $\sqrt{3}$ است، میانه ی وارد بر وتر چقدر است؟

(۴) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $2\sqrt{3}$

۵۵- در دایره ای به شعاع R دو مستطیل به ترتیب محاط و محیط شده اند، نسبت مساحت های این دو مستطیل کدام است؟

(۴) $\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{1}{4}$

۵۶- در مثلث ABC دو نقطه ی D و E روی اضلاع مثلث و $DE \parallel BC$ و $BC = 2DE$ است. مساحت دوزنقه DEBC

چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

۵۷- در مثلث قائم الزاویه ای کوچکترین زاویه ۴۰ درجه است. زاویه بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر چند درجه است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵

(۲) ۱۰

(۱) ۵

۵۸- در مثلث قائم الزاویه با زاویه ی ۳۰ درجه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث تقسیم می کند. نسبت مساحت های این

دو مثلث کدام است؟

(۴) ۵ و ۲

(۳) ۴ و ۱

(۲) ۳ و ۲

(۱) ۳ و ۱

۵۹- مثلث قائم الزاویه‌ای با بزرگترین ضلع ۱۸ واحد و ارتفاع h قابل رسم است، کدام عدد برای h مورد قبول نیست؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) ۹ (۴) $\frac{9}{5}$

۶۰- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۲ و ۳ و ۵ است نسبت میانه وارد بر ضلع بزرگتر به همان ضلع کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۶۱- مثلث قائم الزاویه‌ای با وتر ۱۵ و ارتفاع h قابل رسم است، کدام عدد برای اندازه h درست نیست؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۸

۶۲- در مثلث ABC داریم $\hat{B} = \hat{C}$ ضلع AB را از طرف A به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی \hat{BCD} چگونه است؟

- (۱) حاده (۲) قائمه (۳) منفرجه (۴) نامشخص

۶۳- مساحت مثلثی به اضلاع $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و ۱ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۴- در یک مربع ۳ واحد از بعد آن کم و به بعد دیگر ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا مستطیل ایجاد شود. افزایش تغییر مساحت و محیط به ترتیب کدام است؟

- (۱) صفر و ۶- (۲) ۹- و صفر (۳) صفر و ۶ (۴) ۹ و صفر

۶۵- در مثلثی $AB = \frac{2}{3} AC = 4$ و $\hat{A} = 120^\circ$ مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{3}$ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۶۶- طول مستطیلی دو برابر عرض آن است، اگر قطر مستطیل $4\sqrt{5}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۴ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۶۷- طول دو ضلع از مثلثی $\sqrt{2}$ و ۱ و مساحت آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۶۸- نسبت اضلاع قائم از مثلثی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و میانه‌ی آن ۸ واحد است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $24\sqrt{3}$ (۲) $32\sqrt{3}$ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۶۹- در مثلثی به اضلاع ۵ و ۷ و ۸ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگتر آن را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قسمت کدام است؟

(۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{6}{13}$ (۴) $\frac{7}{11}$

۷۰- محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین $3(1 + \sqrt{2})$ واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2/25$ (۳) $2/75$ (۴) ۳

۷۱- محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین $5 + 5\sqrt{2}$ واحد است. مساحت این مثلث کدام است؟

(۱) $5/25$ (۲) $5/75$ (۳) $6/25$ (۴) $6/75$

۷۲- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند. ضلع بزرگتر چند برابر ضلع متوسط است؟

(۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۷۳- نسبت اضلاع قائم در مثلثی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. اگر ارتفاع وارد بر وتر این مثلث قائم الزاویه رسم شود، مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

(۱) $1/25$ (۲) $1/75$ (۳) ۲ (۴) $2/25$

۷۴- دو مثلث قائم الزاویه در وتر مشترک‌اند. با تساوی کدام دو جزء دیگر ممکن است مساوی هم نباشند؟
(۱) ارتفاع وارد بر وتر (۲) میانه‌ی وارد بر وتر (۳) زاویه‌ی حاده (۴) ضلع قائم

۷۵- در مثلث قائم الزاویه‌ای به مساحت ۸ واحد مربع، اندازه‌ی ضلع کوچکتر نصف ضلع متوسط است. اندازه‌ی وتر کدام است؟

(۱) $2\sqrt{10}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $5\sqrt{2}$

۷۶- طول دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است. اندازه‌ی کوچکترین ارتفاع کدام است؟

(۱) $3/2$ (۲) $4/8$ (۳) $4/5$ (۴) $3/6$

۷۷- در یک مثلث قائم الزاویه، دو ضلع قائم متناسب با اعداد $1 + \sqrt{2}$ و ۱ می‌باشند. نسبت دو زاویه‌ی حاده‌ی آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۸- در مثلث قائم الزاویه، زاویه‌ی بین دو نیمساز زاویه‌ی حاده‌ی آن، چند درجه است؟

(۱) ۹۰ (۲) ۱۱۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۷۹- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی دو ضلع قائم ۱۵ و ۲۰ واحد است. سینوس زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۸۰- در مثلث قائم الزاویه اندازه وتر ۵ و کوچک‌ترین ضلع ۲ واحد است. تصویر ضلع متوسط بر روی وتر کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{4}{2}$

۸۱- در یک مثلث متساوی الساقین یکی از ساق‌ها را از طرف رأس به اندازه خود امتداد داده و نقطه پایانی را به رأس سوم آن وصل می‌کنیم. بزرگ‌ترین مثلث حاصل کدام نوع است؟

- (۱) قائم الزاویه (۲) منفرجه الزاویه (۳) متساوی الاضلاع (۴) نامشخص

۸۲- مساحت دوزنقه متساوی الساقین با قاعده‌های ۶ و ۸ واحد و طول ساق $\sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۸۳- در مثلث منفرجه الزاویه، وسط سه ضلع را به هم وصل می‌کنیم. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) نامشخص

۸۴- در مثلث قائم الزاویه طول وتر برابر $15\sqrt{6}$ واحد است. اگر ارتفاع وارد بر وتر، آن را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کند، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۸۵- قاعده‌ی مثلثی منطبق بر طول مستطیل و عرض مستطیل $\frac{5}{12}$ ارتفاع وارد بر این قاعده است. مساحت مثلث چه کسری از مساحت مستطیل است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{6}{5}$

۸۶- در مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی وتر ۱۲ واحد و یک زاویه ۳۰ درجه است. از وسط وتر، عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت این مثلث جدید کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ (۴) $9\sqrt{3}$

۸۷- در مثلث ABC، میانه‌های AM و CN در نقطه‌ی G متقاطع‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث GMN است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸۸- در مثلث متساوی الساقین، طول یک ساق $\frac{3}{2}$ قاعده‌ی آن است. اگر اندازه‌ی ساق مثلث ۹ واحد باشد، ارتفاع وارد بر آن

چه قدر است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۸۹- محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین $6(1 + \sqrt{2})$ واحد است. مساحت آن کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) ۹ (۳) $9\sqrt{2}$ (۴) ۱۲

۹۰- اندازه‌ی اضلاع مثلثی ۱۰ و ۸ و ۶ واحد است، تصویر میانه‌ی نظیر ضلع بزرگ‌تر بر آن ضلع چند واحد است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۱- در مثلث ABC میانه‌های AM و BN در نقطه O متقاطع‌اند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث OMN است؟

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۹۲- در مثلثی به اضلاع ۹ و ۹ و ۶ واحد، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق مثلث کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۹۳- در مثلث متساوی الساقین، قطر دایره‌ی محیطی برابر یکی از اضلاع مثلث است. اگر محیط این مثلث $6(1 + \sqrt{2})$

واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴) $9\sqrt{2}$

۹۴- محیط مثلث قائم الزاویه برابر ۱۸ و ارتفاع وارد بر وتر آن ۳ واحد است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $\frac{81}{7}$ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

جواب مساحت و فیثاغورس - سنجش

۱- یادآوری: مساحت یک لوزی با طول ضلع a و زاویه α برابر است با: $S = a^2 \sin \alpha$ مساحت:

$$S_{\text{مربع}} = 2S \Rightarrow a^2 = 2a^2 \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

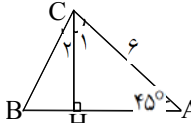
بنابراین نصف زاویه کوچکتر لوزی برابر با 15° و تانژانت آن نیز برابر با $2 - \sqrt{3}$ می باشد. پس گزینه ۱ پاسخ درست است.

۲- می دانیم مساحت لوزی با طول ضلع a و زاویه α برابر $S = a^2 \sin \alpha$ است.

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{2} = 2$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۳- ابتدا ارتفاع CH را رسم می کنیم.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 60^\circ$$

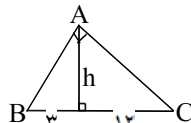
$$\hat{A} + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 30^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رابطه فیثاغورث در مثلث قائمه ACH} \\ AH^2 + CH^2 = AC^2 \\ AH = CH \end{array} \right\} \Rightarrow AH = CH = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \hat{C}_2 = \frac{CH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CH}{\cos \hat{C}_2} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۴- نکته: ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائمه، واسطه هندسی بین دو پاره‌خطی است که توسط



$$h^2 = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow h = 6$$


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6(12 + 3) = 45$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

$$\left. \begin{array}{l} B = 90^\circ \Rightarrow \text{رابطه فیثاغورث} \\ b^2 = a^2 + c^2 \\ b^2 = 2ac \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = 2ac \text{ یا } a^2 + c^2 - 2ac = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0$$


در نتیجه، مثلث، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین بوده و اندازه‌های دو زاویه دیگر مثلث برابر 45° است. بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$b = \frac{5}{12} h$$

$$S = \left(\frac{12}{5} b \times a \right) \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{مستطیل}}} = \frac{\frac{5}{12} ab}{ab} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{1}{2}$$


۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} BH = x \Rightarrow CH = 2x \\ AH^2 = BH \cdot CH \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 = 4 = 16$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow BC = BH + CH = 3x = 6\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{4 \times 6\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه اضلاع مثلث، برابر $2x$ و $3x$ باشند، خواهیم داشت.

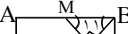
$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26^2 \Rightarrow 13x^2 = 26^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{13} \Rightarrow \text{ضلع کوچکتر} = 2x = 4\sqrt{13}$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (BD \times AC) = \frac{1}{2} (AH \times BC)$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

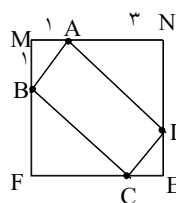
$$\Rightarrow BD \times AC = AH \times BC \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{AC}{BC}$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} MB^2 = 2MH^2 \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2} MB \\ MB = \frac{AB}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{4} AB$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل ABCD یک مستطیل است.



$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = 2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$$

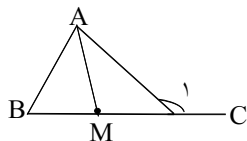
$$AD^2 = AN^2 + ND^2 = 18 \Rightarrow AD = \sqrt{18} \Rightarrow S_{ABCD} = 6$$

$$S_{MNEF} = 4 \times 4 = 16$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNEF}} = \frac{6}{16} = 37.5\%$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

راه حل: چون $AM = \frac{BC}{2}$ پس زاویه A قائمه است.

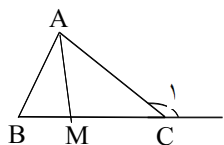


$$\hat{C}_1 = 2/\Delta B \Rightarrow 90 + B = 2/\Delta B \Rightarrow 1/\Delta B = 90 \Rightarrow B = 60$$

$$B + C = 90 \Rightarrow C + 60 = 90 \Rightarrow C = 30$$

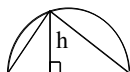
۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس. از آنجاییکه

$AM = \frac{BC}{2}$ پس زاویه A قائم است.



$$\hat{C}_1 = 2/\Delta B \Rightarrow 90 + B = 2/\Delta B \Rightarrow 1/\Delta B = 90 \Rightarrow B = 60$$

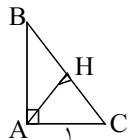
$$B + C = 90 \Rightarrow C + 60 = 90 \Rightarrow C = 30$$



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مثلث در دایره‌ای به قطر وتر محاط است و بیشترین مقدار h

$$\text{Max} = h = \frac{12}{2} = 6$$

برای آن شعاع دایره (نصف وتر است)



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow S = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

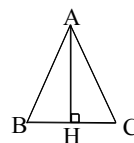
۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$d = \frac{|0 + 4 - 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5} = 0.4 \Leftarrow 3x - 2y - 6 = 0$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده بر نیمساز زاویه بین ۲ ساق منطبق است. بنابراین خواهیم داشت:

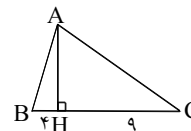
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{AH \times BC}{2} = 12 \Rightarrow \frac{AH \times 8}{2} = 12 \Rightarrow AH = 3$$



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائمه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین پاره‌خطهایی است که توسط این ارتفاع بر روی وتر ایجاد می‌شوند.

$$AH^2 = BH \cdot CH = 36 \rightarrow AH = 6$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36$$



۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راهنمایی: در مثلث قائم الزاویه میانه و ارتفاع وارد بر وتر تفاضل دو زاویه حاده است. اگر A و B و C زوایای مثلث باشند

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{9} \Rightarrow \frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{9} = \frac{A+B+C}{9+5+4} = \frac{180}{18} = 10 \Rightarrow \begin{cases} A = 40 \\ B = 50 \\ C = 90 \end{cases}$$

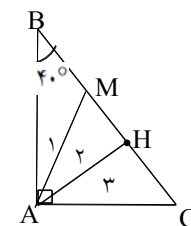
$$|B - A| = 10 \Rightarrow \text{زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $\hat{B} = 40$ از آنجاییکه در مثلث قائم الزاویه

میانه وارد بر وتر نصف وتر است نتیجه می‌گیریم مثلث \widehat{ABM} متساوی الساقین

است پس $\hat{A}_1 = 40$ از طرفی $\hat{C}_1 = 50$ پس $\hat{A}_3 = 40$ داریم.

$$A_2 = 90 - (A_1 + A_3) = 90 - (40 + 40) = 10$$



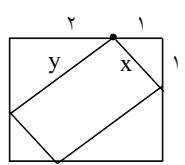
۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه طول ضلع مربع را a فرض کنیم قطر آن $\sqrt{2}a$ می‌باشد لذا:

$$a^2 = 72 \Rightarrow a = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}a = 12$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول این قطعه سیم محیط مثلث متساوی الاضلاع است. اگر a ضلع مثلث متساوی الاضلاع باشد، داریم:

$$\text{محیط} = 3a \Rightarrow 6\sqrt{3} = 3a \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3}) = 3$$



$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = x \cdot y = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

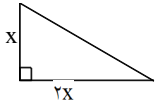
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

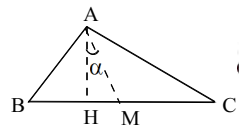
$$\text{میانۀ} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میانۀ وارد بر وتر همواره نصف وتر است بنابراین معلوم بودن یا نبودن آن هیچ تاثیری بر مساله ندارد.



$$S = \frac{x \times 2x}{2} = x^2 = 4 \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

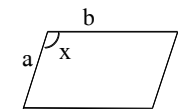


$$\alpha = \widehat{HAC} - \widehat{MAC}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$= (90^\circ - C) - (C) = 90^\circ - 2C = |B - C|$$

$$C = 25^\circ \Rightarrow B = 65^\circ \Rightarrow \alpha = 40^\circ$$

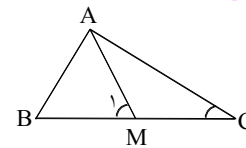


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت متغیر است $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin x$, محیط ثابت است $2(a + b)$

$$2a + a\sqrt{2} = 3 + 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

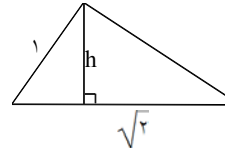
$$s = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانۀ برابر نصف وتر است.

$$AM = MC \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{M_1} = 76^\circ$$

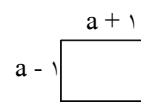
$$B = 52^\circ \Rightarrow C = 38^\circ$$



$$S = \frac{a \times h}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times h}{2} \Rightarrow h = 1$$

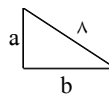
مطابق شکل h ضلع به طول ۱ منطبق می‌گردد پس مثلث قائم‌الزاویه است.

$$C^2 = a^2 + b^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow C = \sqrt{3}$$



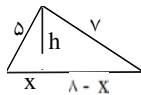
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت مستطیل $= (a+1)(a-1) = a^2 - 1 = a^2 + (-1)$

محیط مستطیل $= 2[(a+1) + (a-1)] = 2a = 2a + 0$



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ b^2 = 3a^2 \end{cases}$$

$a^2 = 4 \times 16$
 $a = 4$ و $b = 4\sqrt{3}$

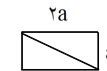


$$h^2 = 25 - x^2 = 49 - (8-x)^2 \Rightarrow 24 - 64 + 16x = 0$$

$$x = 2/5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{قطر}^2 = a^2 + 4a^2 = (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 = 16$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = 4, 2a = 8 \Rightarrow \text{مساحت} = 32$$

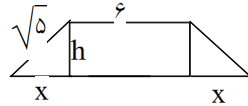
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اندازه زاویه‌ها $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

ضلع متوسط برابر $\sqrt{3}$ در ضلع کوچک ضلع متوسط مقابل به زاویه ۶۰ و ضلع کوچکتر مقابل به زاویه ۳۰

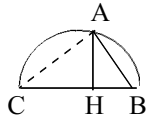
$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

است.

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

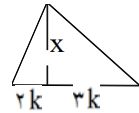


$$\begin{cases} x = \frac{8-6}{2} = 1 \\ h^2 = 5^2 - 1^2 \Rightarrow h = 2 \\ S = \frac{2(6+8)}{2} = 14 \end{cases}$$



۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC در رأس A قائمه است.
 $BH = \frac{9}{25} \times 10 = \frac{18}{5}$, $AB^2 = BH \times BC = \frac{18}{5} \times 10 \Rightarrow AB = 6$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

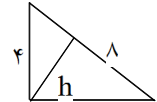


$$\begin{aligned} 5k &= 15\sqrt{6} \quad k = 3\sqrt{6} \\ x^2 &= (2k)(3k) = 6k^2 = 6(3\sqrt{6})^2 = 36 \times 9 \\ x &= 6 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1, 2, 3 \Rightarrow A = \frac{180}{6} = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ$$

مثلث قائم الزاویه به زاویه 30° درجه طول وتر دو برابر کوچکترین ضلع و برابر ۸ واحد است ضلع متوسط $4\sqrt{3}$ واحد است.



$$8 \times h = 4 \times 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} \Rightarrow A = 90^\circ, B = 60^\circ, C = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

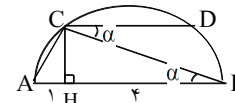
۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 9k^2 + 16k^2 &= 100 \Rightarrow k = 2 \\ (3k)^2 &= x \times 10 = (6)^2 \quad x = 3/6 \end{aligned}$$

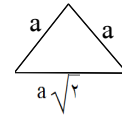
$$\begin{aligned} \text{وتر } a^2 &= 144 + 81 = 225 \quad a = 15 \\ a.h &= 9 \times 12 \Rightarrow h = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{9 \times 4}{5} = 7.2 \end{aligned}$$

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



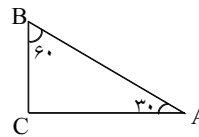
$$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow CH^2 = 1 \times 4 \Rightarrow CH = 2, \quad \text{tg } c = \text{tg}(90^\circ + \alpha) = -\text{Cotg } \alpha = \frac{-4}{2} = -2$$



$$2a + a\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \quad a = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2}$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1/2$$

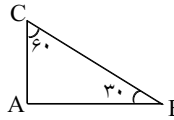


$$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} = x, \hat{B} = 2x, \hat{C} = 3x$$

$$x + 2x + 3x = 180 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{مثلث قائمه است}$$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow \text{مثلث قائمه است}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

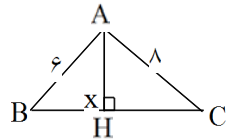
$$\alpha + 3\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 22.5 \Rightarrow \text{tg } 22.5 = \frac{1 - \cos 45}{\sin 45} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Cotg } 22.5 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2}$$

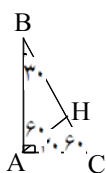
$$BC = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\widehat{ABH} \cong \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3.6$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



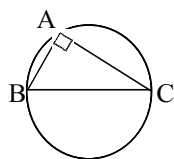
۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BH}{\frac{1}{2} AH \times CH} = \frac{BH}{CH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{\frac{1}{2} AC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \sqrt{3} \times \frac{AB}{AC} = \sqrt{3} \times \tan 60^\circ = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

بنابراین نسبت مساحت این دو مثلث برابر یک به سه است.



۵۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مثلث قائم الزاویه در دایره‌ای به قطر $BC = 18$ محاط است و در این صورت بیشترین ارتفاع h برابر شعاع دایره یعنی ۹ می‌باشد پس گزینه ۴ برای مقدار h قابل قبول نیست.

۶۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث مجموع زوایا 180° درجه است پس داریم.

$$2x + 3x + 5x = 180 \Rightarrow 10x = 180 \Rightarrow x = 18$$

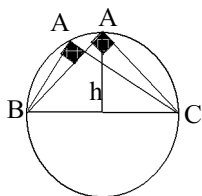
بنابراین زوایای مثلث عبارتند از:

$$\hat{A} = 2 \times 18 = 36^\circ$$

$$\hat{B} = 3 \times 18 = 54^\circ$$

$$\hat{C} = 5 \times 18 = 90^\circ$$

و در مثلث قائم الزاویه نسبت میانه وارد بر وتر به وتر برابر $\frac{1}{2}$ است.



۶۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چنین مثلی در یک دایره به قطر ۱۵ قرار دارد و راس قائمه روی این دایره تغییر می‌کند با توجه به شکل بزرگترین ارتفاع مثلث برابر شعاع دایره یعنی $\frac{7}{5}$ است پس $h = 8$ قابل قبول نیست.

۶۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قائمه $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow$ میانه‌ی مثلث برابر نصف ضلع متناظر است.

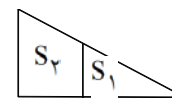
$$(\sqrt{3})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \text{قائم الزاویه} \Rightarrow S = \frac{1}{2} (1 \times \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a \times a = a^2 \Rightarrow (a-3)(a+3) = a^2 - 9 \quad \begin{matrix} \text{محیط ثابت} \\ \text{تغییر مساحت} \end{matrix} = -9 \Rightarrow \text{صفر}, -9$$

۶۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

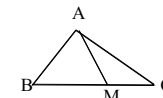


۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $62 = 2(6 + 10 + 15)$ سطح کل

۵۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = 3 \quad a_{12} = 27 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(3 + 27) = 300$$

۵۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



تذکر: در مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

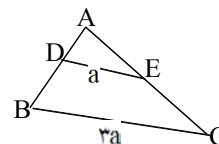
۵۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تمام مثلث‌های قائم الزاویه متساوی الساقین کوچک برابرند.



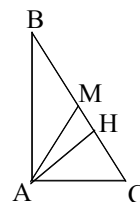
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \quad \text{لذا}$$

۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{ABC} = 4S_{ADE} \Rightarrow \text{مساحت دوزنقه} = 3S_{ADE}$$



۵۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر مساوی قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده است. اگر $\angle B = 40^\circ$ آنگاه $\angle C = 50^\circ$ و داریم:



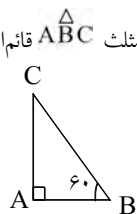
$$\hat{HAM} = |B - C| = 10^\circ$$

۷۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 1+2+3 &= 6 \\ 180 \div 6 &= 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \times 30 = 90 \\ B = 2 \times 30 = 60 \\ C = 1 \times 30 = 30 \end{cases}$$

بنابراین مثلث قائم الزاویه است. بنابراین BC ضلع بزرگتر و AC ضلع متوسط است.

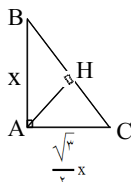
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin 60} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



۷۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم در مثلث قائم الزاویه ABC داشته باشیم: $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $AB = x$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = \frac{7}{4}x^2 \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{7}}{2}x$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times \frac{\sqrt{7}}{2}x = x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x$$

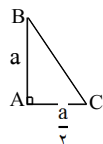


$$AB^2 = BH \times BC = x^2 = BH \times \frac{\sqrt{7}}{2}x \Rightarrow BH = \frac{2}{\sqrt{7}}x$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times AC}{\frac{1}{2}AH \times BH} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}x} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

۷۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین با تساوی دو وتر مسلماً میانه‌های وارد بر وتر هم مساوی خواهند بود پس این اطلاع جدیدی برای تساوی مثلث‌ها نیست.

۷۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} = 8 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= 4\sqrt{2} \\ AC &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 32 + 8 = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

$$BH = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = 6\sqrt{2}$$

۶۵- گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{aligned} x &= 2y & x^2 + y^2 &= (4\sqrt{5})^2 & 4y^2 + y^2 &= 16 \times 5 \\ y &= 4 & x &= 8 & \Rightarrow & S = 32 \end{aligned}$$

۶۶- گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 \times \sqrt{2}) \Rightarrow \text{دو ضلع عمود بر همند} \quad \text{ضلع سوم} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

۶۷- گزینه ۳ صحیح است.

۶۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, a^2 + b^2 = 25 \right) \Rightarrow b = a\sqrt{3} \quad a^2 + 3a^2 = 25 \Rightarrow a = 2$$

$$S = \frac{1}{2}ab \quad S = \frac{1}{2}(2 \times 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 25 \\ y^2 + h^2 = 49 \end{cases} \quad y^2 - x^2 = 24 \quad (y-x)(y+x) = 24$$

۶۹- گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 8 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{11}{2}, \quad x = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{11}$$

$$a + a + a\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2}) \quad a(2 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})$$

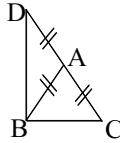
۷۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$a = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a(2 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2}a^2 = \frac{2}{2} = 1$$

۷۱- گزینه ۳ صحیح است.

۸۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

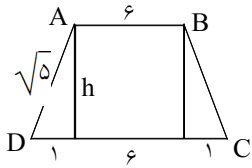


$$BA = AD = AC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$$

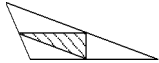
قائم الزاویه

$$h = \sqrt{5-1} = 2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} (6+8) \times 2 = 14$$

۸۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

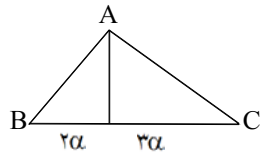


۸۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۴ برابر \Rightarrow هر چهار مثلث معادل هم اند.

۸۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$BH = 2(3\sqrt{6}) = 6\sqrt{6}$$

$$CH = 3(3\sqrt{6}) = 9\sqrt{6}$$

$$AH^2 = BH \cdot CH = 9 \times 36$$

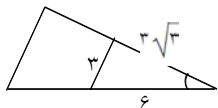
$$AH = 18$$

۸۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{5}{12} a \cdot h$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h}{\frac{5}{12} a \cdot h} = \frac{6}{5}$$

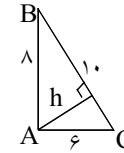


$$S = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

۸۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a^2 = 64 + 36 \Rightarrow a = 10$$

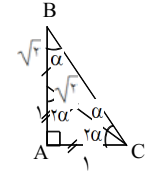
$$6 \times 8 = 10 \times h \Rightarrow h = 4/5$$



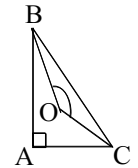
۷۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \text{زاویه کوچک تر}, 2\alpha + \alpha = 3\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{3\alpha} = \frac{1}{3}$$

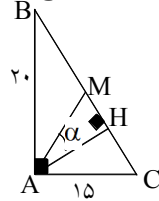
۷۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۷۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۷۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

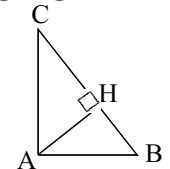


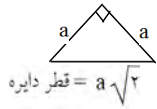
$$BC = 25, AM = 12/5, BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{225}{25} = 9, HM = 12/5 - 9 = 3/5$$

$$\sin \alpha = \frac{3/5}{12/5} = \frac{1}{4}$$

۸۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید در مثلث قائم الزاویه \widehat{ABC} , $AB = 2$ و $BC = 5$ داریم:

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 4 = 5BH \Rightarrow BH = 4/5 \Rightarrow CH = 5 - 4/5 = 21/5$$

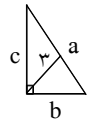




۹۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. این مثلث، قائم الزاویه نیز هست. داریم:

$$(2a + a\sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a\sqrt{2} = 6 \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2} = 9$$

۹۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

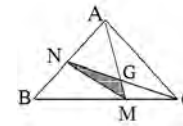


$$a = \frac{324}{42} = \frac{54}{7}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 6a = (b + c)^2 \Rightarrow a^2 + 6a = (18 - a)^2 \Rightarrow 6a = 324 - 36a \text{ و } 3a = bc$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{54}{7} = \frac{81}{7}$$

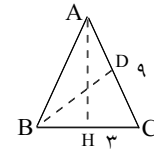
۸۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $MNC \text{ مساحت} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} (ABC \text{ مساحت}) = \frac{1}{4} (ABC \text{ مساحت})$



$$NG = \frac{1}{3} NC \Rightarrow \widehat{GMN} \text{ مساحت} = \frac{1}{3} (MNC \text{ مساحت})$$

$$\widehat{GMN} \text{ مساحت} = \frac{1}{12} (ABC \text{ مساحت}) \Rightarrow \text{برابر ۱۲}$$

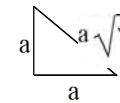
۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{3}{2} = 9 \Rightarrow \text{طول قاعده} = 9 \times \frac{2}{3} = 6 \Rightarrow AH = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

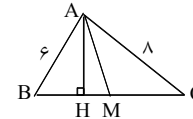
$$AH \cdot BC = AC \cdot BD \Rightarrow 6\sqrt{2} \times 6 = 9 \times BD \Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$$

۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



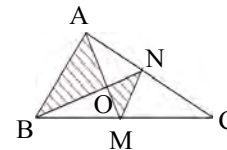
$$2a + a\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} a^2 = 9$$

۹۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث قائم الزاویه است. $6^2 + 8^2 = 10^2$



$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = 4/6, BM = 5 \Rightarrow MH = 1/4$$

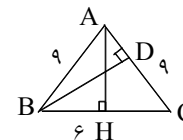
۹۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$OA = 2OM \Rightarrow \text{برابر مساحت } OMN \Rightarrow \text{برابر مساحت } OAB$$

$$12 \text{ برابر} \Rightarrow \text{سه برابر مساحت مثلث } OAB = \text{مساحت مثلث } ABC$$

۹۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AH = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

$$AH \cdot BC = BD \cdot AC \Rightarrow 6\sqrt{2} \times 6 = 9 \times BD \Rightarrow BD = 4\sqrt{2}$$

مساحت و فیثاغورس - سراسری

۱- مساحت یک دایره $38/465$ سانتی متر مربع است قطر دایره چند سانتی متر است؟ ($\pi = 3/14$)
 ۹ (۱) ۷ (۲) ۶/۵ (۳) ۴/۵ (۴)

۲- اگر در مثلث ABC ، BM و CN دو ارتفاع نظیر رأسهای B و C بوده و AB برابر ۶ سانتیمتر، AC برابر ۱۰ سانتیمتر، BM برابر ۳ سانتیمتر باشد، طول CN کدام است؟
 ۲ سانتیمتر (۱) ۴ سانتیمتر (۲) ۵ سانتیمتر (۳) ۷ سانتیمتر (۴)

۳- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 45^\circ$ ، اندازه‌ی ارتفاع BH برابر با ۳ متر و مساحت مثلث برابر با $\frac{9}{2}(1 + \sqrt{3})$ مترمربع است ضلع a چند متر است؟
 ۳ (۱) ۴/۵ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۴- در مثلث ABC ، دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. در این صورت نسبت $\frac{AH}{BH'}$ برابر کدام است؟

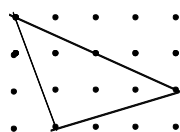
$$\frac{AC}{BC} \quad (1) \quad \frac{(AC)^2}{(BC)^2} \quad (2) \quad \frac{BC}{AC} \quad (3) \quad \frac{(BC)^2}{(AC)^2} \quad (4)$$

۵- در مثلث ABC داریم: $A = \frac{\pi}{2}$ و $\text{tg } B = \sqrt{2}$ و $a = 3\sqrt{3}$ اندازه ضلع c کدام است؟
 $\sqrt{6}$ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۶- در لوزی $ABCD$ ، $AB = 5$ و $\cos A = -\frac{3}{5}$ مساحت آن کدام است؟

$$15 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 25 \quad (4)$$

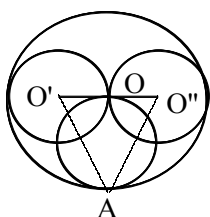
۷- در شکل زیر فاصله هر دو نقطه متوالی بصورت افقی یا عمودی برابر واحد است؟ طول ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع مثلث چقدر است؟



$$2\sqrt{2} \quad (1) \quad \frac{2\sqrt{5}}{3} \quad (2) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (4) \quad \sqrt{5} \quad (3)$$

۸- قطعه خط AB به طول ۶ سانتیمتر را روی دو محور عمود برهم تصویر کرده‌ایم. طول تصویر روی یکی از محورها ۳ سانتیمتر است طول تصویر روی دیگری چقدر است؟

$$2\sqrt{2} \quad (1) \quad 2\sqrt{3} \quad (2) \quad 3\sqrt{2} \quad (3) \quad 3\sqrt{3} \quad (4)$$

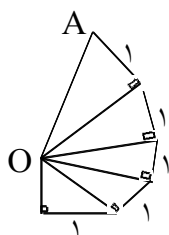


۹- در شکل زیر دایره بزرگ به مرکز O و به شعاع ۵ سانتیمتر است. مساحت مثلث $O'O''A$ چند سانتیمتر مربع است؟ (O' و O'' مرکز دو دایره کوچک)

- (۱) ۱۰
(۲) $12/5$
(۳) ۱۵
(۴) $17/5$

۱۰- اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتیمتر باشد طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتیمتر است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
(۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) $\sqrt{3}$



۱۱- در شکل زیر طول پاره خط OA کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{6}$
(۴) $\sqrt{7}$

۱۲- در نیمدایره‌ای به شعاع R مثلث قائم الزاویه‌ای را که وتر آن بر قطر منطبق است، محاط کرده‌ایم. اگر مساحت مثلث نصف مساحت نیم‌دایره باشد، ارتفاع مثلث کدام مضرب R است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
(۲) $\frac{\pi}{5}$
(۳) $\frac{\pi}{6}$
(۴) $\frac{\pi}{7}$

۱۳- طول اضلاع مثلثی ۵ و ۴ و ۳ سانتیمتر است. اندازه تصویر میانه نظیر ضلع بزرگتر بر آن ضلع چند سانتیمتر می‌باشد؟

- (۱) $0/6$
(۲) $0/7$
(۳) $0/75$
(۴) $0/8$

۱۴- فاصله نقطه p واقع در داخل مستطیل ABCD از راس A، B و C به ترتیب ۱۰، ۳ و ۴ متر است. فاصله نقطه p از D چند متر است؟

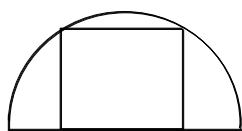
- (۱) $\sqrt{75}$
(۲) $\sqrt{95}$
(۳) $\sqrt{103}$
(۴) $\sqrt{107}$

۱۵- یک زاویه‌ی دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه‌ای ۴۵ درجه است. اگر ارتفاع و قاعده کوچک دوزنقه هر دو ۶ سانتی‌متر باشد، مساحت دوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۵۴
(۲) ۵۲
(۳) ۵۰
(۴) ۴۸

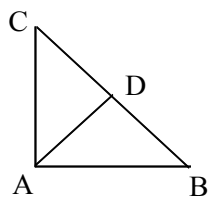
۱۶- محیط یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $6(1 + \sqrt{2})$ سانتیمتر است مساحت آن چند است؟

- (۱) ۹
(۲) $6\sqrt{2}$
(۳) ۱۲
(۴) $9\sqrt{2}$



۱۷- در شکل زیر شعاع نیم‌دایره برابر $7/5$ سانتیمتر است. مساحت مربع چند سانتیمتر است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۳۶
(۳) ۴۵
(۴) ۵۴



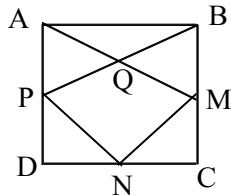
۱۸- در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه و مثلث ADB متساوی الاضلاع است. اگر $AC=6$ باشد طول وتر BC کدامست؟

(۴) $5\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{2}$

(۲) $5\sqrt{2}$

(۱) $4\sqrt{3}$



۱۹- در شکل مقابل ABCD مربع و P, N, M به ترتیب وسط اضلاع AD, DC, BC هستند. مساحت چهار ضلعی MNPQ چند برابر مساحت ABCD است؟

(۴) $\frac{5}{8}$

(۳) $\frac{3}{8}$

(۲) $\frac{4}{7}$

(۱) $\frac{3}{7}$

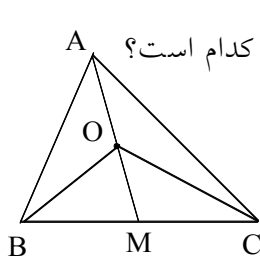
۲۰- اگر طول دو ضلع یک متوازی الاضلاع ثابت و یک زاویه آن تغییر کند، کدام گزینه در مورد محیط و مساحت آن صحیح است؟

(۲) محیط ثابت - مساحت متغیر

(۱) محیط متغیر - مساحت متغیر

(۴) محیط ثابت - مساحت ثابت

(۳) محیط متغیر - مساحت ثابت



۲۱- در شکل مقابل، مساحت مثلثهای ABC, OBC را به ترتیب S و S' می نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ کدام است؟

(۲) $\left(\frac{S'}{S}\right)^2$

(۱) $\sqrt{\frac{S'}{S}}$

(۴) $\frac{S'}{S}$

(۳) $\frac{S - S'}{S}$

۲۲- طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $2X + 1$ و $2X - 1$ و X است طول ضلع متوسط کدام است؟

(۴) ۱۹

(۳) ۱۷

(۲) ۱۵

(۱) ۱۳

۲۳- از چهار رأس یک چهار ضلعی خطهایی موازی قطرها رسم می کنیم. از تلاقی این خطوط یک چهارضلعی حاصل می شود. نسبت مساحت چهار ضلعی اول به چهارضلعی حاصل شده، کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$

۲۴- در یک مثلث قائم الزاویه به زاویه قائمه \hat{B} رابطه $b^2 = ac$ برقرار است. زاویه \hat{C} چند درجه است؟

(۴) ۷۵

(۳) ۶۰

(۲) ۴۵

(۱) ۳۰

۲۵- در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه یک زاویه 35° است. اندازه زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر این مثلث کدام است؟

(۴) 45°

(۳) 30°

(۲) 20°

(۱) 15°

۲۶- ماکزیم مساحت مثلثهای محاط در دایره به شعاع R کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}R^2$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}R^2$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}R^2$

۲۷- ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه، وتر را به دو قسمت به طولهای ۳ و ۱۲ سانتیمتر تقسیم کرده است. مساحت این مثلث چند سانتیمتر مربع است؟

(۱) ۲۶ (۲) ۴۵ (۳) ۴۲ (۴) ۴۰

۲۸- فرض کنیم نقطه C نقطه متغیری از دایره به شعاع R و AB وتر ثابتی از آن به فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره باشد. اگر

مساحت مثلث ABC ماکزیم باشد، آنگاه زاویه B کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۹- در مثلث قائم الزاویه ABC، $b = 5$ و $\cos B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. طول وتر این مثلث چقدر است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

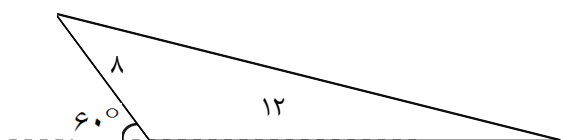
۳۰- قاعده یک مثلث بر طول مستطیل منطبق و عرض مستطیل $\frac{5}{12}$ ارتفاع وارد بر این قاعده مثلث است. مساحت مثلث چه

کسری از مساحت مستطیل است؟

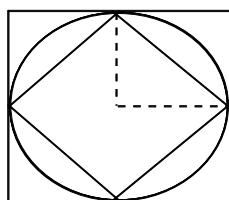
(۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۳۱- مساحت مثلث شکل زیر چقدر است؟

(۱) $16\sqrt{3}$ (۲) $24\sqrt{3}$ (۳) ۳۲ (۴) ۲۴



۳۲- هر دو چهارضلعی زیر مربع هستند. نسبت مساحت مربع بزرگ به مساحت مربع کوچک چقدر است؟



(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۳۳- ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه را رسم کرده ایم. مساحت یکی از دو مثلث دو برابر مساحت دیگری است. اگر طول این ارتفاع برابر ۴ باشد، مساحت مثلث اولیه چقدر است؟

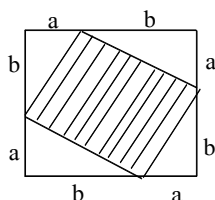
(۱) $9\sqrt{2}$ (۲) $10\sqrt{2}$ (۳) $11\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

۳۴- اگر $A(4, 4)$ و $C(1, 1)$ دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۸

۳۵- اگر به یک ضلع زاویه قائم در یک مثلث قائم‌الزاویه ۵ واحد اضافه شود
 (۱) به مساحت آن $\frac{2}{5}$ برابر ضلع دیگر اضافه می‌شود (۲) به مساحت آن ۵ واحد اضافه می‌شود
 (۳) به مساحت آن $\frac{2}{5}$ واحد اضافه می‌شود (۴) مساحت آن $\frac{2}{5}$ برابر می‌شود

۳۶- طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویه قائم آن ۵ و ۱۲ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر است؟
 (۱) $\frac{30}{7}$ (۲) $\frac{30}{11}$ (۳) $\frac{60}{13}$ (۴) $\frac{60}{11}$

۳۷- مربعی در داخل مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین طوری محاط شده است که دو ضلع آن بر روی دو ضلع زاویه قائم مثلث و یک رأس آن واقع بر وتر مثلث است. مساحت مثلث چند برابر مساحت مربع است؟
 (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$



۳۸- در شکل مقابل مساحت چهارضلعی هاشورزده کدام است؟

- (۱) $(a + b)^2$
 (۲) $a^2 + b^2$
 (۳) $a^2 + 2ab$
 (۴) $b^2 + 2ab$

۳۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ، اندازه ارتفاع وارد بر وتر برابر ۹ و $\cos B = \frac{2}{3}$ ، اندازه ضلع b کدام است؟
 (۱) $\frac{13}{5}$ (۲) $\frac{12}{5}$ (۳) $4\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{5}$

۴۰- مساحت مثلث ABC سه برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است. اگر ارتفاع وارد بر ضلع BC نصف ارتفاع وارد بر ضلع $B'C'$ باشد، قاعده BC چند برابر قاعده $B'C'$ است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۴۱- فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۴۲- اگر محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد، مساحت مثلث چند واحد مربع است؟
 (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) ۹ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

۴۳- در یک مستطیل مقدار ثابتی را از عرض آن کم کرده و همان مقدار را به طول آن می‌افزاییم تا مستطیل جدیدی حاصل شود. تغییر مساحت و محیط مستطیل چگونه‌اند؟

- (۱) مساحت ثابت و محیط کمتر
(۲) مساحت کمتر و محیط بیشتر
(۳) مساحت کمتر و محیط ثابت
(۴) مساحت بیشتر و محیط ثابت

۴۴- طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2X + 1$ ، $2X - 1$ ، X است ($X > 1$). طول ضلع متوسط کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

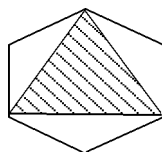
۴۵- از مستطیلی به ابعاد $X + 3$ و $X + 5$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $X - 1$ و $X + 4$ را حذف کرده‌ایم، مساحت باقیمانده کدام است؟

- (۱) $4X + 17$ (۲) $5X + 17$ (۳) $4X + 19$ (۴) $5X + 19$

۴۶- طول ساق یک مثلث متساوی الساقین $\sqrt{15}$ سانتی‌متر و طول قاعده آن ۱۲ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) $24\sqrt{3}$ (۲) ۴۲ (۳) $30\sqrt{2}$ (۴) ۴۸

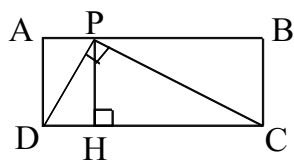
۴۷- اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم شکل مقابل ۴ باشد. مساحت مثلث سایه زده شده چند واحد مربع است؟



- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $16\sqrt{2}$ (۳) $16\sqrt{3}$ (۴) $18\sqrt{2}$

۴۸- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = \frac{\pi}{2}$) $AC = 2AB$ ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶



۴۹- در مستطیل شکل مقابل $P = 90^\circ$ و $AP = BP = 9$. طول DP کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۶

۵۰- در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH و میانه AM را رسم می‌کنیم اگر HB و HC به ترتیب ۴ و ۹ واحد باشند مساحت مثلث AMH کدام است؟

- (۱) $4/5$ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) $7/5$

۵۱- در دوزنقه قائم الزاویه‌ای نسبت دو قاعده برابر $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده کوچک را به وسط ساق قائمه وصل کنیم مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت دوزنقه اصلی است؟

(۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۵۲- در یک مثلث قائم الزاویه اندازه‌های میانه و ارتفاع وارد بر وتر به ترتیب ۳ و $2\sqrt{2}$ است، اندازه ضلع متوسط این مثلث کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{3}$

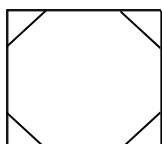
۵۳- در یک مستطیل وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، نسبت مساحت مستطیل به مساحت شکل حاصله کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) ۳

۵۴- در یک مستطیل با طول و عرض $2\sqrt{6}$ و $2\sqrt{3}$ ، فاصله هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$

۵۵- در شکل مقابل مساحت مربع دو واحد است. مساحت هشت ضلعی منتظم کدام است؟



(۱) $4(\sqrt{2}-1)$ (۲) $4(2-\sqrt{2})$ (۳) $2(\sqrt{2}-1)$ (۴) $2(2-\sqrt{2})$

۵۶- اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است، عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

(۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\frac{25}{3}$

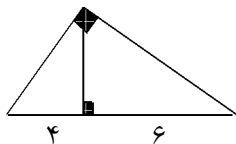
۵۷- هر یک از رأس‌های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع $\frac{5}{8}$ باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۸- در مستطیلی به ابعاد ۱۳ و ۶ واحد، نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگتر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عموداند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $3/5$ (۳) ۴ (۴) $4/5$

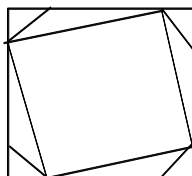
۵۹- در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟



(۲) $\sqrt{65}$
(۴) $\sqrt{75}$

(۱) $\sqrt{50}$
(۳) $\sqrt{70}$

۶۰- در شکل مقابل اندازه طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



(۲) $4(2 + \sqrt{2})$
(۴) $8(2 + \sqrt{2})$

(۱) $4(1 + \sqrt{2})$
(۳) $8(1 + \sqrt{2})$

۶۱- در یک متوازی‌الاضلاع وسط دو ضلع غیر موازی را به هم وصل می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌شود، مساحت قسمت بزرگ‌تر چند برابر مساحت قسمت کوچک‌تر است؟

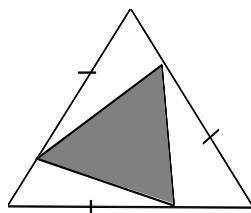
(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۵

۶۲- هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



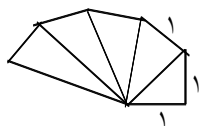
(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{4}{9}$

۶۳- مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک رأس مشترک، که اندازه‌ی یک ضلع قائم آن‌ها ۱ واحد است، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آن، وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟



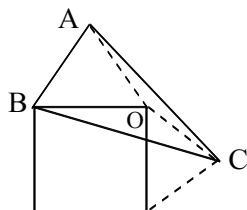
(۲) $\frac{5}{4}$

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

۶۴- در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $1 + \sqrt{3}$

(۴) ۴

(۳) $2 + \sqrt{3}$

۶۵- از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هریک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کم‌ترین مقدار محیط کدام است؟

(۴) ۳۸

(۳) ۳۶

(۲) ۳۴

(۱) ۳۲

۶۶- در مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم ۳ و $\sqrt{7}$ است. ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. فاصله ی پای قائم از وسط وتر، کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۴)$$

$$\frac{2}{5} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{4} (۱)$$

۶- لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و می دانیم مساحت متوازی الاضلاع برابر است با حاصلضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع، پس ابتدا سینوس زاویه بین دو ضلع را محاسبه می کنیم:

$$C \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow S = AB \cdot AD \cdot \sin A = 5 \times 5 \times \frac{3}{5} = 15$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.

۷- $AB = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}, AC = \sqrt{1}, BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

بنابراین مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین است. چون بزرگترین ضلع (وتر) قاعده مثلث نیز می باشد، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نظیر وتر نیز خواهد بود و می دانیم در هر مثلث قائمه میانه نظیر وتر، نصف وتر است بنابراین:

$$h = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

روش دوم:
با انتخاب دستگاه مختصات سه نقطه $B(0, 3), C(4, 1), A(1, 0)$ رأسهای مثلث بوده و معادله خط ضلع بزرگتر برابر است با:

$$BC: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1 - 3}{4 - 0}(x - 0) \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

و فاصله نقطه $A(1, 0)$ از این خط ارتفاع وارد بر BC خواهد بود:

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 0 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$$

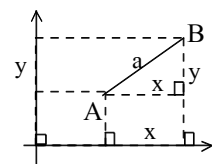
در قسمت فوق از رابطه فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ استفاده گردیده است که برابر است با:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

لذا گزینه ۳ جواب صحیح است.

۸- یادآوری: اگر پاره خط به طول a روی دو محور عمود برهم تصویر شوند و طول تصویرها x و y باشند داریم: $x^2 + y^2 = a^2$ پس: $3^2 + y^2 = 6^2 \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$

و گزینه ۴ جواب صحیح است.



جواب مساحت و فیثاغورس - سراسری

۱- اگر شعاع دایره باشد، مساحت دایره از رابطه $S = \pi R^2$ به دست می آید. پس:

$$\frac{38}{465} = \frac{3}{14} \times R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{38/465}{3/14} = \frac{12}{25} \Rightarrow R = \sqrt{12/25} = \frac{2}{5}$$

قطر $= 2 \times R = 2 \times 2/5 = 4/5$

پس گزینه ۲ درست است.

۲- مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BM \times AC = \frac{1}{2} CN \times AB \Rightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times 10 = \frac{1}{2} \times 6 \times CN \Rightarrow CN = 5$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:

$$S = \frac{1}{2} BH \cdot AC \Rightarrow AC = \frac{2S}{BH} = \frac{9(1 + \sqrt{3})}{3} = 3 + 3\sqrt{3}$$

با توجه به آن که در مثلث قائمهی $\triangle ABH$ زاویهی $A = 45^\circ$ است لذا $\hat{A} = \hat{B}_1$ و $\hat{B} = 90^\circ - A = 45^\circ$ بنابراین مثلث ABH قائم الزاویه متساوی الساقین است لذا:

$$AH = BH = 3 \Rightarrow HC = AC - AH = 3\sqrt{3}$$

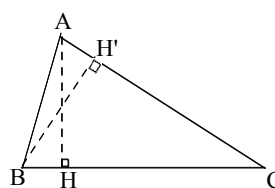
در مثلث قائمه BHC طبق رابطه فیثاغورث:

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

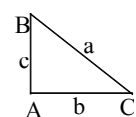
۴- می دانیم که مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن ضلع پس:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{AC \cdot BH'}{2} \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC}$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.



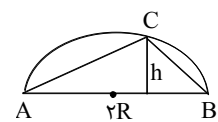
۵- طبق شکل با توجه به اینکه مثلث ABC قائمه است داریم:



$$\begin{cases} \tan B = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c \\ \text{رابطه فیثاغورث: } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = (3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 = 2c^2 \Rightarrow c = 3$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

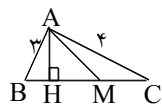


۱۲- مساحت مثلث برابر است با: $\frac{1}{2}(\pi R)h = Rh$ و مساحت نیم‌دایره برابر است با

$$\frac{1}{2}(\pi R^2)$$

$$Rh = \frac{1}{2}(\pi R^2) \Rightarrow h = \frac{\pi}{2} R \Rightarrow \frac{h}{R} = \frac{\pi}{2}$$

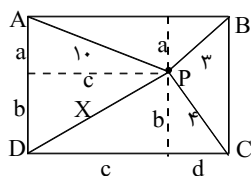
پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، باید MH را به دست آوریم.

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}, BM = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$$

$$MH = BM - BH = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$



۱۴- روش اول: با توجه به روابط فیثاغورث برای مثلثهای قائمه طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 100 \\ a^2 + d^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow c^2 - d^2 = 100 - 9$$

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = 16 \\ b^2 + c^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - d^2 = x^2 - 16$$

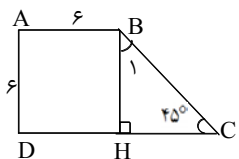
در نتیجه $x^2 - 16 = 100 - 9 \Rightarrow x = \sqrt{107}$ و بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

روش دوم:

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

هرگاه P نقطه‌ای دلخواه در صفحه مستطیل ABCD باشد همواره خواهیم داشت:

$$Pd = \sqrt{107} \text{ در نتیجه } 100 + 16 = 9 + Pd^2 \text{ با جایگذاری خواهیم داشت:}$$



۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق شکل چهارضلعی ABHD مربع است چون ۴

زاویه قائمه دارد و دو ضلع مجاورش برابرند پس:

$$\begin{cases} BH = DA = 6 \\ \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 90 - 45 = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow CH = BH = 6$$

$$\Rightarrow DC = 6 + 6 = 12$$

$$S = \frac{6(6 + 12)}{2} = 54 \text{ مساحت دوزنقه برابر با نصف حاصل ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده است پس}$$

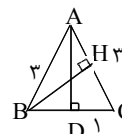
۹- در دو دایره مماس خارج خط مرکزین بر مماس مشترک داخلی دو دایره عمود است و طول خط مرکزین برابر مجموع شعاعهای دو دایره است پس:

$$O'O'' = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R = 5$$

مماس مشترک داخلی دو دایره O' و O'' عمود بر خط مرکزین O'O'' بوده و به علت تقارن شکل از A می‌گذرد. بنابراین ارتفاع مثلث AOO'' مساوی پاره خط OA = R = 5 بوده و مساحت مثلث مطلوب برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} O'O'' \times OA = 12.5$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.



۱۰- روش اول: در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه‌ی نظیر قاعده نیز می‌باشد پس داریم:

$$\widehat{ADC}: AD^2 = AC^2 - CD^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow AD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مثلث } S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} \Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow 2 \times 2\sqrt{2} = 3 \cdot h_b \Rightarrow h_b = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم در هر مثلث مساحت طبق رابطه هرون برابر است با:

$$\begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ p = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

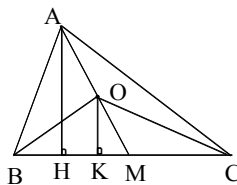
$$\begin{cases} S = \sqrt{4(4-2)(4-3)(4-3)} = \sqrt{4} \\ p = \frac{2+3+3}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{3 \times BH}{2} = \sqrt{4} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{4}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

۱۱- طبق رابطه فیثاغورث اگر طول وترها را بطور متوالی a_1, a_2, \dots, a_n بنامیم داریم:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 1^2 + 1^2 = 2, & a_2^2 &= a_1^2 + 1^2 = 3 \\ a_3^2 &= a_2^2 + 1^2 = 4, & a_4^2 &= a_3^2 + 1^2 = 5 \\ a_5^2 &= a_4^2 + 1^2 = 6 \Rightarrow a_5 = \sqrt{6} \Rightarrow OA = a_5 = \sqrt{6} \end{aligned}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث‌های با قاعده‌های یکسان، نسبت مساحتها برابر با نسبت ارتفاعها می‌باشد، بنابراین طبق شکل روبرو داریم:

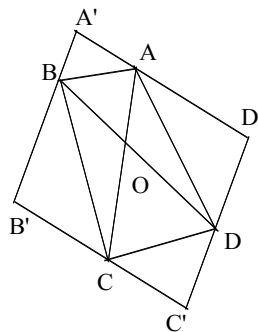
$$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{OK \times BC}{AH \times BC} = \frac{rS'}{rS} = \frac{S'}{S}$$

۲۲- طبق رابطه فیثاغورث:

$$(2x+1)^2 = (2x-1)^2 + x^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 \Rightarrow 8x = x^2$$

$$\Rightarrow x = 8, 2x - 1 = 15, 2x + 1 = 17$$

پس طول ضلع متوسط برابر $15 = 2x - 1$ می‌باشد و گزینه ۲ صحیح است.



۲۳- اگر ABCD چهار ضلعی اولیه باشد و $A'D' \parallel B'C' \parallel BD$ و $A'B' \parallel D'C' \parallel AC$ باشند. برای چهار ضلعی OAA'B داریم که:

نکته: در هر متوازی الاضلاع، هر قطر آن را به ۲ مثلث با مساحت برابر تقسیم می‌کند.

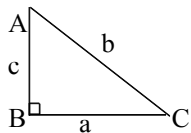
$$\left. \begin{array}{l} AA' \parallel OB \\ BA' \parallel OA \end{array} \right\} \Rightarrow OAA'B \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAA'B}$$

به همین ترتیب چهار ضلعیهای OAD'D, OCC'D, و OBB'C متوازی الاضلاع خواهند شد. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAA'B} \\ S_{OAD} = \frac{1}{2} S_{OAD'D} \\ S_{ODC} = \frac{1}{2} S_{OCC'D} \\ S_{OBC} = \frac{1}{2} S_{OBB'C} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{OAB} + S_{OAD} + S_{ODC} + S_{OBC} = \frac{1}{2} (S_{OAA'B} + S_{OAD'D} + S_{OCC'D} + S_{OBB'C})$$

$$= \frac{1}{2} (S_{OAA'B} + S_{OAD'D} + S_{OCC'D} + S_{OBB'C}) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{A'B'C'D'}$$

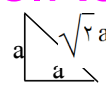
گزینه ۲ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق سوال} : b^2 = 2ac \\ \text{با توجه به رابطه فیثاغورث} : b^2 = a^2 + c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = 2ac$$

$$\Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$$

یعنی مثلث ABC مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است. پس $C = 45^\circ$ است. گزینه ۲ صحیح است.



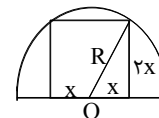
۱۶- اگر طول هر ضلع این مثلث را a بنامیم، طول وتر $a\sqrt{2}$ است. پس داریم:

$$\text{محیط} = 2a + a\sqrt{2} = 6 + 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{a^2}{2} \Rightarrow S = \frac{(3\sqrt{2})^2}{2} \Rightarrow S = 9$$

و مساحت برابر خواهد بود با:

پس گزینه ۱ صحیح است.



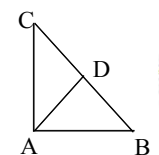
۱۷- با توجه به تقارن شکل، مرکز دایره در وسط ضلع مربع است داریم:

$$R^2 = (2x)^2 + x^2 \Rightarrow R^2 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} R^2$$

$$S = (2x)^2 = 4x^2 \Rightarrow S = \frac{4}{5} R^2 = \frac{4}{5} (5 \times 5 \times 5) = 100$$

مساحت مربع چنین است:

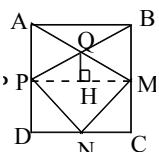
پس گزینه ۳ صحیح است.



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

۱۸- در مثلث متساوی الاضلاع همه زاویه‌ها برابر با 60° می‌باشد، پس:

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۱۹- فرض می‌کنیم طول هر ضلع مربع برابر a باشد. هرگاه از M به P وصل کنیم داریم:

$$S_{MNPQ} = S_{MPQ} + S_{MNP}$$

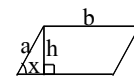
چون M و P وسط اضلاع روبرو هستند لذا فاصله ضلع CD از MP برابر نصف ضلع مربع است.

$$S_{MNP} = \frac{MP \times MP}{2} = \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$$

ABMP مستطیل است و فاصله محل برخورد قطرهای آن تا طول مستطیل برابر نصف عرض آن است یعنی

$$QH = \frac{1}{2} AP = \frac{a}{4} \Rightarrow S_{MPQ} = \frac{MP \times QH}{2} = \frac{a \times \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$$

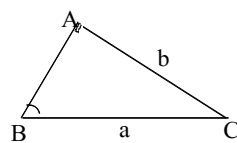
پس گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۰- اگر a و b اضلاع متوازی الاضلاع و X زاویه بین آنها باشد:

$$\left. \begin{array}{l} S = b \cdot h \\ \sin x = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت} = ab \sin x, \text{ محیط} = 2(a + b)$$

با تغییر X، مقدار محیط ثابت می‌ماند درحالیکه مساحت آن تغییر می‌کند. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.



۲۹- می‌دانیم که همواره $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (زاویه دلخواه).

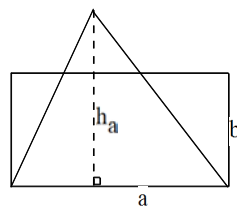
چون زاویه \hat{B} حاده است، پس:

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{24}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{5}{7} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = 7$$

از طرفی سینوس زاویه B برابر است با نسبت ضلع b به وتر، پس:

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

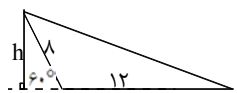


۳۰- $S_1 = \frac{1}{2} a h_a$ مساحت مثلث و $S_2 = ab$ مساحت مستطیل

و نیز داریم $b = \frac{5}{12} h_a$ در نتیجه:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} a h_a}{ab} = \frac{1}{2} \frac{h_a}{b} = \frac{h_a}{2 \left(\frac{5}{12} h_a \right)} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



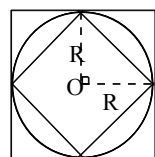
۳۱- در مثل مقابل چون یک زاویه منفرجه وجود دارد ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۱۲ خارج مثلث قرار می‌گیرد.

با توجه به شکل، ارتفاع وارد بر ضلع به طول ۱۲ برابر است با: $\sin 60^\circ = \frac{h}{a}$ و

$$S = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 60^\circ = 24\sqrt{3}$$

یا $h = 8 \sin 60^\circ$. پس مساحت مثلث برابر است با:

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

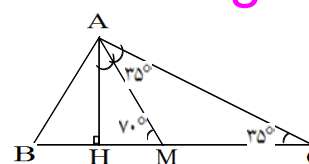


۳۲- اگر شعاع دایره را R در نظر بگیریم، با توجه به شکل ضلع مربع بزرگ برابر با $\sqrt{2}R$ و نصف قطر مربع کوچک برابر با R می‌باشد. بنابراین ضلع مربع کوچک برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ خواهد بود.

می‌دانیم نسبت مساحت دو مربع برابر با مربع نسبت اضلاع آن است:

$$\frac{S}{S'} = \frac{(2R)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2} = 4$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.



۲۵- با توجه به شکل و این نکته که میانه وارد بر وتر نصف وتر است، مثلث

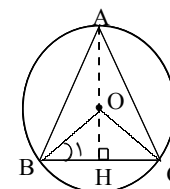
AMC متساوی الساقین خواهد بود، در مثلث AMC زاویه خارجی

$$\hat{M} = \hat{A} + \hat{C} = 35^\circ + 35^\circ = 70^\circ$$

است، بنابراین:

$$\hat{HAM} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.



۲۶- می‌دانیم مساحت مثلث محاط در دایره وقتی ماکزیمم است که مثلث متساوی الاضلاع باشد.

همچنین مرکز دایره محیطی، محل برخورد نیمسازهای سه زاویه مثلث است. بنابراین BO

نیمساز B بوده و داریم:

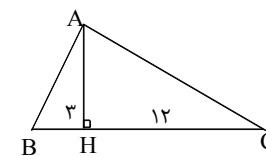
$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{3} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} BO = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow BC = 2BH = \sqrt{3} R$$

$$OH^2 = BO^2 - BH^2 = R^2 - \frac{3}{4} R^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2}$$

$$AH = AO + OH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2} R$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} R \times \sqrt{3} R = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

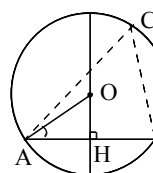


۲۷- می‌دانیم که در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه ایجادشده کرده. پس:

$$\left. \begin{aligned} AH^2 &= BH \cdot CH = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow AH = 6 \\ BC &= BH + CH = 3 + 12 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 15 \times 6 = 45$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۸- در مثلث قائم الزاویه \hat{OAH} :

$$OH = \frac{R}{2} = \frac{OA}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{O} = 60^\circ \Rightarrow \hat{AB} = 120^\circ \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه C برابر مقدار ثابت 60° درجه است. در مثلث ABC قاعده AB ثابت است، پس برای ماکزیمم شدن مساحت باید ارتفاع وارد بر آن ماکزیمم باشد یعنی C روی

عمودمنصف AB قرار گیرد (انتهای قطر دایره) پس $CB = CA$ خواهد بود و $\hat{B} = \hat{A} = \frac{\pi}{3}$. پس مثلث

متساوی الاضلاع خواهد شد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۷- می دانیم در مثلث قائم الزاویه نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه قائمه برابر مساحت مثلث می باشد.

اگر هر ضلع قائم مثلث، a فرض شود، مساحت مثلث برابر با $\frac{a \times a}{2} = \frac{a^2}{2}$ و $\frac{a \times a}{2} = \frac{a^2}{2}$ می باشد. مساحت هر یک از دو مثلث کوچک برابر با $\frac{x(a-x)}{2}$ می باشد. مجموع مساحتی مثلثی کوچک و مربع برابر با مساحت مثلث بزرگ است، پس:

$$\frac{2x(a-x)}{2} + x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow ax - x^2 + x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۳۸- با توجه به قضیه فیثاغورث هر ضلع چهارضلعی هاشور خورده برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ است. از طرفی چون $A_1 + A_2 = 90^\circ$ لذا اضلاع چهارضلعی و زوایای آن باهم برابرند در نتیجه چهارضلعی هاشور زده مربع می باشد و مساحت آن بصورت زیر است:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2$$

پس گزینه ۲ درست است.

۳۹- یادآوری: هرگاه دو زاویه α و β متمم یکدیگر باشند $\sin \alpha$ با $\cos \beta$ برابر است. با توجه به شکل داریم:

$$\cos B = \sin C = \frac{AH}{b} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

لذا گزینه ۱ صحیح است.

۴۰- اگر h ارتفاع وارد بر ضلع BC از مثلث ABC و h' ارتفاع وارد بر ضلع $B'C'$ از مثلث $A'B'C'$ باشد:

$$h = \frac{h'}{2} \text{ یا } h' = 2h$$

$$\frac{BC \times h}{2} = 2 \frac{B'C' \times 2h}{2} \Rightarrow BC = 4B'C'$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح می باشد.

۳۳- با توجه به شکل مقابل:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{AH \cdot BH}{2} \\ S_2 &= \frac{AH \cdot CH}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH = 2BH$$

از طرفی می دانیم در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است، پس:

$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow \begin{cases} BH \cdot CH = 4 = 16 \\ CH = 2BH \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BH = \sqrt{4} = 2 \\ CH = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$BC = BH + CH = 6 \Rightarrow S = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{4 \times 6 \sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

بنابراین گزینه ۴ جواب صحیح است.

۳۴- چون A و C رئوس مقابل یک مربع می باشند، پس AC برابر قطر مربع می باشد، پس:

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

طبق رابطه فیثاغورث طول ضلع مربع بصورت زیر محاسبه می شود:

$$AC^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 18 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

مساحت مربع برابر با $a^2 = 9$ بوده و گزینه ۳ صحیح است.

۳۵- در مثلث قائم الزاویه اگر دو ضلع قائمه a و b باشد، مساحت بصورت $S = \frac{1}{2}ab$ است. اگر ضلع b از مثلث را 5

$$S' = \frac{1}{2}a(b+5) = \frac{1}{2}ab + \frac{5}{2}a$$

واحد اضافه نماییم، تغییر مساحت برابر است با:

پس به مقدار مساحت $5/2$ برابر ضلع دیگر افزوده می شود. پس گزینه ۱ صحیح است.

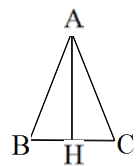
۳۶- می دانیم در مثلث قائم الزاویه مساحت برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه قائم مثلث.

$$a^2 = b^2 + c^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = 13$$

با توجه به شکل:

$$S = \frac{1}{2}cb = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow 5 \times 12 = 13 \times h \Rightarrow h = \frac{60}{13}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۴۶- یادآوری: ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی الساقین میانه قاعده نیز می باشد.

$$\left. \begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + BH^2 \\ BH &= \frac{BC}{2} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 6^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

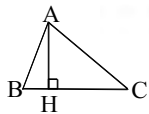
۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث سایه زده شده مثلث متساوی الاضلاعی است که طول ضلع آن برابر قطر کوچک ۶ ضلع منظم است و می دانیم، قطر کوچک ۶ ضلعی منظم، $\sqrt{3}$ برابر ضلعش می باشد، بنابراین داریم:

$$\text{ضلع مثلث} = \sqrt{3} \times 6 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ABH} \sim \widehat{ABC} &\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \\ \widehat{ACH} \sim \widehat{ABC} &\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CH \cdot BC = AB^2 \cdot BC \Rightarrow CH = AB^2$$

طبق فرض: $AC = 2AB$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABM}} = \frac{\frac{AH \times BC}{2}}{\frac{AM \cdot BM}{2}} = \frac{BC}{BH} = 5 \Rightarrow BH = \frac{1}{5} BC$$

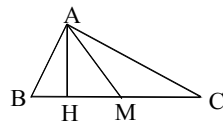
بنابراین خواهیم داشت: در نتیجه:

۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه PHD، ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:

$$PH^2 = DH \cdot CH = AP \cdot PB \Rightarrow PH^2 = 3 \times 9 = 27 \Rightarrow PH = AD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

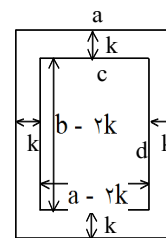
$$3AP = 9 \Rightarrow AP = 3$$

$$(رابطه فیثاغورس) DP^2 = AD^2 + AP^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow DP = 6$$



$$\left. \begin{aligned} MH &= MB - BH = 6/5 - 4 = 2/5 \\ AH^2 &= BH \cdot HC \Rightarrow AH = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMH} = \frac{6 \times 2/5}{2} = 6/5$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۴۱- با توجه به شکل داریم:

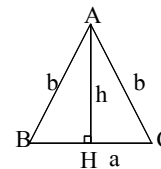
$$\left\{ \begin{aligned} \text{محیط اتاق: } (a+b) \times 2 &= 20 \\ \text{مساحت اتاق: } ab &= 24 \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{cases} a+b=10 \\ ab=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\text{محیط قالی } b = (a-2k + b-2k) \times 2 = 12 \Rightarrow a+b-4k=6 \Rightarrow k=1$$

$$c = a-2k = 4-2=2, d = b-2k = 6-2=4$$

$$\text{مساحت قالی } cd = 4 \times 2 = 8$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز

می باشد. لذا $BH = \frac{a}{2}$. با توجه به شکل مقابل:

$$\left\{ \begin{aligned} 2b+a &= 18 \\ h^2 + \frac{a^2}{4} &= b^2 \\ h &= 3 \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=5 \end{cases}, S = \frac{1}{2} ah = 12$$

۴۳- اگر طول مستطیل را a و عرض آن را b بنامیم و مقدار ثابت ذکر شده در مسئله را x بنامیم، خواهیم داشت:

$$\text{مقداری ثابت} = [(b-x) + (a+x)] \times 2 = (a+b) \times 2 = \text{محیط}$$

$$\text{مساحت} = (a+x)(b-x) = ab + (b-a)x - x^2$$

چون $a < b$ است، پس مساحت کمتر می شود. بنابراین گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$x > 1 \Rightarrow x < 2x - 1 < 2x + 1$$

۴۴- طبق فرض سوال داریم:

پس ضلع وسط $2x-1$ است طبق رابطه فیثاغورث داریم:

$$(2x+1)^2 = x^2 + (2x-1)^2 \Rightarrow x=8 \Rightarrow 2x-1=15$$

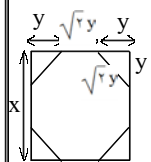
پس گزینه ۲ صحیح است.

۴۵- مساحت مستطیل با ابعاد $x+3$ و $x+5$ برابر است با: $(x+3)(x+5)$.

مساحت مستطیل با ابعاد $x-1$ و $x+4$ برابر است با: $(x-1)(x+4)$.

$$\text{مساحت باقیمانده} = (x+3)(x+5) - (x-1)(x+4) = (x^2 + 8x + 15) - (x^2 + 3x - 4) = 5x + 19$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.



۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

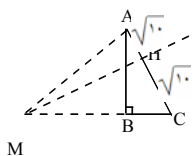
$$x = 2y + \sqrt{2}y \Rightarrow x = (2 + \sqrt{2})y$$

بنا بر فرض مساحت مربع ۲ واحد است یعنی $x^2 = 2$ پس داریم:

$$2 = (2 + \sqrt{2})^2 y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{6 + 4\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\text{زاویه}} \Rightarrow \text{مساحت هشت ضلعی} = 2 - 2y^2 = 2(1 - y^2)$$

$$= 2 \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \right) = 4(\sqrt{2} - 1)$$



$$AB = 6, BC = 2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{10}$$

۵۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

قرار می دهیم $MC = z$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} MH \cdot AC$$

$$6z = \sqrt{z^2 - 10} \times 2\sqrt{10} \Rightarrow 3z = \sqrt{10z^2 - 100}$$

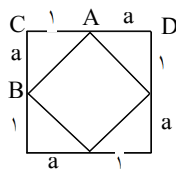
$$9z^2 = 10z^2 - 100 \Rightarrow z^2 = 100 \Rightarrow z = 10$$

$$MB = MC - BC \Rightarrow MB = 8$$

$$AB = \sqrt{1 + a^2}$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1 + a^2}{(1 + a)^2} = \frac{5}{8} \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{1}{3}$$



۵۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

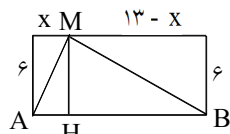
$$x(13 - x) = MH^2$$

$$x(13 - x) = 36 \Rightarrow x = 4$$

$$MB^2 + MA^2 = AB^2$$

$$36 + (13 - x)^2 + 36 + x^2 = 169 \Rightarrow$$

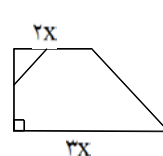
$$2x^2 - 26x + 72 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } x = 9$$



روش دوم:

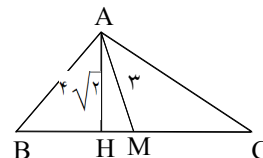
با توجه به شکل:

۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S = \frac{1}{2}(2x + 3x)h = \frac{5}{2}xh$$

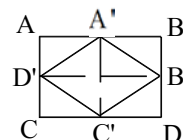
$$S = \frac{1}{2}x \times \frac{h}{2} = \frac{1}{4}xh \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{10}$$



۵۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. میانه وارد بر وتر نصف و تر است پس: $\begin{cases} BC = 6 \\ MC = 3 \end{cases}$

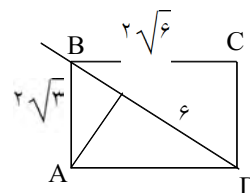
در مثل AHM با توجه به رابطه فیثاغورس $MH = 1$

$$AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = 2\sqrt{6} : AHC \text{ پس در مثل}$$



۵۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} S_{ABCD} &= a \times b \\ S_{A'B'C'D'} &= \frac{\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ}}{2} = \frac{a \times b}{2} \end{aligned} \right\} \frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{لوزی}}} = 2$$



۵۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

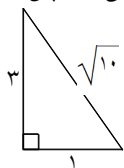
$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{24 + 12} = \sqrt{36}$$

$$d (\text{قطر}) = 6$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ABD} &= \frac{1}{2} \times h \times 6 \\ S_{\text{مستطیل}} &= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = 2S_{ABD} \Rightarrow$$

$$6 \times h = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{18}}{3} = 2\sqrt{2}$$

۶۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وتر مثلث قائم الزاویه به ترتیب $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و می باشد پس مثلث نهم



دارای وتر $\sqrt{10}$ است و شکل آن به صورت زیر است.

$$S = \frac{1 \times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

۶۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث \widehat{OAB} ، مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ می باشد و مثلث های \widehat{OAC} و \widehat{OBC}

$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

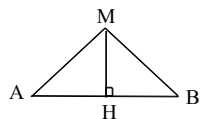
متساوی الساقین به ساق ۲ هستند.

$$S_{AOC} = S_{BOC} = \frac{1}{2} (2)(2) = 1$$

$$S_{ABC} = \sqrt{3} + 1 + 1 = \sqrt{3} + 2$$

۶۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت و قاعده ثابت است پس ارتفاع MH ثابت می باشد. پس در صورتی کم ترین

محیط برای مثلث \widehat{MAB} ایجاد می شود که مثلث متساوی الساقین باشد.



$$AH = 8 \text{ و } MH = 6 \Rightarrow MA = MB = 10$$

$$\text{محیط} = 10 + 10 + 16 = 36$$

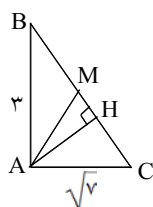
۶۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 7 = 16 \Rightarrow BC = 4$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 7 = CH \times 4 \Rightarrow CH = \frac{7}{4}$$

$$CM = \frac{BC}{2} = 2$$

$$MH = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$$

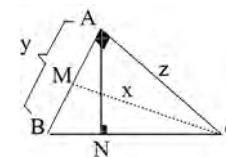


۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ارتفاع AN را برابر x در نظر بگیریم داریم:

$$x^2 = 4 \times 6 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$y^2 = 16 + 24 = 40 \rightarrow y = 2\sqrt{10}$$

$$z^2 = 10^2 - 40 = 60 \rightarrow z = \sqrt{60}$$

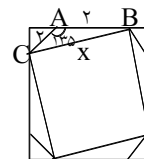


در مثلث CMA:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2$$

$$CM^2 = 10 + 60 = 70 \rightarrow CM = \sqrt{70}$$

۶۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مثلث ABC و قضیه کسینوس ها



$$x^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \cos 135 \Rightarrow x^2 = 8 + 4\sqrt{2}$$

۶۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول: با توجه به شکل اگر وسط ها را به هم وصل کنیم ۸ مثلث هم مساحت به دست می آید.



$$\frac{S_{ADEF}}{S_{ABC}} = \frac{ra \times h}{\frac{1}{2} \times a \times \frac{h}{2}} = 8 \Rightarrow \frac{S_{BCFED}}{S_{ABC}} = 7$$

راه دوم:

$$S = 3 \times \frac{h \times rx}{2} = rhx$$

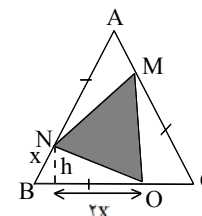
۶۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت مثلث های سفید برابر است با:

مساحت مثلث های هاشورخورده برابر است با:

$$S(MNO) = S(ABC) - 3S(MCO) = \frac{rh \times rx}{2} - rhx = \frac{rhx}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{rh \times rx}{2} = \frac{9hx}{2}$$

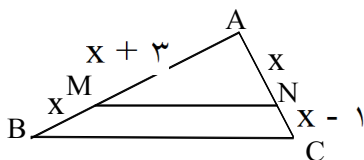
$$\frac{S(MNO)}{S(ABC)} = \frac{\frac{rhx}{2}}{\frac{9hx}{2}} = \frac{1}{9}$$



فاصله $2x$ برابر فاصله OB است.

تالسی و تشابه - خارج از کشور

۱- در شکل مقابل، MN موازی BC است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟



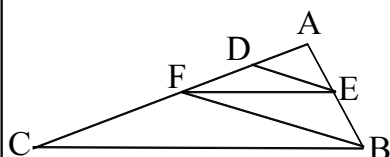
- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{5}{9}$
(۳) $\frac{7}{9}$
(۴) $\frac{8}{9}$

۲- در یک دوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده‌ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه‌های ساق‌ها ۵ واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو ساق این دوزنقه از قاعده‌ی کوچکتر چند واحد است؟



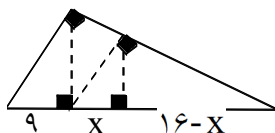
- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

۳- در شکل مقابل $DE \parallel FB$ و $BC \parallel EF$. اگر $AD = ۳$ و $DF = ۶$ آن‌گاه BC چند برابر EF است؟



- (۱) ۲
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{2}{75}$
(۴) ۳

۴- در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

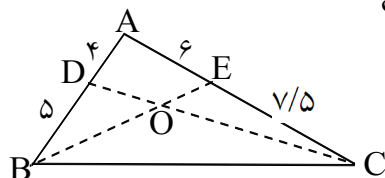


- (۱) $\frac{4}{54}$
(۲) $\frac{5}{36}$
(۳) $\frac{5}{76}$
(۴) $\frac{6}{75}$

۵- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{2}{3}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

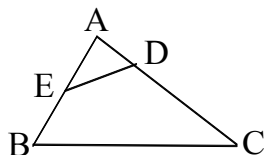
- (۱) $\frac{1}{5}$
(۲) $\frac{2}{25}$
(۳) $\frac{2}{75}$
(۴) ۳

۶- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{4}{5}$
(۳) $\frac{5}{6}$
(۴) ۱

۷- در چهارضلعی $BCDE$ ، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. اگر $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ ، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



- (۱) $\frac{0}{56}$
(۲) $\frac{0}{64}$
(۳) $\frac{0}{72}$
(۴) $\frac{0}{80}$

جواب تالس و تشابه - خارج از کشور

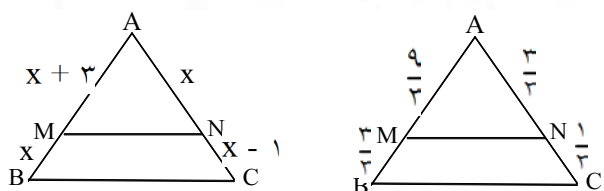
۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر MN موازی BC باشد، آن گاه بر اساس قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x}{x-1} \rightarrow \cancel{x} + 2x - 3 = \cancel{x} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

بنابراین شکل به صورت روبه رو درمی آید. از طرفی می دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه

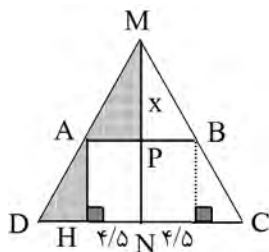
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}} = \left(\frac{AC}{AN}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$$

آن ها است، بنابراین:



۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث ADH با توجه به رابطه ی فیثاغورس $AH = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ به دست

می آید، حال در مثلث MDC از قضیه ی تالس استفاده می کنیم:

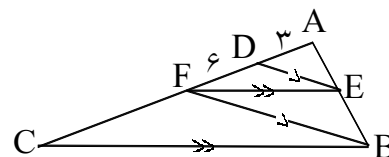


$$\frac{MP}{MN} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow 3x + 12 = 5x \rightarrow x = 6$$

۳- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل با توجه به قضیه ی تالس، می نویسیم:

$$\triangle ABC : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\triangle ABF : DE \parallel FB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BF} = \frac{AD}{AF} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$



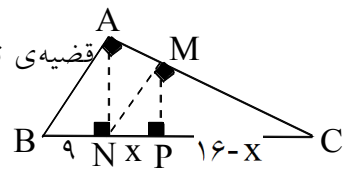
از تناسب دوم داریم $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$. آن را در تناسب اول جایگذاری می کنیم و داریم:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 3EF$$

۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم باشند، با توجه به

$$\triangle ABC : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{16}{9}$$

$$\triangle ACN : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{طبق قضیه ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{16-x}{x}$$



چون نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد به راحتی نتیجه می‌گیریم که $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PN}$ است، یعنی:

$$\frac{16}{9} = \frac{16-x}{x} \Rightarrow 16x = 144 - 9x \Rightarrow 25x = 144 \Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5/76$$

۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو

مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را k در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{2}{3}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت

تشابه) است، داریم:

$$= \frac{2}{3} \times \text{نسبت اضلاع} \Rightarrow k^2 = \frac{2}{3}k \xrightarrow{\div k} k = \frac{2}{3} \Rightarrow k' = \frac{1}{k} = \frac{3}{2}$$

نسبت مساحت

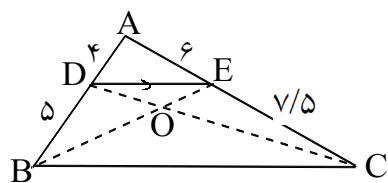
حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k' = \frac{3}{2}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر

است با:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = K'^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2/25$$

۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل چون $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ است، در نتیجه طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه

می‌گیریم که $DE \parallel BC$ بوده و چهارضلعی BCED دوزنقه می‌باشد.



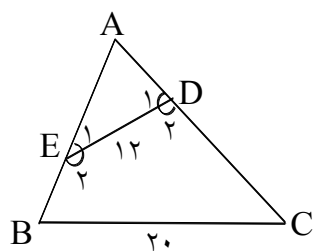
از طرفی می‌دانیم در هر دوزنقه با رسم دو قطر، دو مثلث هم مساحت به‌وجود می‌آید، داریم:

$$\begin{matrix} s_1 & s_2 \\ \diagdown & \diagup \\ s_3 & s_4 \end{matrix} \rightarrow S_1 = S_2$$

بنابراین در دوزنقه‌ی BCED با رسم دو قطر BE و CD دو مثلث OBD و OCE هم مساحت می‌باشند و در

$$\text{نتیجه } \frac{S_{OBD}}{S_{OCE}} = 1 \text{ است.}$$

۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. و $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ است. داریم:



$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1$$

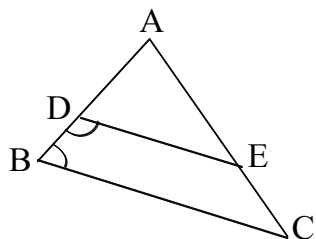
$$\begin{cases} \hat{C} + \hat{E}_2 = 180^\circ \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_1$$

از تساوی زوایای دو مثلث ABC و ADE، نتیجه می‌گیریم، این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها برابر با نسبت دو ضلع نظیر هم می‌باشد. دو ضلع DE و BC متناظر یک‌دیگرند. و در نتیجه نسبت تشابه $k = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ است. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است. پس داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = K^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{25 - 9}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{25} = 0.64$$

تالاس و تشابه - سنجش

۱- از به هم پیوستن اواسط اضلاع چهار ضلعی محاط در دایره کدام چهار ضلعی حاصل می‌شود؟
 (۱) مستطیل (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) چهار ضلعی محاطی (۴) چهار ضلعی محیطی



۲- در شکل مقابل دو زاویه B و D از چهار ضلعی مکمل هم‌اند و

$BC = \frac{3}{4}DE$ و $AB = 12$ ، اندازه BD کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۴/۵
 (۴) ۵

۳- در مثلث ABC میانه‌های CE و BD در نقطه F متقاطع‌اند مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث FED است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۸
 (۳) ۹
 (۴) ۱۲

۴- مثلثی با اضلاع ۴ و ۶ و $2\sqrt{3}$ و مثلث دیگر با طول اضلاع ۹ و $3\sqrt{3}$ و ۶ مفروض‌اند نسبت مساحت آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

۵- نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{3}{4}$ است. نسبت مساحت‌های آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) ۳
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) ۲

۶- در کدام نوع چهار ضلعی از بهم پیوستن اواسط اضلاع آن، مستطیل ایجاد می‌شود؟
 (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) مستطیل (۴) دوزنقه متساوی الساقین

۷- نسبت اضلاع مستطیل $\frac{1}{4}$ است. از یک رأس خط عمود بر قطر، طول مستطیل را در M قطع می‌کند، نقطه M طول مستطیل را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{5}$
 (۲) $\frac{1}{4}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{5}$

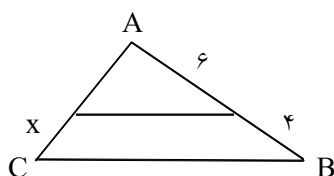
۸- نسبت مساحت دو مثلث متساوی‌الاضلاع مثل ۳ به ۴ است اگر ضلع مثلث کوچکتر $2\sqrt{3}$ باشد ضلع مثلث بزرگتر کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
 (۲) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$
 (۳) ۴
 (۴) ۶

۹- در مثلث ABC نقاط E و F را به ترتیب بر روی اضلاع AB و AC اختیار می کنیم با کدام اندازه ها به ترتیب برابر (AF, EB, FC, AE) دو مثلث ABC و AEF متشابه اند؟
 (۱) (۳, ۱۲, ۹, ۶) (۲) (۸, ۴, ۶, ۱۲) (۳) (۱۲, ۸, ۴, ۶) (۴) (۱۲, ۴, ۸, ۶)

۱۰- در دو مثلث متشابه نسبت طول نیمساز داخلی کوچکترین زاویه آنها، $\frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{25}$ (۳) $\frac{2}{75}$ (۴) ۳

۱۱- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها $\frac{3}{4}$ است بزرگترین ضلع مثلث کوچکتر ۳ واحد باشد بزرگترین ضلع مثلث دوم کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$



۱۲- در شکل مقابل $AC = 7$ و دو مثلث متشابه اند اندازه x کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{1}$ (۲) $\frac{2}{8}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{8}$

۱۳- مساحت مثلثی با اضلاع ۶ و ۳ و $2\sqrt{2}$ چند برابر مساحت مثلث به اضلاع $\frac{4}{\sqrt{6}}$ و $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ می باشد؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۴- مساحت مثلثی با اضلاع ۶ و ۳ و $2\sqrt{2}$ چند برابر مساحت مثلث به اضلاع $\frac{4}{\sqrt{6}}$ و $2\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۳

۱۵- در مثلث قائم الزاویه ای نسبت اضلاع قائم ۲ به ۳ می باشد. اگر ارتفاع وارد بر وتر آن رسم شود، مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث متوسط است؟

(۱) $\frac{6}{5}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{11}{8}$ (۴) $\frac{13}{9}$

۱۶- اندازه دو ضلع قائم از مثلثی ۲ و $\sqrt{3}$ واحد است، ارتفاع گذرنده از رأس قائمه را رسم می کنیم تا مثلث قائم الزاویه را به دو قسمت تقسیم کند نسبت مساحت این دو مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۷- مثلثی به اضلاع ۷، ۵، ۳ با مثلثی به اضلاع $x, y, ۵$ متشابه است. اگر $x > y > ۵$ باشد، $x + y$ کدام است؟

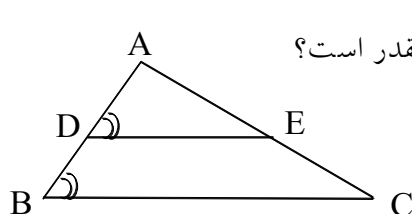
- (۱) $\frac{۶۵}{۳}$ (۲) $\frac{۶۸}{۳}$ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۱۸- مساحت مثلثی با اضلاع ۷، ۵، ۴ برابر نصف مساحت مثلثی متشابه با آن است. کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) $۲\sqrt{۲}$ (۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۹- در مثلث ABC پاره خط $DE \parallel BC$ و E روی ضلع AB است. اگر $AE = ۸$ ، $ED = ۶$ و $BC = ۹$ باشد، طول BE چقدر است؟

- (۱) $\frac{۳}{۶}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{۴}{۵}$ (۴) $\frac{۴}{۸}$



۲۰- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{D}$ و $AD = ۸$ و $ED = ۶$ و $BC = ۹$ ، طول BD چقدر است؟

- (۱) $\frac{۳}{۶}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{۴}{۳}$ (۴) $\frac{۴}{۵}$

۲۱- در کدام حالت دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) تساوی دو ضلع (۲) تساوی دو زاویه (۳) متناسب بودن دو ضلع (۴) متناسب بودن سه زاویه

۲۲- در چهارضلعی محدب ABCD، ضلع $AB = CD$ می‌باشد. وسط‌های دو ضلع AD و BC و دو قطر AC و BD چهار راس کدام چهارضلعی است؟

- (۱) لوزی (۲) متوازی‌الاضلاع (۳) دوزنقه (۴) چهارضلعی محاطی

۲۳- در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. اگر کوچکترین ارتفاع از مثلث بزرگتر $\sqrt{۳}$ باشد، آنگاه کوچکترین ارتفاع از مثلث دیگر چقدر است؟

- (۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۱}{۶}$ (۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۴- نقاط M و N بر روی اضلاع AB و AC از مثلث چنان‌اند که $\frac{NA}{NC} = \frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت کوچکتر در شکل است؟

- (۱) $\frac{۲}{۲۵}$ (۲) $\frac{۲}{۵}$ (۳) $\frac{۴}{۵}$ (۴) $\frac{۶}{۲۵}$

۲۵- وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۵ و کوچکترین ضلع آن ۲ است واحد تصویر ضلع متوسط بر روی وتر کدام است؟

- (۱) $\frac{۳}{۶}$ (۲) $\frac{۳}{۸}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{۴}{۲}$

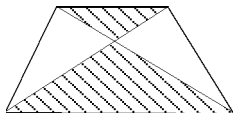
۲۶- طول اضلاع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۸ واحد است، تصویر ضلع کوچکتر بر روی وتر کدام است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۶}$ (۳) $\frac{۴}{۵}$ (۴) $\frac{۴}{۸}$

۲۷- در یک ذوزنقه مساحت مثلث محدود به دو قطرو قاعده بزرگتر $\frac{1}{4}$ برابر مساحت محدود به دو قطر و قاعده کوچکتر است. نسبت دو قاعده‌ی آن کدام است؟

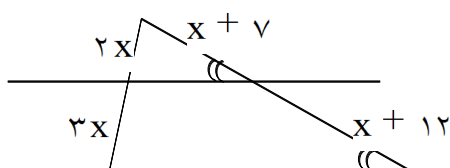
- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۲۸- در شکل مقابل نسبت مساحت‌های دو مثلث سایه زده $\frac{4}{9}$ است. اگر قاعده‌ی کوچکتر ۱۴ واحد باشد قاعده‌ی بزرگتر ذوزنقه کدام است؟



- (۱) ۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

۲۹- در شکل مقابل مقدار x کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{4}{5}$

۳۰- مثلث ABC را به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می‌کنیم. مجموع محیط ۴ مثلث حاصل چند برابر محیط مثلث اصلی است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۳۱- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس خارج‌اند، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک خارجی و خط‌المركزین آن‌ها از مرکز دایره‌ی بزرگتر چند واحد است؟

- (۱) $11\frac{1}{3}$ (۲) $11\frac{2}{3}$ (۳) $12\frac{1}{3}$ (۴) $12\frac{2}{3}$

۳۲- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها $\frac{4}{9}$ است. نسبت طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه از این دو مثلث، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۳- هر مثلث دلخواه را به کدام تعداد مثلث‌های همنهشت می‌توان تقسیم کرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۴- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ مماس خارج‌اند خطی که مرکز آن‌ها را به هم وصل کند مماس مشترک دو دایره را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از مرکز دایره کوچکتر کدام است؟

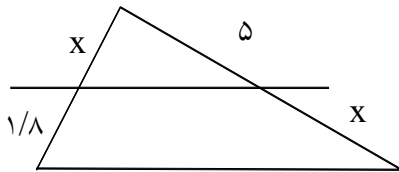
- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۵- در مثلث ABC پاره خط DE موازی BC است. $AD = EC$, $AE = 5$, $DB = \frac{1}{8}$ اندازه ی AC کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۶- در شکل مقابل دو خط موازی اند، X کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۴

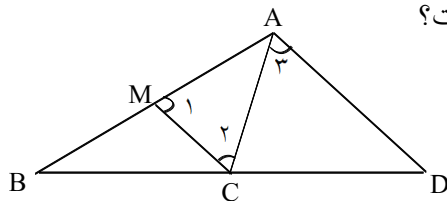


۳۷- در مثلث ABC نقاط E و F بر روی اضلاع مثلث چنانند که $EF \parallel BC$, $EF = 6$, $BC = 8$ و $EB = 3$ اندازه AB چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۳۸- در شکل مقابل $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$ و $AB = 12$ و $AC = 8$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$



۳۹- خط Δ موازی ضلع BC دو ضلع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می کند، اگر $BC = 8$ و $AE = 3EB$ باشد. اندازه EF کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) ۶ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) ۹

۴۰- دو مثلث قائم الزاویه با مساوی بودن کدام اجزای متناظر آنها ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) وترها (۲) زاویه حاده (۳) نسبت دو ضلع قائم (۴) نسبت دو زاویه حاده

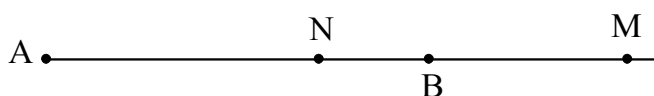
۴۱- دو قطر متوازی الاضلاع بر هم عمودند. با رسم این دو قطر در متوازی الاضلاع حداکثر چند مثلث متشابه دیده می شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۲- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت ها $\frac{4}{9}$ است و نسبت کوچکترین زاویه به بزرگترین زاویه ی آن $\frac{2}{5}$ است. نسبت نیمسازهای داخلی دو زاویه متناظر چقدر است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{4}{25}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۳- در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = 2$ ، $MA = 20$ فاصله AB چقدر است؟



(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

۴۴- مثلثی به اضلاع $\sqrt{3}$ ، ۳، a با مثلث دیگر به اضلاع $\sqrt{3}$ ، ۲، ۱ متشابه است، a کدام است؟

(۴) ۴

(۳) $3\sqrt{3}$

(۲) $\sqrt{6}$

(۱) $2\sqrt{3}$

۴۵- مساحت مثلثی با اضلاع ۲ و $\sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ چند برابر مثلث به اضلاع ۲ و $2 - \sqrt{3}$ و $3 - \sqrt{3}$ است؟

(۴) $2 - \sqrt{3}$

(۳) $2 + \sqrt{3}$

(۲) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

۴۶- یک مثلث به ۴ مثلث همنهشت تقسیم شده است محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) $\frac{3}{2}$

۴۷- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BD در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. اگر $OH = 3$ ، $OA = \frac{1}{3}$ و $OD = 5$ ، اندازه‌ی

ارتفاع BD کدام است؟

(۴) $11/2$

(۳) $10/4$

(۲) $9/6$

(۱) $8/9$

۴۸- در دو مثلث متساوی‌الاضلاع مساحت یکی $\frac{3}{4}$ مساحت دیگری است. اگر ضلع مثلث کوچک‌تر $2\sqrt{3}$ باشد، ضلع

مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۴

(۲) $3\sqrt{3}$

(۱) $3\sqrt{2}$

۴۹- در مثلث ABC دو نقطه E و F به ترتیب بر روی اضلاع AB و AC اختیار می‌کنیم به طوری که دو مثلث

ABC و AEF متشابه باشند کدام اندازه به ترتیب برای (AE) و (FC) و (EB) و (AF) مورد قبول است؟

(۱) (۶ و ۸ و ۴ و ۱۲) (۲) (۶ و ۴ و ۸ و ۱۲) (۳) (۱۲ و ۶ و ۴ و ۸) (۴) (۶ و ۹ و ۱۲ و ۳)

۵۰- دو زاویه از مثلثی 65° و 70° و دو زاویه از مثلثی دیگر 45° و 65° درجه است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۴ برابر

مساحت مثلث دیگر باشد، نسبت اضلاع بزرگ‌تر از این دو مثلث کدام است؟

(۴) $\frac{13}{14}$

(۳) $\frac{9}{13}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۵۱- در دو مثلث متشابه اندازه‌ی بزرگ‌ترین ضلع از هر کدام $۲\sqrt{۳}$ و ۹ واحد است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث دیگر است؟

- (۱) $۵/۲۵$ (۲) $۵/۷۵$ (۳) $۶/۲۵$ (۴) $۶/۷۵$

۵۲- در دو مثلث متشابه مساحت یکی $۲/۲۵$ برابر مساحت دیگری است دو ضلع a و b از مثلث اول ۲ و ۳ واحد از دو ضلع متناظر مثلث دیگر بیشتر باشد، $a + b$ چه قدر است؟

- (۱) $۷/۵$ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) $۱۲/۵$

۵۳- مثلثی به اضلاع a و ۶ و ۴ با مثلث دیگر به اضلاع b و ۴ و ۳ متشابه است. چند جواب برای a و b می‌توان یافت؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۴- مثلثی به اضلاع $۲\sqrt{۳}$ ، ۶ و ۳ و مثلث دیگر به اضلاع $۲\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۳}$ و ۲ مفروض‌اند مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت دیگر است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $\sqrt{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) ۳

۵۵- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۱۴ واحد باشد اندازه ضلع متناظر آن در مثلث بزرگ کدام است؟

- (۱) $۱۲\sqrt{۳}$ (۲) $۱۲\sqrt{۶}$ (۳) $۱۶\sqrt{۲}$ (۴) $۱۸\sqrt{۲}$

۵۶- لوزی به اقطار ۴ و ۶ واحد با لوزی دیگری به ضلع ۱۳ واحد متشابه است. مساحت لوزی بزرگ‌تر چند برابر لوزی دیگر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۳

۵۷- در کدام حالت دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

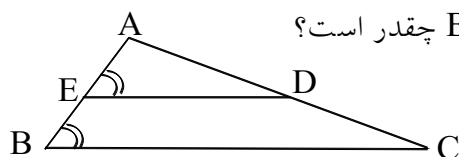
- (۱) موازی بودن اضلاع
(۲) عمود بودن اضلاع
(۳) متناسب بودن زاویه
(۴) متناسب بودن محیط و مساحت

۵۸- در کدام حالت دو مثلث مشابه نیستند؟

- (۱) متناسب بودن سه زاویه
(۲) تساوی دو ضلع
(۳) تساوی دو زاویه
(۴) متناسب بودن سه ضلع

۵۹- در یک چهارضلعی محدب دو ضلع مقابل برابرند. وسط دو قطر و وسط دو ضلع دیگر آن، همواره رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

- (۱) چهارضلعی محاطی (۲) ذوزنقه (۳) متوازی‌الاضلاع (۴) لوزی



۶۰- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ اگر $AE = ۸$ و $ED = ۶$ و $BC = ۹$ باشد، BE چقدر است؟

- (۱) $۳/۶$ (۲) ۴ (۳) $۴/۵$ (۴) $۴/۸$

۶۱- در دو مثلث متشابه نسبت محیطها $\frac{\sqrt{3}}{۲}$ است. اگر کوچکترین ارتفاع از مثلث بزرگتر $\sqrt{3}$ باشد، آنگاه کوچکترین ارتفاع از مثلث دیگر چقدر است؟

- (۱) $۱/۴$ (۲) $۱/۵$ (۳) $۱/۶$ (۴) $۱/۸$

۶۲- مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۴، ۵ برابر نصف مساحت مثلث متشابه با آن است. کوچکترین ضلع مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $۲\sqrt{۲}$ (۳) $۴\sqrt{۲}$ (۴) ۸

۶۳- نقاط M و N بر روی اضلاع مثلث ABC چنان قرار دارند که $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} = \frac{۲}{۳}$ ، نسبت مساحت مثلث AMN به مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۹}$ (۲) $\frac{۴}{۲۵}$ (۳) $\frac{۲}{۵}$ (۴) $\frac{۳}{۵}$

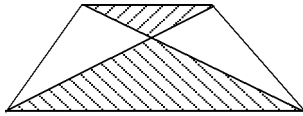
۶۴- در مثلث ABC داریم $AB < AC$ نیمساز داخلی AD رسم می شود. از نقطه D خطی موازی AB رسم می کنیم، تا AC را در E قطع کند. کدام تناسب نادرست است؟

- (۱) $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{CD}$ (۲) $\frac{CE}{ED} = \frac{CD}{BD}$ (۳) $\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{BD}$ (۴) $\frac{CE}{AC} = \frac{AE}{AB}$

۶۵- در یک دوزنقه، مساحت مثلث محدود به دو قطر و قاعده بزرگتر $۲\frac{۱}{۴}$ برابر مساحت محدود به دو قطر و قاعده کوچکتر است. نسبت دو قاعده کدام است؟

- (۱) $\frac{۲}{۵}$ (۲) $\frac{۳}{۵}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۶- در شکل مقابل نسبت مساحت‌های دو مثلث سایه‌زده $\frac{4}{9}$ است. اگر قاعده کوچک‌تر ۱۴ باشد، قاعده‌ی بزرگ‌تر دوزنقه



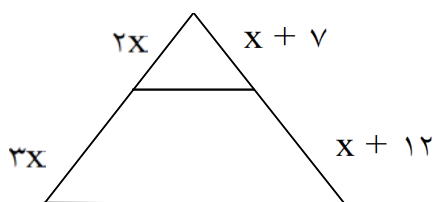
کدام است؟

۲۴ (۱)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۱۶ (۴)



۶۷- در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) $\frac{4}{5}$

۶۸- در دو مثلث متشابه نسبت مساحت $\frac{3}{4}$ است نسبت طول نیمساز داخلی بزرگترین زاویه از این دو مثلث است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۶۹- در مستطیل $ABCD$ از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم. امتداد آن ضلع DC را در نقطه F قطع می‌کند. اگر $AB = 3AD$ باشد، آن گاه DC چند برابر DF است؟

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۷۰- مثلثی به اضلاع $5, y, x$ متشابه مثلث به اضلاع 3 و 5 و 7 می‌باشد. اگر x بزرگترین ضلع مثلث باشد، x کدام است؟

(۴) $10\frac{1}{3}$

(۳) $10\frac{2}{3}$

(۲) $11\frac{1}{3}$

(۱) $11\frac{2}{3}$

۷۱- دایره‌ای به شعاع R را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. ابتدا نقاط تقسیم شده را به هم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی منتظمی حاصل شود. سپس از نقاط تقسیم شده مماس‌هایی بر دایره رسم می‌کنیم تا شش ضلعی دیگر به دست آید. نسبت مساحت این دو شش ضلعی کدام است؟

(۴) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۷۲- در کدام حالت، دو مثلث ممکن است متشابه نباشند؟

(۲) تساوی یک زاویه و تناسب اضلاع آن

(۱) تساوی یک ضلع و تناسب دو زاویه

(۳) تناسب سه ضلع

(۴) تناسب سه زاویه

۷۳- در مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر، عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. نسبت مساحت دو مثلث کدام است؟

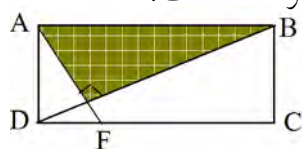
(۴) $\frac{2}{5}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{6}$

۷۴- در مستطیل مقابل عرض آن $\frac{1}{3}$ طول آن است. اگر AF عمود بر BD باشد، DC چند برابر DF است؟



(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۹

(۳) ۸

۷۵- در دایره‌ای یک شش ضلعی منتظم محیط و یک شش ضلعی منتظم محاط شده است. نسبت مساحت این دو شش ضلعی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۷۶- مثلثی به اضلاع ۳، ۵، ۷ با مثلثی به اضلاع ۵، x ، y متشابه است. اگر $x > y > 5$ باشد، $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۷۷- کوچک‌ترین ضلع مثلثی ۱۰ واحد است. نیم‌ساز زاویه‌ی کوچک‌تر، ضلع مقابل را به دو جزء تقسیم می‌کند. کوچک‌ترین جزء، چند واحد است، در صورتی که مثلث مفروض با مثلث به اضلاع ۲، ۴، ۵ متشابه است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{9}$

۷۸- کدام دو شکل ممکن است متشابه نباشند؟

- (۱) دو مستطیل
(۲) دو لوزی با یک زاویه برابر هم
(۳) دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
(۴) دو شش ضلعی منتظم

۷۹- در مثلث ABC نقطه D بر روی AB و نقطه E بر روی AC چنان قرار دارند که $DE \parallel BC$ و $AD = 8$ و $DE = 6$ و $BC = 9$ واحد است. اندازه BD کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{6}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{2}$ (۴) $\frac{4}{5}$

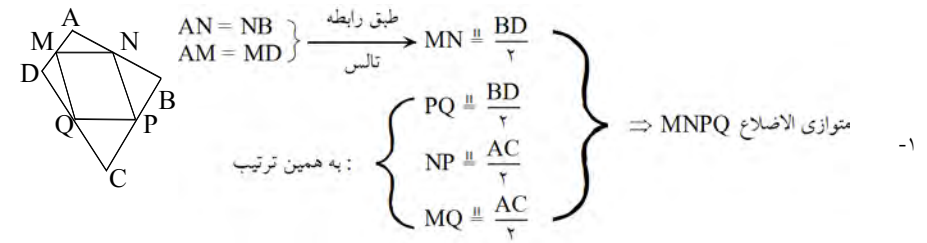
۸۰- یک مثلث را به ۴ مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنیم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۱- یک مثلث را به ۴ مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنیم. محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت است؟

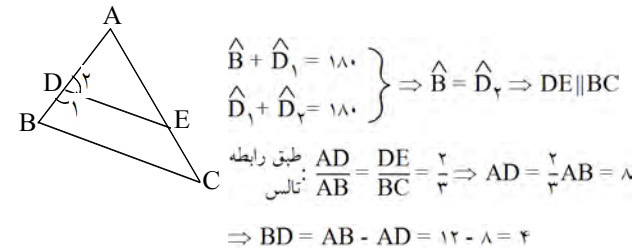
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

جواب تالس و تشابه - سنجش

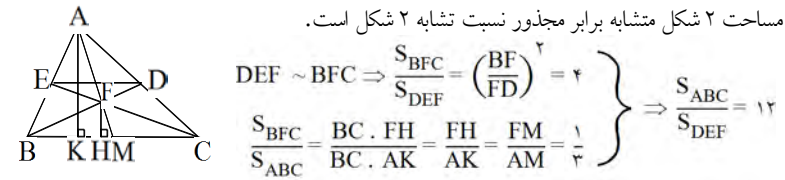


بنابراین ۴ ضلعی ABCD دارای هر ویژگی که باشد، MNPQ همواره متوازی الاضلاع خواهد بود و به خواص ۴ ضلعی ABCD بستگی ندارد بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳- می دانیم نسبت مساحت ۲ شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه ۲ شکل است.



بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

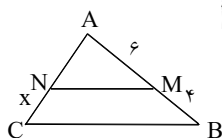
۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اضلاع دو مثلث با هم متناسبند بنابراین ۲ مثلث با هم متشابهند. نسبت مساحت ۲ شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آنهاست. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{نسبت تشابه } K = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نسبت مساحت های ۲ شکل متشابه، مجذور نسبت تشابه آنها و نسبت محیط ۲ شکل متشابه

$$\frac{a}{a'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{9}{4}$$

برابر نسبت تشابه ۲ شکل است. پس:



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\widehat{AMN} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{7-x}{10} \Rightarrow x = 2/8$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. راهنمایی: اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند آنگاه متشابهند.

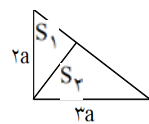
راه حل: از تناسب $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$ نتیجه می گیریم دو مثلث با نسبت $\sqrt{3}$ متشابهند پس نسبت مساحتها

برابر $\sqrt{3}^2$ یعنی ۳ می باشد.

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند آنگاه متشابهند.

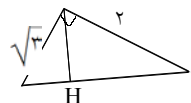
راه حل: با توجه به تناسب اضلاع $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$ نتیجه می گیریم دو مثلث با نسبت $\sqrt{3}$ متشابهند پس

نسبت مساحتها برابر $\sqrt{3}^2$ یعنی ۳ می باشد.



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{11}{9}$

۲ مثلث قائمه تشکیل شده با هم متشابهند.



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ دو مثلث قائم الزاویه حاصل متشابه اند

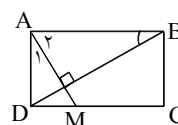
۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $\frac{x}{y} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{y+5} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y = 20$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$\frac{S}{S'} = k^2$ $k = \text{نسبت تشابه} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهار ضلعی محدب از بهم پیوستن اواسط اضلاع، متوازی الاضلاعی ایجاد می شود که اضلاع آن با قطره های چهارضلعی موازیند. پس برای اینکه متوازی الاضلاع به مستطیل تبدیل شود باید اضلاع بر هم عمود باشند. لذا باید قطره های ۴ ضلعی محدب بر هم عمود باشند که از بین گزینه ها فقط در لوزی اقطار بر هم عمودند.

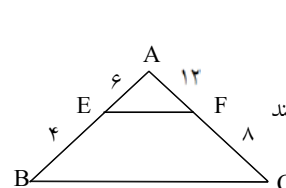
متوازی الاضلاع: $MNPQ \Rightarrow \left. \begin{matrix} AM = MD \\ AN = NB \end{matrix} \right\} \text{طبق تالس} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow PQ \parallel BD, NP \parallel MQ \parallel AC$ به همین ترتیب



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\left. \begin{matrix} A_1 + A_2 = 90 \\ A_2 + B_1 = 90 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \widehat{ADM} \sim \widehat{ABD} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = 2 \Rightarrow DM = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{DM}{MC} = \frac{1}{3}$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه می باشند.

$\frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \Rightarrow k^2 = \frac{r}{r'} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{r}}{r'} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{r}}{r'} \Rightarrow a = r$



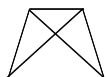
۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تناسب $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ و گزینه ۴ که $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$ نتیجه می گیریم $EF \parallel BC$ پس دو مثلث \widehat{AEF} و \widehat{ABC} متشابه هستند

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازها با نسبت تشابه برابر است و نسبت مساحتها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

$\frac{S}{S'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{4}{9} \Rightarrow S' = \frac{9}{4} S \Rightarrow S' = 2/25 S$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$\frac{r}{a} = \frac{\sqrt{r}}{r'} \Rightarrow a' = \frac{r}{\sqrt{r}} \Rightarrow a' = 2\sqrt{r}$



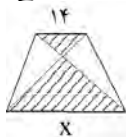
۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث متشابه‌اند یا نسبت تشابه دو قاعده $\frac{2}{3}$ است.

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

و یا با $\frac{2}{3}$

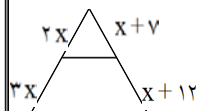
۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث هاشور زده متشابه‌اند نسبت تشابه برابر نسبت ۲ قاعده است.

$$K = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$



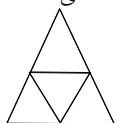
$$\frac{x}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 21$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



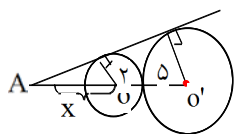
$$\frac{x+y}{x+12} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x + 21 = 2x + 24 \quad x = 3$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از به هم وصل کردن وسط اضلاع را بهم وصل کنیم ۴ مثلث هم نهشت حاصل می‌شود محیط هر مثلث نصف محیط مثلث اصلی است. بنابراین مجموع محیط ۴ مثلث ۲ برابر محیط مثلث اصلی است.



$$4 \times \frac{1}{2} = 2$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



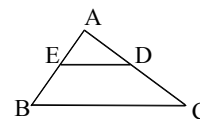
$$\frac{x}{x+y} = \frac{R}{R'} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2x + 14$$

$$x = \frac{14}{3} \Rightarrow AO' = \frac{14}{3} + y = 11\frac{2}{3}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دو مثلث متشابه نسبت اجزای متناظر برابر نسبت تشابه و جذر نسبت مساحت ۲

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

مثلث است. $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ نسبت طول نیمسازها \Rightarrow نسبت اضلاع $\frac{2}{\sqrt{3}}$

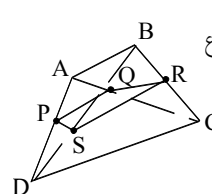


۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه تالس: $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BE = 4$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{6}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BD = 4$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در کتاب درسی آمده است: تساوی دو ضلع



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $PQ \parallel RS \parallel \frac{AB}{2}$, $PS \parallel RQ \parallel \frac{CD}{2}$ اضلاع

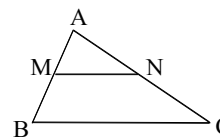
چهارضلعی RQPS مساوی و دو به دو موازی‌اند پس لوزی است.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 1/5$$

نسبت اضلاع = نسبت محیط‌ها

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

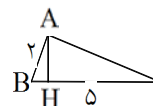
۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. MN با BC موازی بوده و ۲ مثلث AMN و ABC متشابه‌اند.



$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \left[\frac{AB}{AM} \right]^2 = 2/5^2 = 4/25$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{MA} = \frac{5}{2} = 2/5$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $AC^2 = 25 - 4 = 21$ دو مثلث قائم الزاویه ACH و ACB متشابه‌اند.



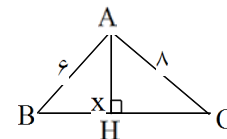
$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH$$

$$21 = 5 \times CH \Rightarrow CH = 4/2$$

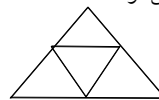
$$BC = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$\widehat{ABH} \cong \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3/6$$

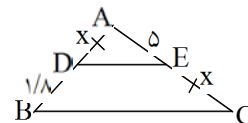
۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



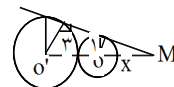
۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از به هم وصل کردن وسط اضلاع مثلث ۴ مثلث هم نهشت حاصل می شود.



$$\frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$$



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

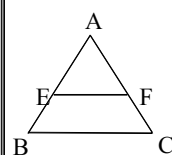


۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{1/8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 3, AC = 8$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر قضیه تالس از روی شکل داریم

$$\frac{x}{1/8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$



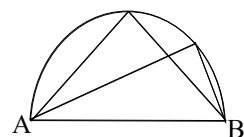
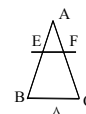
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{x-3}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow 4x - 12 = 3x \Rightarrow x = 12$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$CM \parallel AD, AM = AC = 8$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AM} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل مقابل وتر هر دو مثلث قائم الزاویه AB است، ولی متشابه نیستند.

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴ مثلث مساوی متشابه اند. لوزی \Rightarrow دو قطر متوازی الاضلاع عمود برهم

$$\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{d_1}{d_2} = \text{نسبت اضلاع} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow MB = 10$$

$$AB = 20 - 10 = 10$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$r = \sqrt{3} \quad a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow a = r\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \quad 1 \quad 2$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. این دو مثلث متشابهند زیرا اضلاع این دو مثلث متناسبند:

$$\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

بنابراین نسبت مساحت های این دو مثلث برابر توان دوم نسبت تشابه اضلاع آنها است:

$$\text{نسبت مساحت ها} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

۵۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. باید اضلاع این دو مثلث متناسب باشند.

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس برای a و b چهار جواب بدست می آید.

۵۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. این دو مثلث با هم متشابه هستند زیرا اضلاع آنها متناسبند.

$$\frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{3}}$$

پس نسبت مساحت‌های آنها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = r$$

۵۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S}{S_1} = \frac{49}{128} \Rightarrow K^2 = \frac{49}{128} \Rightarrow K = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{a'} = K \Rightarrow \frac{14}{a'} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a' = 16\sqrt{2}$$

$$a^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$$

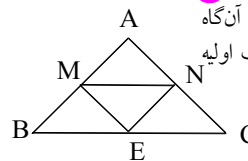
$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{13}{\sqrt{13}}\right)^2 = 13$$

۵۶- گزینهی ۴ صحیح است.

۵۷- گزینهی ۴ صحیح است. متناسب بودن محیط و مساحت در فضایی تشابه آمده است.

۵۸- گزینهی ۲ صحیح است. فقط در حالت تساوی دو ضلع، شرایط تشابه را ندارند.

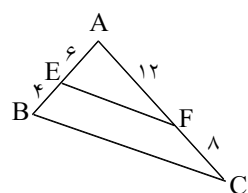
۴۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. اگر وسطهای سه ضلع مثلث را به هم وصل کنیم آن‌گاه مثلث به ۴ مثلث همنهشت تقسیم می‌شود. به‌طوری که هریک از مثلث‌ها با مثلث اولیه با نسبت $\frac{1}{3}$ متشابه هستند پس نسبت محیطها برابر $\frac{1}{3}$ است.



۴۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. تست غلط است. زیرا در مثلث قائم‌الزاویه \widehat{AOD} ضلع قائمه OD برابر ۵ می‌باشد از طرفی وتر $OA = \frac{1}{3}$ می‌باشد و این تناقض می‌باشد.

۴۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه هستند.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow \frac{r}{\frac{1}{2}} = K^2 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{a'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a' = 4$$



۴۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث \widehat{ABC} و \widehat{AEF} متشابه هستند بنابراین باید تناسب $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ یا $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ برقرار باشد. با توجه به مقادیر داده شده تنها گزینهی ۱ می‌تواند درست باشد.

۵۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. این دو مثلث متشابهند زیرا دارای دو زاویه برابر هستند.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow K^2 = 4 \Rightarrow K = 2$$

۵۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$K = \frac{a}{a'} = \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

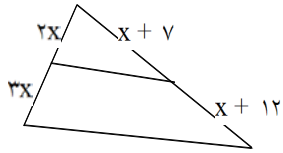
$$\frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{81}{4 \times 3} = \frac{27}{4} = 6.75$$

۵۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S}{S'} = K^2 \Rightarrow K^2 = \frac{2}{25} \Rightarrow K^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{a-2} = \frac{b}{b-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2a}{2a-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 3a - 6 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow \frac{b}{b-3} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2b = 3b - 9 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a + b = 15$$

۶۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{2x}{3x} = \frac{x+7}{x+12} \Rightarrow 2x + 24 = 3x + 21 \Rightarrow x = 3$$

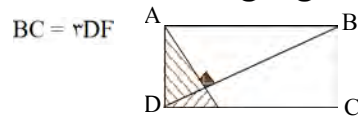
۶۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نسبت مساحت ها برابر $\frac{3}{4}$ پس نسبت اضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا نسبت نیمساز $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۶۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث BCD و ADF متشابه است.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{CD}{BC}$$

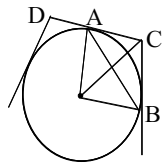
$$CD = 2BC = 4DF \Rightarrow \frac{DC}{DF} = 4$$



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{3} = 11\frac{2}{3}$$

۷۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$AB = R \text{ و } AC = \frac{1}{\sqrt{3}}R \Rightarrow DC = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

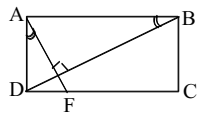
$$\frac{AB}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{نسبت مساحت} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

۷۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{مثلث حاصل با مثلث مفروض متشابه است.} \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

۷۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{ABD} \approx \widehat{ADF} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 3DF \Rightarrow DC = 4DF$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{نسبت مساحت} \Rightarrow \frac{3}{4}$$

۷۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵۹- گزینه ۴ صحیح است.

$$AB \parallel, = \frac{MN}{2}, CD \parallel, = \frac{MN}{2} \Rightarrow AB \parallel, = CD$$

$$BC \parallel, = \frac{PQ}{2}, AD \parallel, = \frac{PQ}{2} \Rightarrow BC \parallel, = AD \quad \text{نوزی است}$$

۶۰- گزینه ۲ صحیح است.

$$DE \parallel BC \quad \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} \quad \frac{6}{9} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB = 12 \quad BE = 4$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 1/5 \quad \text{نسبت ارتفاع ها = نسبت اضلاع}$$

۶۱- گزینه ۲ صحیح است.

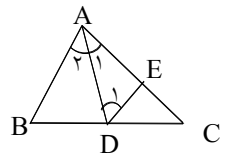
$$\frac{S}{S'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a = 4\sqrt{2}$$

۶۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب به مخرج}} \frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow MN \parallel BC$$

بنابراین دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle AMN$ متشابهند و $K = \frac{2}{5}$ در نتیجه نسبت مساحت‌های این دو مثلث $\frac{4}{25}$ است.

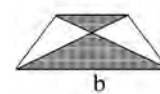
۶۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



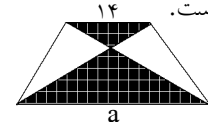
$$DE = AE \quad \text{و} \quad \frac{AB}{ED} = \frac{CA}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{CA}{CE} = \frac{AC}{CD}$$

۶۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{S''}{S} \Rightarrow S = 2\frac{1}{4}S' = \frac{9}{4}S' \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$



۶۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

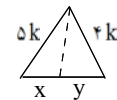


$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{14}{a}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{14}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 21$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow x+y=20$$

۷۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

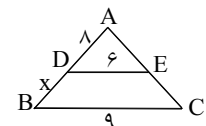
۷۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{4} = 10$$

۷۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دو مستطیل ممکن است متشابه نباشند، نسبت اضلاع برقرار نباشد.

۷۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{8}{8+x} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 24 = 16 + 2x \Rightarrow x = 4$$

۸۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



۲ برابر \Rightarrow محیط نصف می شود \Rightarrow هر ضلع نصف شده

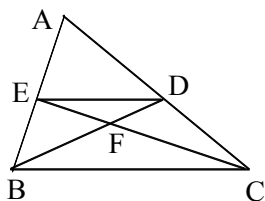
۲ \Rightarrow محیط نصف شده \Rightarrow تمام اضلاع نصف شده اند

۸۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

تالسی و تشابه - سراسری

۱- اندازه محیطهای دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ است، اگر مساحت مثلث بزرگتر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر کدام است؟

- (۱) $7\frac{1}{9}$ (۲) $6\frac{1}{9}$ (۳) $7\frac{2}{9}$ (۴) $6\frac{2}{9}$



۲- در مثلث ABC شکل زیر به فرض آنکه پاره خطهای BD و CE میانههای اضلاع مثلث باشند نسبت مساحت مثلث EFD به مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳- در کدام حالت دو مثلث قائم الزاویه متشابه اند؟

- (۱) وترها و ارتفاعهای نظیر دو وتر متناسب باشند.
(۲) وترها و شعاع دایره محیطی متناسب باشند.
(۳) وترها و مربعهای یک ضلع دیگر متناسب باشند.
(۴) وترها و میانههای نظیر دو وتر متناسب باشند.

۴- طول ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم الزاویه ۲۴ و نسبت دو پاره خطی که ارتفاع روی وتر پدید می آورد $\frac{9}{16}$ است طول وتر کدام است؟

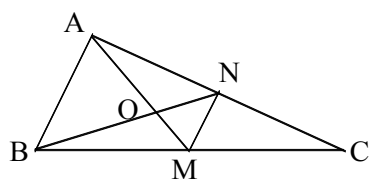
- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

۵- نقاط P, N, M وسطهای سه ضلع مثلث ABC را به هم وصل می کنیم. اگر پیرامون مثلث MNP برابر ۶ باشد، آنگاه پیرامون مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۶- در مثلث قائم الزاویه ای اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر جدا می کند به ترتیب $\frac{6}{4}$ و $\frac{3}{6}$ است. در این صورت، مجموع دو ضلع مجاور به زاویه قائمه کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶



۷- در شکل زیر AM و BN دو میانه مثلث می باشند. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث OMN است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸- اوساط یک چهارضلعی محیطی را به هم وصل کردیم حاصل الزاماً کدام چهارضلعی است؟

- (۱) لوزی (۲) مستطیل (۳) یک چهارضلعی محیطی (۴) متوازی الاضلاع

۹- نسبت مساحت شش ضلعی منتظم محیطی به مساحت شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره به شعاع R چقدر است؟

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{6}{5}$

(۱) $\frac{5}{3}$

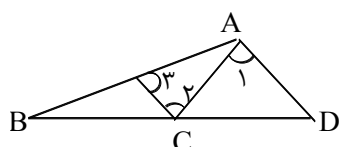
۱۰- در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟

(۴) $4 - 2\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3} - 1$

(۲) $2\sqrt{3} - 3$

(۱) $2\sqrt{2} - 2$



۱۱- در شکل زیر زوایای $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$ ، اگر $AB = 15$ ، $AC = 6$ باشد، $\frac{BD}{CD}$

چقدر است؟

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{5}{3}$

(۴) ۳

(۳) ۲

۱۲- کدام دو چهارضلعی متشابه‌اند؟

(۱) دو مستطیل

(۲) دو متوازی‌الاضلاع که زاویه مساوی دارند

(۳) دو لوزی که یک زاویه مساوی داشته باشند

(۴) دو ذوزنقه متساوی‌الساقین که زوایای مساوی داشته باشند

۱۳- در مربعی به ضلع ۴ واحد فاصله وسط یک ضلع از قطر مربع کدامست؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{3}$

۱۴- مثلث به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلث به اضلاع ۵ و X و Y متشابه است اگر $x > 5$ و $y > 5$ باشند. $x + y$ کدامست؟

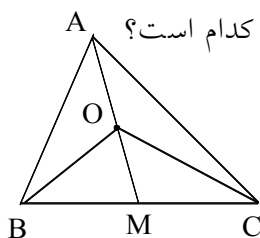
(۴) ۲۱

(۳) $\frac{61}{3}$

(۲) ۲۰

(۱) $\frac{58}{3}$

۱۵- در شکل مقابل، مساحت مثلثهای ABC، OBC را به ترتیب S و S' می‌نامیم. نسبت $\frac{OM}{AM}$ کدام است؟



(۲) $\left(\frac{S'}{S}\right)^2$

(۱) $\sqrt{\frac{S'}{S}}$

(۴) $\frac{S'}{S}$

(۳) $\frac{S - S'}{S}$

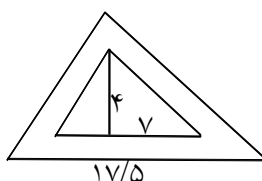
۱۶- در شکل مقابل مساحت مثلث بزرگتر کدام است؟

(۲) $\frac{87}{5}$

(۱) $\frac{88}{5}$

(۴) $\frac{77}{5}$

(۳) $\frac{78}{5}$



۱۷- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم برابر $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه ضلع یکی از آنها ۶ باشد، اندازه ضلع دیگر برابر است با:

(۴) ۵ یا ۱۳

(۳) ۹ یا ۸

(۲) ۴ یا ۹

(۱) ۴ یا ۸

۱۸- در مثلث ABC، E روی AB و بین A و B و F روی AC و بین A و C است. در کدام حالت دو مثلث AEF و ABC متشابهند؟

(۱) $AF = 2$ ، $EB = 5$ ، $FC = 4$ ، $AE = 3$

(۲) $AF = 4$ ، $EB = 10$ ، $FC = 6$ ، $AE = 6$

(۳) $AF = 7$ ، $EB = 3$ ، $FC = 2$ ، $AE = 10$

(۴) $AF = 12$ ، $EB = 4$ ، $FC = 8$ ، $AE = 6$

۱۹- اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه k^2 باشد، آنگاه نسبت محیط‌های آنها کدام است؟

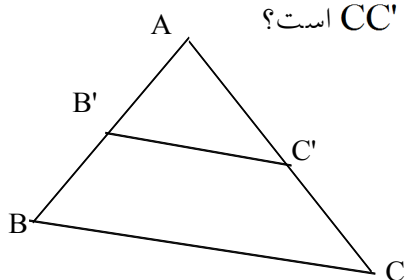
(۴) $3k$

(۳) $k + 3$

(۲) k

(۱) $\frac{k}{3}$

۲۰- در شکل زیر $BC \parallel B'C'$ و $AB = 10\text{cm}$ و $AB' = 3\text{cm}$ ، AC' چند برابر CC' است؟



(۲) $\frac{4}{10}$

(۱) $\frac{3}{10}$

(۴) $\frac{7}{10}$

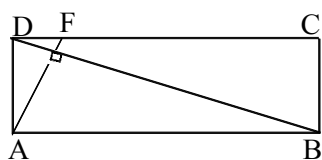
(۳) $\frac{3}{7}$

۲۱- اواسط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کرده‌ایم، حاصل، یک مستطیل شده است. این چهارضلعی الزاماً کدام است؟

(۴) متوازی‌الاضلاع

(۳) مستطیل

(۲) لوزی



۲۲- در شکل زیر چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای روی ضلع DC است بطوری که $AF \perp DB$. اگر $AB = 3DA$ ، DC چند برابر DF است؟

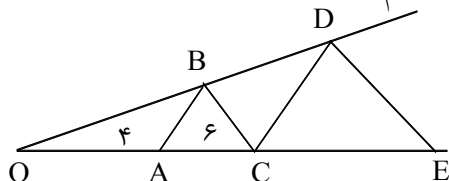
(۲) ۹

(۱) ۸

(۴) ۶

(۳) ۴

۲۳- در شکل زیر $BC \parallel DE$ ، $AB \parallel CD$ ، $OA = 4$ ، $AC = 6$ اندازه CE کدام است؟



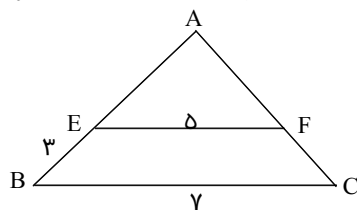
(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

۲۴- در مثلث شکل زیر، $EF \parallel BC$ ، $BC = 7$ ، $EF = 5$ ، $EB = 3$ سانتیمتر است. طول AE چند سانتیمتر است؟



- (۱) $6/5$
(۲) $5/5$
(۳) 6
(۴) $7/5$

۲۵- اندازه دو ضلع مقابل از یک چهارضلعی محدب برابرند. اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع مقابل دیگر آن همواره رأسهای کدام چهار ضلعی است؟

- (۱) دوزنقه متساوی الساقین (۲) چهارضلعی محاطی (۳) لوزی (۴) متوازی الاضلاع

۲۶- در یک مثلث قائم الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

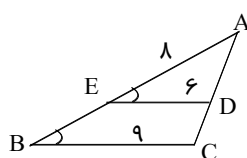
- (۱) 6 (۲) 5 (۳) 4 (۴) 3

۲۷- AH ارتفاع مثلث قائم الزاویه ABC ، $(\hat{A} = 90^\circ)$ و HK ارتفاع مثلث AHB می باشد. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟

- (۱) ABC و AKC (۲) AHB و AHC (۳) AHK و BHK (۴) ABH و AHK

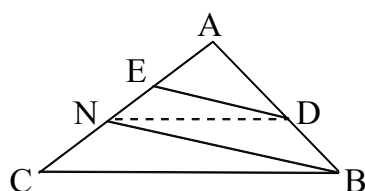
۲۸- کدام دو شکل همواره متشابه نیستند؟

- (۱) هر دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
(۲) هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند
(۳) هر دو شش ضلعی منتظم
(۴) هر دو مستطیل



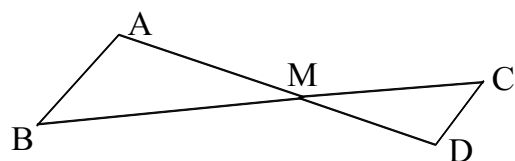
۲۹- در شکل مقابل $\hat{B} = \hat{E}$ ، $AE = 8$ ، $ED = 6$ ، $BC = 9$ ، طول BE کدام است؟

- (۱) 4
(۲) $4/2$
(۳) $4/4$
(۴) $4/6$



۳۰- در شکل مقابل $DN \parallel BC$ و $DE \parallel BN$ و $AE = 4$ و $EN = 6$ ، اندازه AC کدام است؟

- (۱) 18
(۲) 20
(۳) 24
(۴) 25

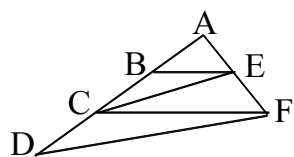


۳۱- در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$ ، نسبت مساحت های دو مثلث از آن شکل کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{2}{5}$
(۳) $\frac{4}{9}$
(۴) $\frac{9}{25}$

۳۲- طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچکترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، $\frac{۲۲}{۵}$ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم کدام است؟

- (۱) ۱۰۲ (۲) $\frac{۱۰۲}{۵}$ (۳) ۱۰۳ (۴) $\frac{۱۰۳}{۵}$

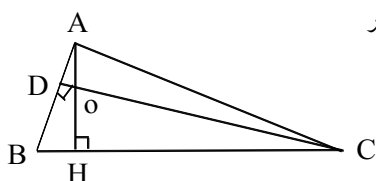


۳۳- در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ ، اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ آنگاه اندازه CD کدام است؟

- (۱) $\frac{۴}{۵}$ (۲) $\frac{۴}{۸}$ (۳) $\frac{۵}{۴}$ (۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۴- یک مثلث را به چهار مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های همنهشت است؟

- (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۳۵- در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند اگر

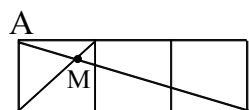
$$OH = AD = ۵DO \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۳} = \frac{۱۲}{HC} \quad \text{طول HC کدام است؟}$$

- (۱) ۱۶۵ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۷۵ (۴) ۱۸۰

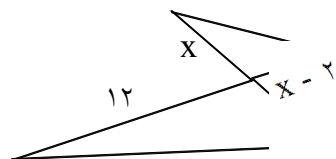
۳۶- نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $۲۱\sqrt{۲}$ (۲) $۲۱\sqrt{۳}$ (۳) $۲۴\sqrt{۲}$ (۴) $۲۴\sqrt{۳}$

۳۷- در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند، فاصله MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



- (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۲}{۹}$ (۴) $\frac{۱}{۵}$

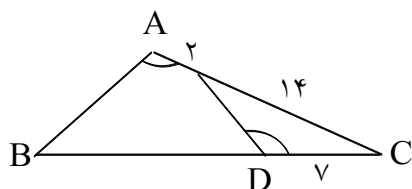


۳۸- در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند، نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{۹}{۴}$ (۲) $\frac{۹}{۱۶}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۹- در مثلث قائم الزاویه ABC داریم $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴



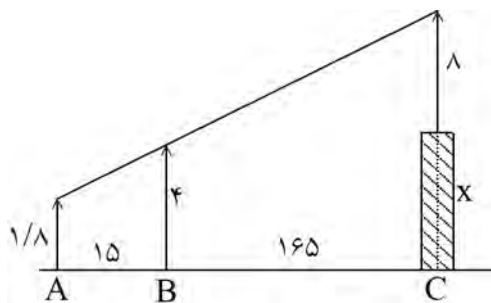
۴۰- در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟

- (۱) ۲۲
(۲) ۲۳
(۳) ۲۴
(۴) ۲۵

۴۱- در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $AB = 18$ ، در مثلث MNP داریم: $\hat{N} = 60^\circ$ و

$\hat{M} = 70^\circ$. اگر مساحت مثلث ABC برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چه قدر است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۲۴
(۴) ۲۷



۴۲- در شکل مقابل دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است.

دید چشمی ناظر به ارتفاع $1/8$ متر ، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری

در یک راستا است، بلندی برج چند متر است؟

- (۱) $19/8$
(۲) $20/2$
(۳) $20/8$
(۴) $21/2$

۴۳- در دوزنقه‌ای به طول قاعده‌ها ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند، فاصله M از قاعده‌ی

بزرگ‌تر، چه قدر است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

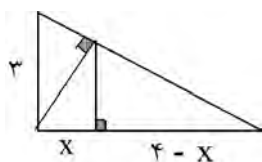
۴۴- مثلث ABC مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث مفروض، می‌توان مثلثی متشابه با

مثلث مفروض ساخت؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۷
(۳) ۲۵
(۴) ۲۴

۴۵- در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 2\hat{B}$ ، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه‌ی B است.)

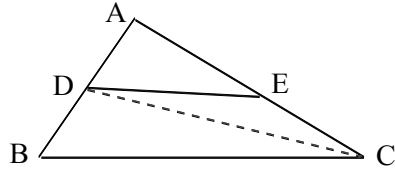
- (۱) $a^2 = bc$
(۲) $b^2 = ac$
(۳) $a^2 - b^2 = bc$
(۴) $a^2 - c^2 = bc$



۴۶- در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

- (۱) $1/44$
(۲) $1/56$
(۳) $1/64$
(۴) $1/96$

۴۷- در شکل مقابل، $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{7}$ و $DE \parallel BC$ ، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟

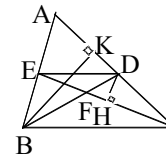


- (۱) ۷۰
- (۲) ۷۵
- (۳) ۷۸
- (۴) ۸۴

جواب تالیس و تشابه - سراسری

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در دو مثلث متشابه نسبت محیط ها برابر نسبت تشابه و نسبت مساحتها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{S}{S'} = \left[\frac{p}{p'} \right]^2 = k^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{8} \right)^2 = \frac{225}{64} \Rightarrow S' = \frac{64 \times 25}{225} = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$



۲- یادآوری: مرکز ثقل مثلث میانهها را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می کند و هرگاه اوساط دو ضلع مثلثی را بهم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی ضلع سوم مثلث است. در مثلثهایی که ارتفاع یکسان دارند مساحتها به نسبت اضلاع متناظر ارتفاعهای یکسان است و نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت اضلاع آنها است. در این مساله اولاً ارتفاع مشترک دو مثلث DFC و FDE برابر DH است بنابراین:

$$S_{FBC} = 4S_{FDE} \quad S_{FBC} = 4S_{FDE} \quad S_{DBC} = S_{BFC} + S_{DFC} = 6S_{FDE} \quad (I)$$

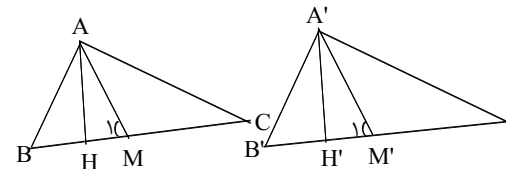
ارتفاع مشترک دو مثلث ABC و DBC است. بنابراین نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده متناظر با

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \frac{AC}{CD} = 2 \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{DBC} \quad (II)$$

ارتفاع یکسان است یعنی:

$$(I), (II) \Rightarrow S_{ABC} = 12S_{FDE} \Rightarrow \frac{S_{FDE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{12}$$

پس گزینه ۱ جواب صحیح است.



۳- یادآوری: در مثلث قائم الزاویه میانه نظیر وتر

برابر نصف وتر و برابر شعاع دایره محیطی است بنابراین در دو مثلث قائمه همواره وترها و میانههای نظیر دو وتر متناسبند و نیازی به تشابه ندارند و متناسب بودن مربع یک ضلع با

نسبت ضلع دیگر دلیل تشابه نیست پس حالت تشابه در گزینه های ۲ و ۳ و ۴ ممکن نیست ولی حالت تشابه در حالت ۱ به سهولت قابل اثبات است.

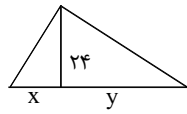
می دانیم در مثلث قائمه میانه نظیر وتر نصف وتر است:

$$BC = 2AM, B'C' = 2A'M' \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \widehat{AHM} \approx \widehat{A'H'M'} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M'_1}$$

$$AM = MC \Rightarrow \text{زاویه خارجی } M_1 = 2C, \widehat{M'_1} = 2C' \Rightarrow \begin{cases} C = C' \\ A = A' = 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} \sim \widehat{A'B'C'} \quad (\text{به حالت دو زاویه})$$

لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

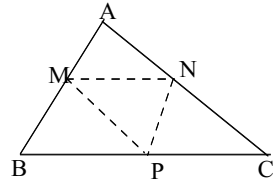


۴- یادآوری: در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی است بین دو پاره خط ایجاد شده توسط ارتفاع روی وتر، بنابراین:

$$\begin{cases} xy = (24)^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{9}{16} \end{cases} \Rightarrow xy \times \frac{x}{y} = (24)^2 \times \frac{9}{16} \Rightarrow x^2 = (24)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = 24 \times \frac{3}{4} = 18, y = \frac{16}{9}x = 32$$

طول وتر برابر $x + y = 18 + 32 = 50$ است لذا گزینه ۳ صحیح است.

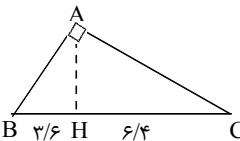


۵- می دانیم اندازه پاره خطی که وسط دو ضلع را در مثلث به هم وصل می کند،

نصف ضلع سوم است. (قضیه تالس) بنابراین محیط مثلث MNP نصف محیط

مثلث ABC خواهد بود چون طول اضلاعش نصف طول اضلاع مثلث ABC

است. بنابراین محیط ABC برابر با ۱۲ است. پس گزینه ۴ صحیح است.



۶- می دانیم در مثلث قائم الزاویه، هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است. پس:

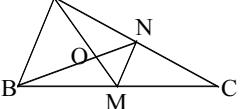
$$\begin{cases} AB^2 = BC \cdot BH = 36 \\ AC^2 = BC \cdot CH = 64 \\ BC = BH + CH = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ AC = 8 \end{cases} \Rightarrow AB + AC = 14$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

$$\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{BN} = \frac{1}{3}$$

۷- می دانیم در هر مثلث نقطه تلاقی میانهها، میانه را به نسبت ۱/۳ تقسیم می کند یعنی:

اگر در دو مثلث، مساحتها S و S' و ارتفاع مشترک h و قاعدهها a و a' باشند.



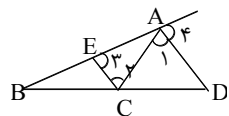
نسبت مساحتهای آنها برابر است با $\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h} = \frac{a}{a'}$ یعنی نسبت مساحتهای

دو مثلث با ارتفاع یکسان برابر نسبت قاعدههای نظیر ارتفاع مشترک می باشد. همچنین هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند. لذا داریم:

$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNB}} = \frac{NO}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{MNO} = \frac{1}{3}S_{MNB} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}S_{NBC} \right) = \frac{1}{9}S_{NBC} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}S_{ABC} \right) = \frac{1}{27}S_{ABC}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



روش اول:
می دانیم در هر مثلث نیمساز خارجی هر زاویه ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند. پس طبق شکل مقابل داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CE \parallel AD \\ AB \text{ موزب } AC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle 3 = \angle 4 \\ \angle 3 = \angle 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$

در نتیجه AD نیمساز برونی زاویه A از مثلث ABC است.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

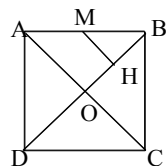
پس:

روش دوم:

در روش اول اثبات گردید که $AD \parallel CE$ طبق قضیه تالس داریم:

$$AD \parallel CE \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE} \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{2}$$

۱۲- دو چند ضلعی زمانی متشابه هستند که زوایای متناظر باهم برابر و اضلاع متناظر متناسب باشند. در دو مستطیل نسبت طولها به عرضها می تواند برابر نباشد. در دو متوازی الاضلاع نسبت دو ضلع مجاور می تواند برابر نباشد. در دو دوزنقه با زاویه های مساوی نسبت قاعده ها بر ساقها می تواند برابر نباشد. اما دو لوزی که یک زاویه برابر دارند همواره متشابه اند. چون نسبت اضلاع همواره برابر بوده و هرگاه یک زاویه برابر داشته باشند زوایای دیگرشان نیز باهم برابر است. پس گزینه ۳ صحیح است.



۱۳- مطابق شکل، می دانیم AC بر BD عمود و آن را نصف می کند پس:

$$AB = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow AO = \frac{5}{2}$$

نقاط M و H به ترتیب وسطهای AB و OB هستند. پس:

$$\text{قضیه تالس: } \frac{MH}{AO} = \frac{BM}{AB} = \frac{BH}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = \frac{1}{2} AO = \frac{5}{4}$$

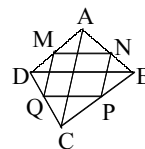
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۴- در دو مثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسبند. چون X و Y از ضلع سوم خود یعنی ضلع بطول ۵ بزرگترند، پس ضلع بطول ۵ کوچکترین ضلع مثلث است و با عدد ۳ متناسب می باشد پس:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x+y}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow x+y=3$$

پس گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۸- در صورتی که ABCD یک چهارضلعی کوژ (محدب) باشد و M، N، P و Q به ترتیب اوساط اضلاع AD، AB، BC و CD باشند. (طبق قضیه تالس) داریم:



$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel \frac{1}{2} BD \\ PQ \parallel \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel PQ, \quad \left. \begin{array}{l} NP \parallel \frac{1}{2} AC \\ MQ \parallel \frac{1}{2} AC \end{array} \right\} \Rightarrow NP \parallel MQ$$

بنابراین اضلاع روبرو چهارضلعی MNPQ با یکدیگر موازی و مساوی بوده و چهار ضلعی حاصل یک متوازی الاضلاع است. می دانیم در چهار ضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبرو برابر با مجموع دو ضلع دیگر می باشند یعنی: $AB + DC = AD + BC$. که این مطلب، نتیجه دیگری را به نتیجه بدست آمده اضافه نمی کند. بنابراین چهارضلعی MNPQ متوازی الاضلاع بوده و گزینه ۴ صحیح است.

۹- می دانیم نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر مجذور نسبت تشابه دو شکل است همچنین ۲، n ضلعی منظم همواره متشابه هستند.

طول ضلع ۶ ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R یعنی: $C_6 = R$. همچنین طول ضلع ۶ ضلعی محیط

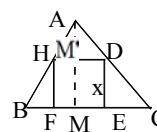
$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{C'_6}{C_6} \right)^2 = \left(\frac{R \sqrt{3}}{R} \right)^2 = 3$$

بر دایره برابر $C'_6 = R \sqrt{3}$ می باشد پس داریم:

یعنی گزینه ۳ صحیح است.

نکته: طول ضلع n ضلعی منظم محاط در دایره به شعاع R برابر $C_n = R \sin \frac{180^\circ}{n}$ و طول ضلع n ضلعی منظم

محیطی برابر $C'_n = R \tan \frac{180^\circ}{n}$ است.

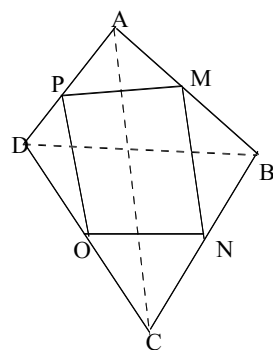


۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر طول ضلع مربع x باشد، داریم:

$$DH \parallel BC \Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM'}{AM} = \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{AM - x}{AM} = \frac{x}{BC}$$

در مثلث متساوی الاضلاع، اندازهی ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر ضلع آن است پس $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، پس:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - x = \frac{\sqrt{3}}{2} x \Rightarrow (\sqrt{3} + 2)x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 2\sqrt{3} - 3$$



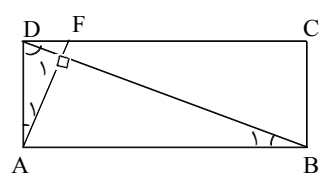
۲۱- با توجه به چهارضلعی مقابل، چون M و N وسط AB و BC است، طبق قضیه تالس:

$$\left. \begin{array}{l} MN = \frac{AC}{2} \\ MN \parallel AC \\ OP = \frac{AC}{2} \\ OP \parallel AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} MN = OP \\ MN \parallel OP \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} MP = NO \\ MP \parallel NO \end{array} \right.$$

به همین صورت:

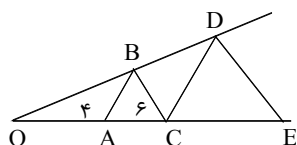
یعنی در هر ۴ ضلعی، با وصل کردن اواسط اضلاع، یک متوازی‌الاضلاع بوجود می‌آید که اضلاع آن موازی اقطار چهارضلعی است. پس برای اینکه این متوازی‌الاضلاع مستطیل شود، کافی است که اقطار این چهارضلعی بر هم عمود شوند. با توجه به گزینه‌های داده شده، فقط در لوزی الزاماً دو قطر برهم عمود هستند. لذا گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۲- در دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و AFD زاویه‌های \hat{A}_1 ، \hat{B}_1 با هم برابرند، چون هر دو متمم زاویه \hat{D}_1 هستند. پس این دو مثلث متشابهند. بنابراین: $\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{AD}$ از طرفی داریم $AD = \frac{1}{3}AB$ پس:

$$\frac{\frac{1}{3}AB}{DF} = \frac{AB}{\frac{1}{3}AB} \Rightarrow DF = \frac{1}{9}AB = \frac{1}{9}DC \Rightarrow DC = 9DF$$

ولذا گزینه ۲ صحیح است.



۲۳- با توجه به خطوط موازی و قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} \\ BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OC}{CE} = \frac{OB}{BD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OC}{CE} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow$$

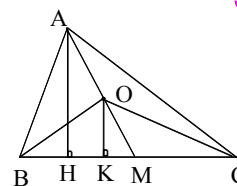
$$\frac{4+6}{CE} = \frac{4}{6} \Rightarrow CE = 15$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲۴- با توجه به قضیه تالس چون $EF \parallel BC$ لذا دو مثلث AEF و ABC متشابه هستند بنابراین اضلاع متناظر، متناسبند پس:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{AE+3} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7AE = 5AE + 15 \Rightarrow 2AE = 15 \Rightarrow AE = 7.5$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث‌های با قاعده‌های یکسان، نسبت مساحتها برابر با نسبت ارتفاعها می‌باشد، بنابراین طبق شکل روبرو داریم:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OK}{AH} = \frac{OK \times BC}{AH \times BC} = \frac{S'}{S} = \frac{S'}{S}$$

۱۶- دو مثلث متشابه‌اند و مساحت مثلث کوچکتر برابر $S' = \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4$ می‌باشد.

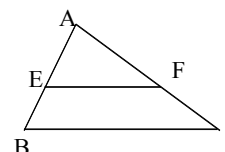
در دو شکل متشابه نسبت مساحتها، مربع نسبت تشابه می‌باشد پس داریم:

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{1\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \Rightarrow S = 4 \times 5 = 20$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.

۱۷- دو پنج‌ضلعی منظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند و نسبت مساحتهای آنها برابر با مربع نسبت تشابه آنها یا مربع اضلاع آنها است، پس نسبت اضلاع دو چند ضلعی برابر با $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ می‌باشد. اگر ضلع کوچکتر را ۶ فرض کنیم در

این صورت $\frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9$ و اگر ضلع بزرگتر را ۶ فرض کنیم $\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4$ طول ضلع دیگر می‌شود. پس اندازه ضلع دیگر ۴ یا ۹ است و گزینه ۲ جواب صحیح است.



۱۸- می‌دانیم اگر $EF \parallel BC$ باشد، دو مثلث AEF و ABC متشابه‌اند و شرط توازی

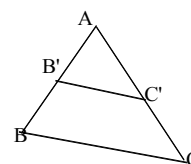
EF و BC، $\frac{AE}{AF} = \frac{EB}{FC}$ می‌باشد (رابطه تالس). این تناسب فقط در گزینه ۴

صادق است که در آن $\frac{6}{8} = \frac{4}{12}$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۹- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحتها برابر است با مربع نسبت اضلاع، پس نسبت اضلاع برابر k است لذا:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{ka'+kb'+kc'}{a'+b'+c'} = k$$

لذا گزینه ۲ جواب صحیح است.



۲۰- بنابر قضیه تالس، اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، دوضلع دیگر را به یک نسبت تقسیم می‌کند، پس:

$$\frac{AC'}{CC'} = \frac{AB'}{BB'} = \frac{3}{10-3} = \frac{3}{7} \Rightarrow AC' = \frac{3}{7}CC'$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{aligned} DE \parallel BN &\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق رابطه}} \frac{AE}{EN} = \frac{AD}{DB} = \frac{4}{6} \\ DN \parallel BC &\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق رابطه}} \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NC} = \frac{4}{6} \end{aligned} \Rightarrow \frac{10}{NC} = \frac{4}{6} \Rightarrow NC = 15 \Rightarrow AC = AN + NC = 25$$

AN = AE + EN = 10

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۳۱- یادآوری: نسبت مساحت ۲ شکل متشابه مجذور نسبت تشابه ۲ شکل است.

$$\begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow \frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \left(\frac{DM}{AM}\right)^2 \\ \frac{AM}{AD} = \frac{3}{5} &\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{S_{CDM}}{S_{ABM}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۳۲- نسبت تشابه ۲ مثلث متشابه برابر نسبت اضلاع متناظر است. اگر طول دو ضلع دیگر مثلث X و Y باشد داریم:

$$\frac{22/5}{5} = \frac{x}{y} = \frac{y}{11}$$

ضلع به طول ۵ از مثلث اول با ضلع ۲۲/۵ از مثلث دوم متناظر است

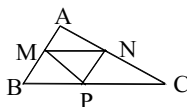
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 31/5 \\ y = 49/5 \end{cases} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = x + y + 22/5 = 103/5$$

چون هر دو کوچکترین ضلع ۲ مثلث هستند.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

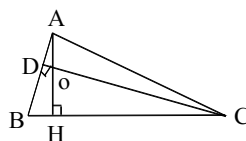
۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \widehat{ACF} &\text{ رابطه تالس در مثلث } \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \\ \widehat{ADF} &\text{ رابطه تالس در مثلث } \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CD} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow CD = \frac{24}{5} = 4/8$$



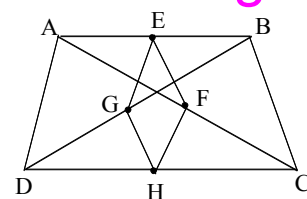
۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مثلث‌های کوچک هم‌نهشت هستند پس:

$$\frac{S}{S'} = 4 \Rightarrow \frac{a}{a'} = 2 \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{a}{a'} = 2$$



$$\text{گزینه ۴ پاسخ صحیح است. } AD = 12, OH = 36, OD = \frac{12}{5} \Rightarrow \widehat{OAD} \sim \widehat{OHC} \Rightarrow \frac{AD}{HC} = \frac{OD}{OH} \Rightarrow$$

$$\frac{12}{HC} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow HC = 36$$



۲۵- در مثلث ABC چون EF وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل کرده،

پس $EF = \frac{1}{2}BC$ (قضیه تالس) و در مثلث ACD نیز به دلیل مشابه

$FH = \frac{1}{2}AD$ است، به همین ترتیب در مثلثهای ABD و BDC می‌توان

دید $EG = \frac{1}{3}AD$ و $GH = \frac{1}{3}BC$ چون AD با BC برابر است،

پس چهار ضلع چهارضلعی بدست آمده با هم برابر بوده و چهار ضلعی، لوزی است. پس گزینه ۳ صحیح است.

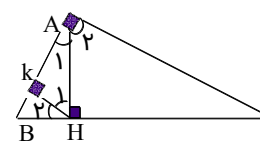
۲۶- می‌دانیم در مثلث قائمه مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع زاویه قائمه.

ابتدا شکل مورد نظر را رسم می‌کنیم داریم: طبق رابطه تالس $MH = \frac{1}{2}AB$ پس:

$$S_{CHM} = \frac{1}{2}HC \times MH$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \times AB = \frac{1}{2} \times 2HC \times 2MH = 2S_{CHM}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۲۷- با توجه به شکل تمام مثلثها غیر از گزینه ۱ دارای شرایط تشابه می‌باشند. طبق شکل خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{H}_1 = 90 \\ \widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{H}_2 \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AHK} \sim \widehat{ABH} \\ \widehat{AHK} \sim \widehat{BHK} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{A}_1 \\ \widehat{A}_1 = \widehat{C} = \widehat{H}_2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AHC} \sim \widehat{AHB}$$

به همین ترتیب:

پس گزینه ۱ صحیح است. یعنی ABC و AKC دارای حالت تشابه نیستند.

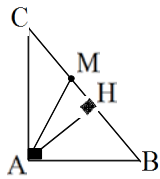
۲۸- می‌دانیم دو شکل، زمانی متشابه هستند که زاویه‌ها نظیر به نظیر برابر و اضلاع متناظر، متناسب باشند. با توجه به تعریف

تشابه هر دو مستطیل نمی‌تواند با هم متشابه باشند زیرا نسبت اضلاعشان متفاوت است. پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۹- چون زوایای B و E برابرند در نتیجه $BC \parallel ED$ خواهد شد مطابق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{x+8}{8} \Rightarrow 72 = 6x + 48 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABC، ABH، ACH متشابه‌اند.

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{CH}{AH} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{BH}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{CH}{BH} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow BH = \frac{4}{5} BC, \quad CH = \frac{3}{5} BC$$

$$BM = \frac{1}{5} BC \Rightarrow MH = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5} \right) BC = \frac{1}{5} BC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BC}{\frac{1}{2} AH \cdot MH} = \frac{BC}{MH} = 14$$

روش دوم با توجه به شکل:

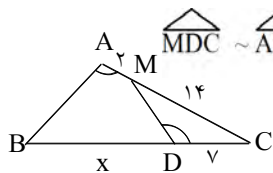
$$AB = \sqrt{5}, \quad AC = 2 \Rightarrow BC = \sqrt{5}, \quad BM = \frac{\sqrt{5}}{2} = CM$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$HM = BM - BH = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{14}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{BC}{HM} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{14}} = 14$$

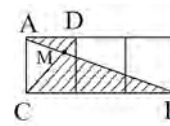
۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\triangle MDC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{14}{y+x} \Rightarrow \frac{1}{14} = \frac{2}{y+x} \Rightarrow y+x = 32 \Rightarrow x = 25$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{49}{128} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{v}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = 24\sqrt{2}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AMD و MBC متشابهند زیرا $AD \parallel BC$ پس:

$$AB = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{\sqrt{10} - AM} = \frac{1}{3}$$

$$4AM = \sqrt{10} \Rightarrow AM = \frac{1}{4}\sqrt{10}$$

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 9x = 12x - 24 \Rightarrow x = 8$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{4}{9}$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

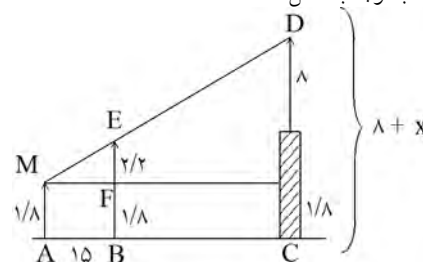
$$\triangle ABC : A = 70^\circ \text{ و } B = 50^\circ \text{ و } C = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle MNP$$

$$\triangle MNP : M = 70^\circ \text{ و } N = 60^\circ \text{ و } P = 50^\circ$$

چون $\frac{S}{S'} = \frac{9}{4}$, $\hat{N} = \hat{C} = 60^\circ$ پس:

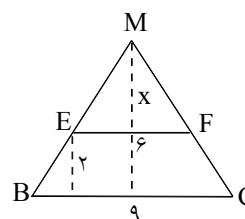
$$\frac{AB}{MP} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \frac{18}{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MP = 12$$

۴۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از نقطه M موازی افقی رسم کرده با توجه به شکل



$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2/2}{18+x-1/8} = \frac{15}{18} \Rightarrow x = 20/2$$

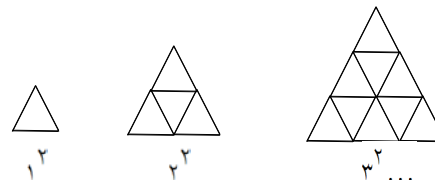
۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MEF و MBC متشابهند. با فرض این که ارتفاع مثلث بزرگ تر $(x+2)$ باشد و نسبت ارتفاعها برابر نسبت تشابه.



$$\frac{6}{9} = \frac{x}{2+x}$$

$$12 + 6x = 9x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4 + 2 = 6$$

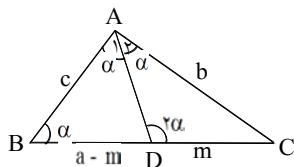
۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و استدلال استقرایی، تعداد مثلثهای مورد نظر، برابر عدد مربع کامل است. پس فقط با $5^2 = 25$ مثلث می توان چنین کاری کرد.



۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه A را رسم می کنیم.

$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{A} = 2\alpha \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{a-m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = am \\ a^2 - ma = bc \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = bc$$



$$h^2 = x(4-x) \Rightarrow h = \sqrt{x(4-x)}$$

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

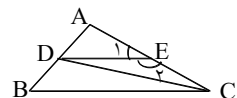
$$\frac{h}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x(4-x)}}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow \frac{x(4-x)}{9} = \frac{(4-x)^2}{16}$$

$$\Rightarrow 16x = 36 - 9x \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1.44$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

زوایای E_1 و E_2 مکمل اند پس دارای سینوس های برابر هستند.



$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2}AE \times DE \sin E_1}{\frac{1}{2}DE \times EC \sin E_2} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3} \times 100 = \frac{200}{3} = 66.67$$

اشکال فضایی - خارج از کشور

۱- قاعده‌ی یک هرم منتظم، مربعی است به ضلع ۶ واحد و ارتفاع یکی از وجه‌های جانبی آن برابر ۵ واحد است. حجم این هرم چند واحد مکعب است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۴۵ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

۲- در داخل یک کره به شعاع R ، بزرگ‌ترین مکعب ممکن قرار دارد. نسبت حجم کره به حجم این مکعب، چند برابر $\pi\sqrt{3}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳- در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی آن، راس‌های یک هشت وجهی منتظم‌اند. حجم این هشت وجهی منتظم، چند برابر حجم مکعب است؟ (دو هرم منتظم در قاعده مشترک)

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴- از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکل باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}\pi$ (۲) $\frac{1}{5}\pi$ (۳) $\frac{1}{6}\pi$ (۴) $\frac{1}{7}\pi$

۵- اگر هر سه صفحه‌ی متمایز بر صفحه‌ی P عمود باشند، آن‌گاه فصل مشترک‌های دو به دو این سه صفحه‌ی متمایز، کدام وضعیت را نمی‌پذیرد؟

- (۱) فصل مشترک ندارند (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

۶- ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ است. زاویه‌ی بین قطر این مکعب مستطیل با بزرگ‌ترین یال آن چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

۷- حجم یک هرم مربع القاعده به ضلع a و ارتفاع a ، برابر حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی a است. طول ارتفاع مخروط کدام است؟

- (۱) $\frac{a}{\pi}$ (۲) $\frac{\pi}{a}$ (۳) $\frac{\sqrt{a}}{\pi}$ (۴) $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

۸- بر کره‌ای به شعاع R کوچک‌ترین استوانه‌ی ممکن را محیط می‌کنیم. نسبت سطح کل استوانه به سطح کره چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹- دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل در یک مکعب به طول یال ۶ واحد جای گرفته اند. طول قطر هریک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

۹ (۴)

$6\sqrt{2}$ (۳)

$3\sqrt{6}$ (۲)

$4\sqrt{3}$ (۱)

۱۰- در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. حجم بیش‌تر این استوانه چه قدر است؟

144π (۴)

108π (۳)

98π (۲)

96π (۱)

۱۱- در یک مخروط به ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر، صفحه‌ای به چه فاصله از قاعده‌ی مخروط رسم کنیم که حجم مخروط بزرگ ۱۲۵ برابر حجم مخروط کوچک باشد؟

۵ (۴)

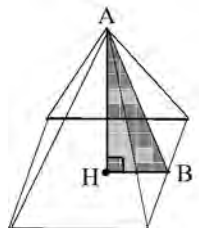
۷ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

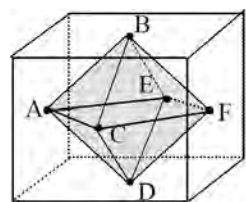
جواب اشکال فضایی - خارج از کشور

- ۱- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل $HB = 3$ می باشد، حال در $\triangle AHB$ با استفاده از رابطه ی فیثاغورس داریم $AH = 4$ حال حجم هرم برابر است با: $V = \frac{1}{3} \times S \cdot h = \frac{1}{3} (6^2) \times 4 = 48$



- ۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در این حالت قطر کره برابر با قطر مکعب خواهد شد و در نتیجه اگر ضلع مکعب برابر a و شعاع کره برابر R باشد، داریم:
- $$2R = \sqrt{3}a \rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi = \frac{1}{2}(\pi\sqrt{3})$$



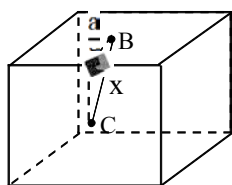
- ۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. همان طور که در شکل ملاحظه می کنید دو هرم $ABCDE$ و $FBCDE$ از قاعده به هم چسبیده اند و یک ۸ وجهی منتظم را به وجود آورده اند که اندازه ی ارتفاع وارد بر قاعده ی $BCDE$ در هر کدام از این هرم ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{2}$ است. اما برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه ی فیثاغورث به دست می آید:

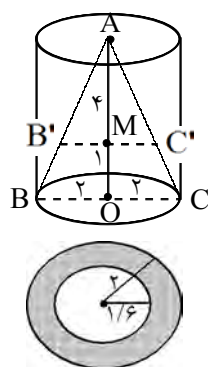
$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}$$

و چون هشت وجهی ایجاد شده منتظم است پس همه ی یال های آن با هم برابرند، در نتیجه:

$$V_{\text{هشت وجهی}} = 2V_{ABCDE} = 2\left(\frac{1}{3}Sh\right) = \frac{2}{3}(x^2)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{6}$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{هشت وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{1}{6}$$



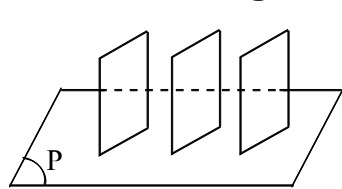


$$\frac{MB'}{OB} = \frac{AM}{AO} \rightarrow \frac{MB'}{2} = \frac{4}{5} \rightarrow MB' = 1/6$$

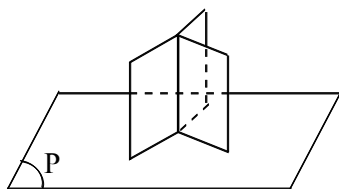
۴- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.
اگر صفحه ای به موازات قاعده و به فاصله ی ۱ واحد از آن را با استوانه ی قائم تقاطع دهیم، مقطع حاصل دایره ای به مرکز M و به شعاع ۲ است و اگر همان صفحه را با مخروط داخلی تقاطع دهیم، مقطع حاصل دایره ای به مرکز M و شعاع $MB' = MC' = 1/6$ است. در نتیجه وقتی مخروط را از داخل استوانه درمی آوریم، مقطع حاصل از تقاطع با صفحه ی فوق الذکر به صورت مقابل است و داریم:

$$\text{مساحت مقطع} = \pi(2)^2 - \pi(1/6)^2 = (4 - 1/36)\pi = 145/36\pi$$

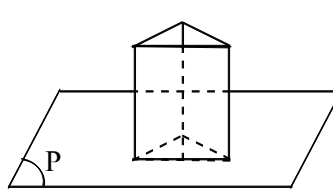
۵- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل های زیر فقط گزینه ی ۴ ممکن نیست و در نتیجه پاسخ تست است.



گزینه ی ۱

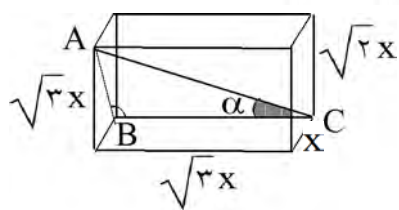


گزینه ی ۲



گزینه ی ۳

۶- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ است. بنابراین ابعاد این



مکعب مستطیل x ، $\sqrt{2}x$ و $\sqrt{3}x$ می باشند. ابتدا به این نکته توجه کنید که قطر مربعی به اضلاع x و $\sqrt{2}x$ است، بنابراین

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + x^2} = \sqrt{3}x$$

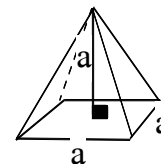
این مکعب مستطیل با بزرگ ترین یال آن، به شکل مقابل به دقت توجه کنید. مثلث ABC در رأس B قائمه است. از طرفی چون دو ضلع AB و BC هم طول اند، در نتیجه این مثلث قائم الزاویه، متساوی الساقین می باشد. پس زاویه ی بین قطر و بزرگ ترین یال (یعنی زاویه ی α) برابر 45° است.

۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}a^2 \times a = \frac{1}{3}a^3$$

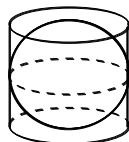
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=a} \frac{1}{3}\pi a^2 \times h$$

$$\Rightarrow V_{\text{هرم}} = V_{\text{مخروط}} \Rightarrow \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\pi a^2 h \Rightarrow a = \pi h \Rightarrow h = \frac{a}{\pi}$$



۸- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر شعاع کره R باشد، مطابق شکل، شعاع قاعده ی استوانه $r = R$ و ارتفاع استوانه $h = 2R$ خواهد بود. حال با توجه به روابط سطح کل استوانه و سطح کره داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{سطح کل استوانه} &= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi R(2R) + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 \\ \text{سطح کره} &= 4\pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{سطح کل استوانه}}{\text{سطح کره}} = \frac{6\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}$$



۹- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. مکعبی به طول یال ۶ واحد را در نظر می گیریم. برای این که در داخل این مکعب، دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل جا بگیرد، می توانیم صفحه ای را دقیقاً از وسط ارتفاع این مکعب عبور دهیم. با انجام این کار، مکعب به دو مکعب مستطیل یکسان تقسیم می شود که قاعده ی این دو مکعب مستطیل با قاعده ی مکعب یکسان بوده و تنها ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل یکسان برابر ۳ و ۶ و ۶ واحد می باشد.

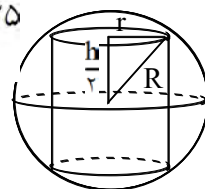
از طرفی می دانیم اگر اندازه های یال های مکعب مستطیل a ، b و c باشند، قطر این مکعب مستطیل برابر با $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ خواهد بود بنابراین:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 9$$

۱۰- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه ی قائم با سطح جانبی 48π محاط شده است. داریم:

$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = 2\pi rh = 48\pi \Rightarrow rh = 24 \\ r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rh = 24 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{12}{r} \Rightarrow \frac{h^2}{4} = \frac{144}{r^2} \\ r^2 + \frac{h^2}{4} = 25 \Rightarrow r^2 + \frac{144}{r^2} = 25 \end{cases}$$

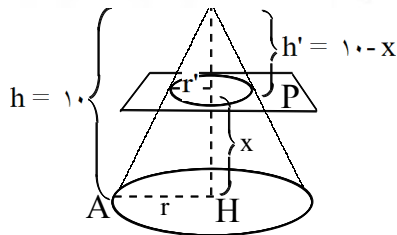
$$\Rightarrow (r^2)^2 - 25r^2 + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 9 \Rightarrow h = 8 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 72\pi \\ r^2 = 16 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow V = \pi r^2 h = 96\pi \end{cases}$$



۱۱- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر در یک مخروط به ارتفاع ۱۰ سانتی متر، صفحه ای به چه فاصله از قاعده ی مخروط رسم کنیم که حجم مخروط بزرگ ۱۲۵ برابر حجم مخروط کوچک تر است. پس داریم:

$$V_{\text{مخروط بزرگ}} = 125 V_{\text{مخروط کوچک}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r'^2 h'} = 125 \Rightarrow \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = 125 \Rightarrow \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{h'}\right) = 125 \quad (*)$$

در مثلث OAH طبق قضیه ی تالس، داریم:



$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{10}{10-x}$$

حال اگر در رابطه ی (*) به جای نسبت $\frac{r}{r'}$ و $\frac{h}{h'}$ مقدار $\frac{10}{10-x}$ را جایگزین کنیم. X به دست می آید.

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{h'}\right) = 125 \Rightarrow \left(\frac{10}{10-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{10-x}\right) = 125 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{10}{10-x}\right)^3 = 125 \Rightarrow \frac{10}{10-x} = 5 \Rightarrow 10-x = 2 \Rightarrow x = 8 \text{ سانتی متر}$$

اشکال فضایی - سنجش

۱- مخروط قائم دواری را با صفحه‌ای موازی قاعده قطع می‌دهیم. اگر مساحت مقطع حاصل $\frac{4}{9}$ مساحت قاعده مخروط

باشد، حجم مخروط ناقص حاصل چند برابر حجم مخروط اولیه است؟

$$\frac{4}{9} (1) \quad \frac{5}{9} (2) \quad \frac{8}{27} (3) \quad \frac{19}{27} (4)$$

۲- حجم یک منشور مربع‌القاعده به ضلع a ، ۱۸ برابر حجم یک هرم مربع‌القاعده به ضلع a است. ارتفاع منشور چند برابر ارتفاع هرم است؟

$$3 (1) \quad 6 (2) \quad 9 (3) \quad 12 (4)$$

۳- طول هر ضلع از مکعبی برابر $\sqrt{3}$ و نقطه G از تمام رأس‌ها به یک فاصله است، فاصله نقطه G از هر رأس کدام است؟

$$1 (1) \quad 2 (2) \quad \frac{3}{2} (3) \quad 3 (4)$$

۴- در منشور مربع‌القاعده مایل طول ضلع قاعده آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوه آن مربع و وجه دیگر آن، لوزی با زاویه 60° است. حجم منشور کدام است؟

$$\frac{9}{2} (1) \quad \frac{9}{4} (2) \quad \frac{3}{2} (3) \quad 3 (4)$$

۵- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۴ و ۳ واحد حول وترش جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

$$\frac{21/4\pi}{3} (1) \quad \frac{28/8\pi}{3} (2) \quad \frac{24/2\pi}{3} (3) \quad \frac{25/6\pi}{3} (4)$$

۶- در هر مکعب سینوس زاویه بین قطر مکعب با یکی از یالهای گذرنده بر یک رأس آن کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{3} (1) \quad \frac{\sqrt{6}}{2} (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} (4)$$

۷- در یک هرم ناقص مساحت دو قاعده ۱۲ و ۲۷ واحد مربع است. اگر ارتفاع هرم اصلی ۱۲ باشد فاصله رأس هرم از قاعده کوچکتر چقدر است؟

$$4 (1) \quad 5 (2) \quad 6 (3) \quad 8 (4)$$

۸- در یک مخروط قائم شعاع قاعده برابر ارتفاع آن است، عدد سطح جانبی و عدد حجم مخروط برابرند، شعاع قاعده مخروط کدام است؟

$$2\sqrt{2} (1) \quad 2\sqrt{3} (2) \quad 3\sqrt{2} (3) \quad 3\sqrt{3} (4)$$

۹- در یک مکعب زاویه بین دو قطر مربع‌های جانبی گذرنده بر یک رأس چند درجه است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

۱۰- قطر یک مکعب برابر $3\sqrt[4]{3}$ می‌باشد. سطح کل آن کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{6}$ (۲) $12\sqrt{6}$ (۳) $18\sqrt{3}$ (۴) $24\sqrt{3}$

۱۱- ابعاد مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد، اگر سطح کل آن ۱۹۸ واحد مربع باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۵۳ (۴) ۱۶۲

۱۲- مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع ۳ واحد برابر 24π واحد سطح است، حجم آن کدام است؟

- (۱) 54π (۲) 48π (۳) 45π (۴) 42π

۱۳- حجم استوانه دوار به ارتفاع ۳ واحد برابر 48π واحد حجم است، مساحت جانبی آن چند واحد سطح است؟

- (۱) 36π (۲) 27π (۳) 24π (۴) 18π

۱۴- در هرم منتظم مربع القاعده به ضلع ۸ واحد طول یال جانبی آن ۹ واحد است، حجم هرم کدام است؟

- (۱) $\frac{434}{3}$ (۲) $\frac{448}{3}$ (۳) ۱۵۲ (۴) ۱۶۰

۱۵- در یک هرم مربع القاعده ضلع قاعده‌ی آن ۸ واحد و اندازه‌ی یال جانبی آن ۹ واحد است. ارتفاع هرم کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) $7/5$ (۴) $4\sqrt{3}$

۱۶- حجم استوانه دوار با ارتفاع ۶ برابر 24π واحد مکعب است سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

۱۷- در یک استوانه دوار عدد سطح جانبی با عدد حجم آن برابر است، شعاع قاعده این استوانه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۸- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ حول وتر جسمی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟

- (۱) $\frac{201}{6\pi}$ (۲) $\frac{203}{4\pi}$ (۳) $\frac{210}{6\pi}$ (۴) $\frac{230}{4\pi}$

۱۹- حجم بزرگترین مخروط محاط در داخل یک مکعب به طول یال ۳ واحد کدام است؟

- (۱) $1/75\pi$ (۲) $2/25\pi$ (۳) $2/75\pi$ (۴) $3/25\pi$

۲۰- ارتفاع استوانه‌ای را نصف و شعاع قاعده آن را دو برابر می‌کنیم سطح جانبی و حجم آن چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) سطح جانبی دو برابر - حجم ثابت
(۲) سطح جانبی ثابت - حجم دو برابر
(۳) سطح جانبی و حجم دو برابر
(۴) سطح جانبی و حجم ثابت

۲۱- سطح جانبی استوانه دوار به ارتفاع ۶ واحد برابر 24π واحد مربع است، حجم آن کدام است؟
 (۱) 18π (۲) 24π (۳) 28π (۴) 36π

۲۲- مثلث قائم الزاویه‌ای به طول اضلاع ۱۸ و ۱۲ واحد را حول هر یک از اضلاع آن دوران می‌دهیم نسبت حجم‌های دو شکل حاصل کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۲۳- داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین استوانه ممکن را قرار می‌دهیم، حجم استوانه چقدر است؟

(۱) $\pi\sqrt{3}$ (۲) 2π (۳) 3π (۴) $2\pi\sqrt{3}$

۲۴- از داخل یک مکعب به طول یال واحد بزرگترین مخروط قائم ممکن را برداشته‌ایم. حجم باقیمانده چند واحد مکعب است؟

(۱) $1 - \frac{\pi}{6}$ (۲) $1 - \frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

۲۵- در داخل مکعبی به طول یال واحد بزرگترین کره ممکن قرار می‌دهیم، حجم این کره چقدر است؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲۶- پیمانه‌ای به شکل نیمکره با شعاع داخلی ۱۲ واحد را لبریز از آب کرده داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم. آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

(۱) ۶ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۷- در داخل یک مکعب بزرگترین کره ممکن را قرار می‌دهیم و نسبت حجم این کره به حجم مکعب کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{3\pi}{8}$

۲۸- پیمانه‌ای به شکل نیمکره با قطره داخلی ۹ واحد را لبریز از آب کرده داخل استوانه با همان شعاع قاعده می‌ریزیم، ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

(۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۲۹- اگر ضلع مکعبی را در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب کنیم، سطح آن در کدام عدد ضرب می‌شود؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۰- ضلع مکعبی در $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب شده، سطح کل آن در کدام عدد ضرب می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۱- سطح کل چهاروجهی منتظم که طول یال آن برابر ۱ واحد باشد، چند واحد مربع است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۳۲- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم، حجم حادث چقدر است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۳۳- اضلاع مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۳ و ۲ و ۱ می‌باشد. اگر سطح جانبی آن $\frac{99}{4}$ واحد باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) $20/25$ (۲) $20/75$ (۳) $21/25$ (۴) $21/5$

۳۴- اضلاع مکعب مستطیلی متناسب با اعداد ۲ و ۲ و ۱ است و قطر مکعب مستطیل ۱۲ واحد است، سطح کل آن چقدر است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۱۹۶ (۳) ۲۱۶ (۴) ۲۵۶

۳۵- از دوران مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد حول یک ضلع جسمی حادث می‌شود. حجم آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۳۶- در مکعب مفروض فاصله‌ی دو راس غیر واقع بر یک وجه ۳ واحد است. حجم آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۳۷- حجم یک مکعب برابر $2\sqrt{2}$ واحد مکعب است. قطر این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۳۸- از یک مکعب، کنج سه قائمه که یال‌های آن برابر یال مکعب است، برداشته شده است. حجم باقیمانده چند برابر حجم مکعب اصلی است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۳۹- صفحه‌ای از انتهای سه یال گذرا بر یک رأس مکعبی می‌گذرد، و مکعب را به دو قسمت تقسیم می‌کند. حجم قسمت بزرگتر چند برابر حجم قسمت کوچکتر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۴۰- از دوران مربع به ضلع $3\sqrt{2}$ واحد در حول قطر آن جسمی با کدام حجم حاصل می‌شود؟

- (۱) 24π (۲) 21π (۳) 18π (۴) 12π

۴۱- طول یال چهاروجهی منتظم برابر ۲ واحد است. سطح کل آن کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{3}$ (۲) ۶ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

۴۲- ارتفاع هرم منتظم مربع‌القاعده ۷ و ضلع قاعده‌ی آن ۸ واحد است، یال هرم چند واحد است؟

- (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۴۳- در یک هرم با قاعده‌ی ۲۷ واحد مربع و ارتفاع ۱۸ واحد صفحه‌ای موازی قاعده، مقطعی به مساحت ۱۲ واحد مربع ایجاد کرده است. فاصله‌ی این صفحه تا سطح قاعده هرم کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۴۴- مقطع یک صفحه با یک سطح منشوری مربع‌القاعده کدام چهارضلعی نمی‌تواند باشد؟

- (۱) مستطیل (۲) مربع (۳) لوزی (۴) دوزنقه

۴۵- صفحه گذرنده بر انتهای سه یال در یک رأس از مکعب به قطر $3\sqrt{2}$ واحد آن را دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء بزرگتر کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۳) $5\sqrt{6}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۴۶- در مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۲ واحد، سطح کل چند واحد مربع است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۲ (۳) ۵۸ (۴) ۵۶

۴۷- قاعده‌ی یک هرم منتظم، مربعی به ضلع ۸ واحد و یال هرم نیز برابر ۹ واحد است ارتفاع هرم کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۸- سطح قاعده‌ی هرم ۲۷ واحد مربع و ارتفاع آن ۱۲ واحد با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی این هرم را قطع می‌دهیم. سطح مقطع حاصل ۱۸ واحد مربع است، فاصله راس هرم تا این صفحه کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

۴۹- فاصله‌ی نقطه‌ی O از تمام رأس‌های مکعبی برابر $\sqrt{3}$ واحد است، حجم مکعب چقدر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۵۰- در یک استوانه دوار، عدد سطح جانبی با عدد حجم آن برابر است شعاع قاعده این استوانه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۵۱- از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۶ و ۸ واحد دور وترش کدام حجم حاصل می‌شود؟

- (۱) $76/8\pi$ (۲) $79/2\pi$ (۳) $81/6\pi$ (۴) $84/6\pi$

۵۲- حجم بزرگترین مخروط محاط در داخل مکعب به طول یال ۳ واحد چند برابر π است؟

- (۱) $1/75$ (۲) $2/25$ (۳) $2/75$ (۴) $3/25$

۵۳- مثلث قائم الزاویه به طول اضلاع قائم ۱۲ و ۱۸ واحد را حول هر یک از این دو ضلع دوران می دهیم، نسبت حجم های دو شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۴- در یک مکعب سه رأس دوجه دو غیر واقع بر یک یال، رأس های مثلثی اند. مساحت این مثلث چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

۵۵- در داخل مکعبی به قطر $4\sqrt{3}$ بزرگترین استوانه ای ممکن محاط شده است. سطح کل استوانه کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۵۶- حجم استوانه دوار به ارتفاع ۶ واحد برابر 24π واحد مکعب است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

۵۷- مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ واحد را حول بزرگترین ضلع خود دوران می دهیم، حجم حاصل چند برابر π است؟

- (۱) $7/2$ (۲) $8/1$ (۳) $9/6$ (۴) $10/8$

۵۸- در یک استوانه ارتفاع نصف و شعاع قاعده دو برابر می شود. تغییرات سطح جانبی و حجم آن چگونه است؟

- (۱) سطح دو برابر - حجم ثابت
(۲) سطح و حجم دو برابر
(۳) سطح ثابت - حجم دو برابر
(۴) سطح و حجم ثابت

۵۹- سطح جانبی مخروطی به شعاع قاعده ۵ و ارتفاع $2\sqrt{6}$ برابر کدام است؟

- (۱) 30π (۲) 35π (۳) 45π (۴) 48π

۶۰- از دوران یک مستطیل به ابعاد ۳ و ۵ واحد حول ضلع بزرگتر جسمی با کدام حجم ایجاد می شود؟

- (۱) 45π (۲) 54π (۳) 60π (۴) 75π

۶۱- داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین استوانه ممکن قرار داده شده است. سطح کل استوانه چقدر است؟

- (۱) 2π (۲) 4π (۳) 6π (۴) $2\pi\sqrt{3}$

۶۲- در داخل یک مکعب به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین استوانه ای ممکن قرار گرفته است. سطح کل این استوانه کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) 6π

۶۳- از داخل یک مکعب به طول یال واحد بزرگترین مخروط قائم ممکن را برداشته‌ایم، حجم باقیمانده کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{8}$ (۳) $1 - \frac{\pi}{6}$ (۴) $1 - \frac{\pi}{12}$

۶۴- در داخل مکعبی به طول یال واحد بزرگترین کره ممکن را قرار می‌دهیم. حجم این کره کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{3\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۵- حجم مکعبی $\frac{\sqrt{2}}{4}$ حجم مکعب دیگر است. قطر مکعب بزرگ‌تر چند برابر قطر مکعب کوچک‌تر است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $1/5$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۶۶- اگر نسبت اضلاع دو مکعب $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، نسبت حجم‌های آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۶۷- پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره به قطر داخلی ۲۴ واحد را لبریز از آب کرده، داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم. ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) ۶ (۲) $7/5$ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۸- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۶۹- اضلاع مکعب مستطیل متناسب با اعداد ۲ و ۲ و ۱ و سطح کل آن ۴۰۹۶ واحد مربع است. قطر آن چند واحد است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۷۰- اضلاع مکعب مستطیل با اعداد ۱، ۲، ۳ متناسب است. اگر سطح کل آن $\frac{99}{2}$ واحد باشد، حجم آن کدام است؟

- (۱) $20/25$ (۲) $20/75$ (۳) $21/25$ (۴) $21/5$

۷۱- از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد حول یک ضلع جسمی حادث می‌شود. حجم آن کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۷۲- در مکعبی به حجم $24\sqrt{3}$ فاصله‌ی دو رأس غیرواقع بر یک وجه کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

۷۳- حجم یک مکعب برابر $2\sqrt{2}$ واحد این مکعب است. قطر این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۷۴- از یک مکعب کنج سه قائم که یال‌های آن برابر یال مکعب است، برداشته شده است. حجم باقیمانده چند برابر حجم مکعب اصلی است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۷۵- ارتفاع یک استوانه برابر قطر قاعده آن است. تصویر استوانه بر یک صفحه، یک مربع است. زاویه‌ی محور استوانه با صفحه تصویر چند درجه است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

۷۶- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از اضلاع دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه قدر است؟

- (۱) 8π (۲) 12π (۳) 16π (۴) 18π

۷۷- در مخروطی که مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ واحد است، کره‌ای محاط شده است. حجم کره کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) $3\pi\sqrt{3}$ (۳) $4\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

۷۸- قاعده‌ی هرم منتظم مربع به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد است. عدد حجم هرم با عدد سطح قاعده برابر است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۷۹- اندازه‌ی هر یال مکعب ۳ واحد است. صفحه‌ای از انتهای سه یال گذرنده بر یک رأس، مکعب را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{7}{5}$ (۳) ۶ (۴) $\frac{4}{5}$

۸۰- مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد را حول یکی از اضلاع دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

- (۱) 8π (۲) 9π (۳) 12π (۴) 16π

۸۱- ارتفاع استوانه‌ای دو برابر شعاع قاعده‌ی آن است. تصویر این استوانه بر یک صفحه، یک مربع است. زاویه‌ی صفحه‌ی تصویر با محور استوانه چند درجه است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸۰

۸۲- در هرم منتظم مربع‌القاعده به مساحت قاعده ۱۲ واحد مربع عدد حجم هرم با عدد سطح قاعده برابر است. سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) $12\sqrt{3}$ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۸۳- در یک مکعب صفحه‌ی گذرنده بر قطر یک وجه آن که از یال‌ها نگذرد، سطح مکعب را در کدام چهارضلعی قطع می‌کند؟

- (۱) دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
(۲) لوزی
(۳) متوازی‌الاضلاع
(۴) مستطیل

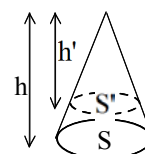
۸۴- قطر یک مکعب مستطیل $3\sqrt{11}$ و قاعده آن مربع است به قطر $3\sqrt{2}$ ، سطح کل مکعب مستطیل کدام است؟

(۱) ۹۸ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۴ (۴) ۱۲۶

۸۵- مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{3}$ (۲) π (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{5\pi}{3}$

جواب اشکال فضایی - سنجش



۱- می‌دانیم نسبت مساحت‌های قاعده دو مخروط برابر مجذور نسبت ارتفاعات آنها و نسبت حجم آن دو، برابر توان سوم ارتفاعات ۲ مخروط است.

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{3}$$

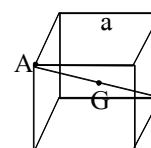
$$\Rightarrow \frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{\text{حجم مخروط ناقص}}{\text{حجم کل}} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

$$\left. \begin{aligned} \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} &= \text{حجم منشور} \\ a^2 \times h_1 &= \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع هرم} \\ a^2 \times h_1 &= \frac{1}{3} \times a^2 \times h_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 \times h_1 = 18 \left(\frac{1}{3} a^2 \times h_2 \right) = 6 a^2 h_2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 6$$

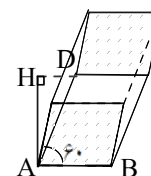
بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.



۳- نقطه‌ای داخل مکعب، که از تمام رئوس به یک فاصله است مرکز مکعب و وسط قطر اصلی مکعب است. هرگاه طول ضلع مکعب a باشد، خواهیم داشت:

$$AB = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \Rightarrow GA = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

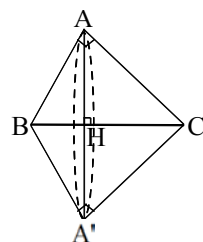


۴- قاعده منشور مربعی به ضلع $\sqrt{3}$ است. هرگاه ABCD یک وجه این منشور باشد که یک لوزی است، ارتفاع این منشور با یال AD زاویه 30° می‌سازد، بنابراین خواهیم داشت:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

$$V = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = (\sqrt{3})^2 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۵- شکل حاصل در مخروط از قاعده بهم چسبیده می‌باشد بطوریکه ارتفاعهای ۲ مخروط BH و CH بوده و شعاع قاعده‌های آنها، ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC است.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

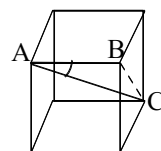
$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن.

$$V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{3} \pi (AH)^2 \times BH \right) + \left(\frac{1}{3} \pi (AH)^2 \times CH \right) = \frac{\pi}{3} AH^2 (BH + CH)$$

$$= \frac{\pi}{3} AH^2 \times BC \Rightarrow \text{حجم کل} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{12}{5} \right)^2 \times 5 = \frac{\pi}{3} \times \frac{288}{5}$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.



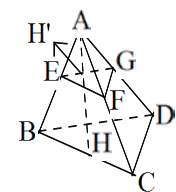
۶- در مثلث ABC، زاویه B قائمه بوده و وتر آن برابر قطر مکعب است. هرگاه طول هر ضلع

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

مکعب برابر a باشد داریم:

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این هرم می‌تواند هر قاعده‌ای داشته باشد که ما برای ساده شدن آن را مثلث القاعده فرض کردیم.

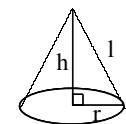


$$AH' = x, AH = h = \frac{\text{سطح قاعده کوچکتر}}{\text{سطح قاعده بزرگتر}} = \frac{12}{27} = \left(\frac{x}{h} \right)^3$$

نسبت مساحت ۲ شکل تشابه برابر مجذور نسبت تشابه ۲ شکل $\left(\frac{AH'}{AH} \right)$ می‌باشد.

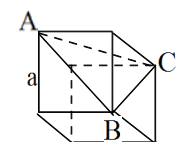
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{h} \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 8$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر h ارتفاع، r شعاع قاعده و l یال مخروط باشند داریم:



$$\left. \begin{aligned} r &= h \\ S &= \pi r l \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi r \times \sqrt{2}r = \frac{1}{3} \pi r^3 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2}r$$



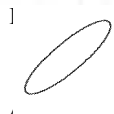
۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون سه قطر AB و BC و AC با هم مساوی و

مساوی $\sqrt{2}a$ هستند (قطرهای وجهی مکعب) لذا مثلث ABC متساوی الاضلاع

است و تمام زاویه‌های آن 60° هستند.

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\Rightarrow \pi R h = \pi R^2 h \Rightarrow R = 2$ \Rightarrow حجم = سطح جانبی

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{48}{10} = 4.8$

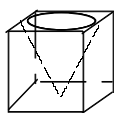


از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر آن دو مخروط ایجاد می شود.

حجم مخروط دوم + حجم مخروط اول = حجم جسم

$$\text{حجم جسم} = \frac{1}{3} \pi A H^2 \times B H + \frac{1}{3} \pi A H^2 \times C H$$

$$\text{حجم جسم} = \frac{1}{3} \pi A H^2 \times (B H + C H) = \frac{1}{3} \pi A H^2 \times B C = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4}{10}\right)^2 \times 10 = \frac{2304 \pi}{3}$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع این مخروط برابر یال مکعب و شعاع قاعده آن

برابر نصف یال مکعب می باشد.

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 (r) = \frac{9}{4 \pi} = 2.25 \pi$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سطح جانبی استوانه از رابطه $\pi R h$ بدست می آید. پس با نصف کردن ارتفاع سطح

جانبی نصف می شود و با دو برابر کردن شعاع قاعده سطح دو برابر می شود پس در مجموع سطح تغییری نمی کند در

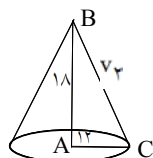
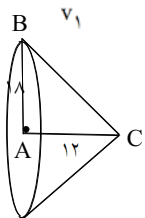
ضمن حجم استوانه از رابطه $\pi R^2 h$ بدست می آید. پس با نصف کردن ارتفاع حجم نصف می شود و با دو برابر کردن

شعاع قاعده حجم چهار برابر می شود پس در مجموع حجم دو برابر می شود.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $S = \pi R h \Rightarrow 24 \pi = \pi R \times 6 \Rightarrow R = 2$

$$\text{حجم} = \pi R^2 h \Rightarrow \text{حجم} = \pi (2)^2 (6) = 24 \pi$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در هر دو حالت یک مخروط ایجاد می شود و حجم هر مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi (12)^2 \times 18}{\frac{1}{3} \pi (18)^2 \times 12} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}$$

بدست می آید.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $a = \text{ضلع مکعب}$

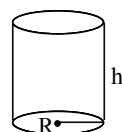
$$\text{قطر مکعب} = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 6a^2 = 6 \times \sqrt{3^2} = 6\sqrt{3^2} = 18\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هرگاه ابعاد مکعب مستطیل x و $2x$ و $3x$ باشند، داریم:

$$S = 2[(x \times 2x) + (x \times 3x) + (2x \times 3x)] = 22x^2 = 198 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$$

$$\text{حجم } V = x(2x)(3x) = 6x^3 = 162$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی استوانه برابر محیط قاعده ضربدر ارتفاع استوانه

$$(2\pi R) \times h = 24\pi \Rightarrow R = 4$$

می باشد.

$$V = \pi R^2 \times h = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی استوانه برابر حاصلضرب محیط قاعده ی آن در ارتفاع استوانه است.

$$V = \pi R^2 \times h \Rightarrow \pi R^2 \times 3 = 48\pi \Rightarrow R^2 = 16, R = 4$$

بنابراین:

$$S = (2\pi R) \times h = (2\pi \times 4) \times 3 = 24\pi$$

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



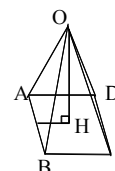
$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{11 - 22} = 7$$

$$V = \frac{1}{3} (\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع هرم} = \frac{1}{3} (8 \times 8) \times 7 = \frac{448}{3}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه OH ارتفاع هرم باشد، نقطه ی H مرکز قاعده ی

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

(مربع) می باشد.



$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{11 - 22} = 7$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم استوانه

$$24\pi = S \times 6 \Rightarrow S = 4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$2\pi R h = \pi R h = 2\pi (2) (6) = 24\pi$$

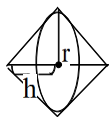
\times محیط قاعده = سطح جانبی

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴ وجهی منتظم یک هرم با وجه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع است.

$$S_{\text{کل}} = 4S_{\text{مثلث}} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع مخروط $\frac{a}{2}$ و شعاع قاعدی مخروط $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و حجم حاصل دو برابر حجم یک مخروط است.

$$V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi \times \frac{ra^2}{4} \times \frac{a}{2} \right) = \frac{\pi a^3}{4} \Rightarrow V = 16\pi$$



شکل حاصل دو مخروط از قاعده به هم چسبیده است

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$K, 2K, 3K \Rightarrow S = \text{جانبی} \quad 2(2K^2 + 3K^2 + 6K^2) = \frac{99}{2}$$

$$K^2 = \frac{99}{4 \times 11} = \frac{9}{4} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$$

$$V = 6K^3 = 6 \times \frac{27}{8} = \frac{81}{4} = 20.25$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2k, 2k, k \Rightarrow d = \sqrt{2k^2 + 2k^2 + k^2} = 3k \quad 3k = 12 \quad k = 4$$

$$8, 8, 4 \Rightarrow S_{\text{کل}} = (64 + 32 + 32) \times 2 = 256$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شکل حاصل دو مخروط از قاعده به هم چسبیده به شعاع قاعدی $H_A = 2\sqrt{3}$

و ارتفاع مخروط $h = 2 = \frac{a}{2}$ است.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \Rightarrow V = 2 \left[\frac{1}{3} \pi \times 12 \times 2 \right] = 16\pi$$

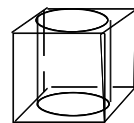
۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله ۲ رأس غیر واقع بر یک وجه برابر قطر اصلی مکعب است.

$$\alpha\sqrt{3} = 3 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3} \quad V = \alpha^3 = 3\sqrt{3}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{2} \Rightarrow d = a\sqrt{3} = \sqrt[3]{6}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر a ضلع مکعب باشد آنگاه $a\sqrt{3}$ قطر مکعب است در ضمن $\frac{a}{2}$ شعاع قاعده استوانه و



ارتفاع استوانه است. $a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (1)^2 (2) = 2\pi$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قاعده مخروط دایره‌ای به قطر یال مکعب بوده ارتفاع آن نیز با یال مکعب برابر است.

$$V = (1)^3 - \frac{1}{3} \left(\pi \times \frac{1}{4} \times 1 \right) = 1 - \frac{\pi}{12}$$

$$R = \frac{1}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

قطر کره برابر طول یال مکعب است.

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{4}{3} R = \frac{4}{3} (12) = 16$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حجم مکعب $V_1 = a^3$

$$V_2 = \text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3}{6} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi}{6}$$

قطر کره برابر طول ضلع مکعب است.

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h \Rightarrow \pi R^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$h = \frac{4}{3} R \Rightarrow h = \frac{4}{3} (15/4) = 5$$

$$S = 6a^2$$

$$S' = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 = \frac{6a^2}{2} \Rightarrow S' = \frac{S}{2}$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = 6a^2$$

$$S' = 6 \left(a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 6a^2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

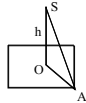
$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow V = 6\sqrt{6} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$$

حجم هرم جدا شده $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$ حجم مکعب $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$

حجم قطعه بزرگتر $= 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $2(6 + 10 + 15) = 62$ سطح کل

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = 2V \quad S' = 18 \Rightarrow \frac{x}{12} = \sqrt{\frac{18}{2V}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$x = 12\sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{6}$$

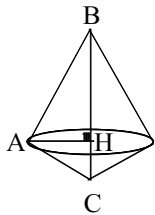
۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^3 = 8$$

$$2\pi Rh = \pi R^2 h \Rightarrow R = 2$$

۵۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم الزاویه حول وترش، دو مخروط ایجاد می شود:

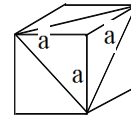


$$V = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = 4/5$$

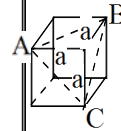
$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(4/5)^2 \times 10 = 768/125\pi$$



۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{حجم باقیمانده} = \frac{5}{6}a^3 \Rightarrow \frac{5}{6}a^3 = \frac{1}{3}a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6} \Rightarrow \frac{5}{6}a^3 = \frac{a^3}{6}$$

حجم کنج برداشته شده $= \frac{1}{3}a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$ حجم هرم $\Rightarrow \frac{5}{6}a^3 = \frac{a^3}{6}$



۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{حجم مکعب} = a^3 \quad \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}a^2 \right) \times a = \frac{1}{6}a^3$$

$$\text{نسبت دو حجم} = \frac{\frac{5}{6}a^3}{\frac{1}{6}a^3} = 5 \Rightarrow \text{حجم باقیمانده} = \frac{5}{6}a^3$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل حاصل ۲ مخروط از قاعده به هم چسبیده است.



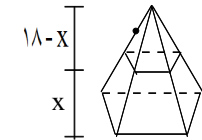
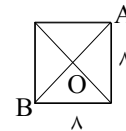
$$R = h = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \text{نصف قطر مربع}$$

$$R = h = r \Rightarrow V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right) = \frac{2}{3} \pi (r^2 \times r) = \frac{2}{3} \pi r^3$$

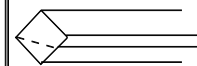
$$\frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{مساحت یک وجه} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $4\sqrt{3}$ سطح کل $\Rightarrow \sqrt{3}$

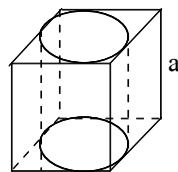
۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۴۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مقطع حاصل اضلاع موازی هم اند. دوزنقه غیرممکن است.



۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل می توان بزرگ ترین استوانه را درون مکعب قرار داد. به طوری که ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده آن مساوی نصف یال مکعب است.

$$۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴$$

$$\text{سطح کل استوانه} = ۲\pi Rh + ۲\pi R^2$$

$$\text{سطح کل استوانه} = ۲\pi\left(\frac{a}{۲}\right)(a) + ۲\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^2 = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{۲} = \frac{۳\pi a^2}{۲}$$

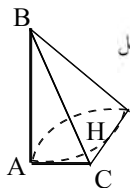
$$\text{سطح کل استوانه} = \frac{۳\pi(۴)^2}{۲} = ۲۴\pi$$

۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow ۲۴\pi = \pi R^2 (۶) \Rightarrow R^2 = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

$$S = ۲\pi Rh = ۲\pi(۲)(۶) = ۲۴\pi$$

۵۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مثلث با این اضلاع قائم الزامیه را حول وتر دوران دهیم آن گاه دو مخروط ایجاد می شود.

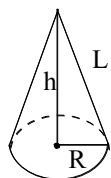


$$\text{حجم شکل حاصل} = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BH + \frac{1}{3}\pi AH^2 \times CH = \frac{1}{3}\pi AH^2 \times BC \quad (1)$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{حجم} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^2 \times (۵) = \frac{1}{3}\pi \times \frac{۱۴۴}{۵} = ۹/۶\pi$$

۵۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سطح جانبی استوانه از رابطه $۲\pi Rh$ به دست می آید پس با نصف شدن ارتفاع و دو برابر شدن شعاع قاعده سطح جانبی تغییری نمی کند و حجم استوانه از رابطه $\pi R^2 h$ به دست می آید پس با نصف شدن ارتفاع حجم نصف می شود و با دو برابر شدن شعاع قاعده حجم چهار برابر می شود پس در کل حجم دو برابر می شود بنابراین گزینه ۳ درست است.

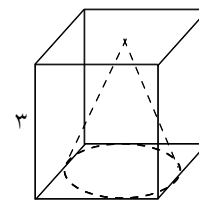


۵۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر L مولد مخروط باشد آنگاه سطح جانبی مخروط از رابطه πRL بدست می آید.

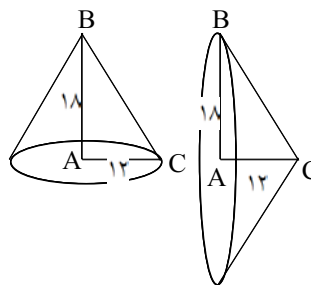
$$L^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow L^2 = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹ \Rightarrow L = ۷$$

$$\text{سطح جانبی} = \pi RL = \pi(۵)(۷) = ۳۵\pi$$

۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بزرگ ترین مخروط محاط در مکعب، ارتفاعی برابر یال مکعب دارد و شعاع قاعده آن نصف یال مکعب می باشد:



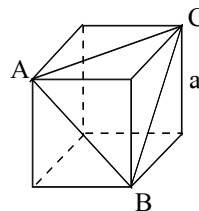
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^2 (a) = \frac{9}{4}\pi = ۲/۲۵\pi$$



۵۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل های حاصل دو مخروط می باشد:

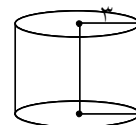
$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi AC^2 \times AB = \frac{1}{3}\pi(۱۲)^2(۱۸) \\ V_2 &= \frac{1}{3}\pi AB^2 \times AC = \frac{1}{3}\pi(۱۸)^2(۱۲) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi(۱۲)^2(۱۸)}{\frac{1}{3}\pi(۱۸)^2(۱۲)} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳}$$

۵۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $a\sqrt{۳}$ است.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{یک وجه}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a\sqrt{۳})^2}{a^2} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. شکل حاصل یک استوانه با ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۳ می باشد.



$$\text{حجم} = \pi R^2 h = \pi (3)^2 (5) = 45\pi$$

$$a, 2a, 2a \Rightarrow 2(2+2+2)a^2 = 4096 \Rightarrow a^2 = \frac{4096}{16} = 256 \Rightarrow a = 16$$

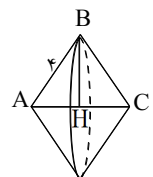
۶۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۷۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a, 2a, 3a \text{ و } 2(2a^2 + 3a^2 + 6a^2) = \frac{99}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2} \Rightarrow \text{حجم} = \frac{11}{4} = 2.75$$

۷۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. BH شعاع قاعدهی مخروط است و برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$ و ارتفاع AH برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2$ می باشد.



$$2 \text{ برابر حجم مخروط} = \text{حجم جسم حاصل} \Rightarrow 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right) = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 (2) = 16\pi$$

۷۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a^3 = 24\sqrt{3} \Rightarrow a^3 = 8 \times 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3\sqrt{3}} \Rightarrow d = a\sqrt{3} = 6$$

$$a^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \quad d = a\sqrt{3} = \sqrt{6}$$

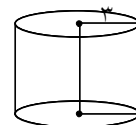
۷۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{5}{6} \text{ باقیمانده} \Rightarrow \frac{1}{3}a \times \frac{a^4}{2} = \frac{1}{6}a^5 = \frac{1}{6}V \Rightarrow \frac{5}{6} \text{ باقیمانده}$$

۷۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

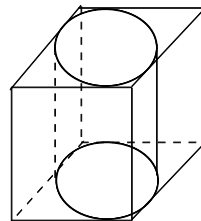
۷۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. 90° زاویهی تصویر و تصویر ارتفاع = تصویر قطر پس محور استوانه موازی صفحهی تصویر است. لذا زاویه صفر درجه است.

۶۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. شکل حاصل یک استوانه با ارتفاع ۵ و شعاع قاعده ۳ می باشد.



$$\text{حجم} = \pi R^2 h = \pi (3)^2 (5) = 45\pi$$

۶۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

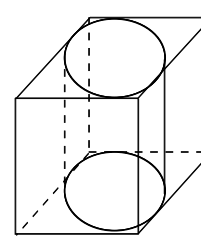


$$\text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

اگر درون مکعب بزرگترین استوانه را قرار دهیم در این صورت ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده استوانه مساوی نصف یال مکعب است.

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi(1)(2) + 2\pi(1)^2 = 6\pi$$

۶۲- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$$

اگر درون مکعب بزرگترین استوانه را قرار دهیم در این صورت ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده استوانه مساوی نصف یال مکعب است.

$$S = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi(1)(2) + 2\pi(1)^2 = 6\pi$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \text{حجم مخروط} \Rightarrow \text{حجم باقی مانده} = 1 - \frac{\pi}{12}$$

۶۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6} \quad R = \frac{1}{2} \quad \text{قطر کره} = 1$$

۶۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d_2 = \sqrt{2}d_1$$

۶۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۶۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۶۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h \Rightarrow \frac{2}{3}R = h \xrightarrow{R=12} \frac{2}{3} \times 12 = h \Rightarrow h = 8$$

۶۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{دو برابر مخروط} \quad R = 2\sqrt{3} \Rightarrow V = 2 \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \right) = 2 \left(\frac{\pi}{3} \times 4 \times 3 \times 2 \right) = 16\pi$$

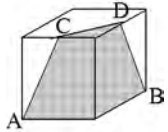
$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow \frac{1}{3} h = 1 \Rightarrow h = 3$$

۸۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{سطح جانبی} = 4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \right) = 24$$

۸۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$AB \parallel CD \Rightarrow$ دوزنقه
 $AC = BD \Rightarrow$ دوزنقه متساوی الساقین

۸۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$a, a, b \Rightarrow \sqrt{a^2 + a^2 + b^2} = 3\sqrt{11} \Rightarrow 2a^2 + b^2 = 99 \Rightarrow b = 9$$

$$\sqrt{a^2 + a^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \text{سطح کل} = 2(9 + 27 + 27) = 126$$

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{3}R = 1$$

۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

۷۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

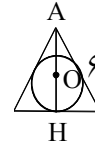
$$\text{دو برابر حجم مخروط} = \text{حجم حاصل}$$

$$\frac{4}{3} = 2 \Rightarrow \text{ارتفاع مخروط} = \frac{4}{3} = 2$$

$$\text{شعاع قاعده مخروط} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم حاصل} = 16\pi \Rightarrow 2 = 8\pi \Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 16\pi$$

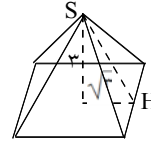
۷۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AH = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \Rightarrow OH = R = \sqrt{3}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi (3\sqrt{3})^3 = 4\pi\sqrt{3}$$

۷۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

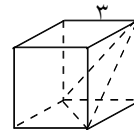


$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow h = 3$$

$$SH = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{سطح مثلث جانبی} = \frac{1}{2} (2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}) = 6$$

$$\text{سطح جانبی} = 4 \times 6 = 24$$

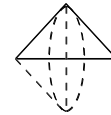
۷۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$V = \frac{1}{3} a \left(\frac{1}{2} a^2 \right) = \frac{1}{6} a^3 \Rightarrow V = \frac{1}{6} (27) = 4.5$$

۸۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{3} = \text{شعاع قاعدهی هرم} \Rightarrow \text{ارتفاع هرم} = 2 \Rightarrow \text{دو برابر حجم هرم} = \text{حجم حاصل}$$



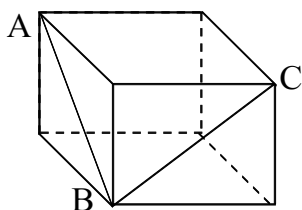
$$\text{حجم حاصل} = 2 \left(\frac{1}{3} \pi \times 12 \times 2 \right) = 16\pi$$

$$h = 2R$$

۸۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$180^\circ \Rightarrow \text{صفحه موازی محور استوانه} \Rightarrow \text{تصویر قطر} = \text{تصویر ارتفاع}$$

اشکال فضایی - سراسری



۱- شکل مقابل یک مکعب است، زاویه \widehat{ABC} چند درجه است؟

- (۱) ۱۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۰

۲- پیمانه‌ای به شکل نیمکره با شعاع داخلی ۱۲ واحد را لبریز از آب کرده در داخل استوانه‌ای با همان شعاع قاعده می‌ریزیم ارتفاع آب داخل استوانه چند واحد بالا می‌آید؟

- (۱) ۶
(۲) $\frac{7}{5}$
(۳) ۸
(۴) ۹

۳- اگر طول هر ضلع مکعب ABCDEFGH، ۱ سانتیمتر باشد و نقطه G از همه رأسها به یک فاصله باشد، اندازه GA چند سانتیمتر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۴) $\sqrt{3}$

۴- سطح جانبی مخروط دواری دو برابر سطح قاعده‌اش می‌باشد. از گسترش این مخروط بر صفحه مستوی قطاعی حاصل می‌شود، زاویه این قطاع کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{\pi}{2}$
(۳) π
(۴) $\frac{3\pi}{2}$

۵- مکعب مستطیلی به حجم ۴۸ و ابعاد a و ۲a و ۳a مفروض است مقدار a در این مکعب کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۶- حجم مکعب محیط بر کره به شعاع R کدام است؟

- (۱) $9R^3$
(۲) $8R^3$
(۳) $6R^3$
(۴) $4R^3$

۷- طول ضلع قاعده هرم منتظم و مربع القاعده‌ای $6\sqrt{2}$ سانتیمتر و اندازه یال جانبی آن ۱۰ سانتیمتر است. حجم این هرم چند سانتیمتر مکعب است؟

- (۱) ۱۶۲
(۲) ۱۷۲
(۳) ۱۸۲
(۴) ۱۹۲

۸- معادله کره‌ای که مرکز آن به مختصات (۳، ۲، ۱) و از نقطه (۲، -۱، -۲) می‌گذرد کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z = 49$
(۲) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 21$
(۳) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z = 49$
(۴) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 21$

۹- ظرفی به شکل مخروط دوار به ارتفاع ۱۲ سانتیمتر را پر از آب کرده و آن را در استوانه‌ای با همان سطح قاعده و ارتفاع ۶ سانتیمتر خالی می‌کنیم. فاصله سطح آب تا بالای استوانه چند سانتیمتر است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{2}{5}$

۱۰- اصل کاوالیری در مورد تساوی حجم دو جسم که قاعده آنها در یک صفحه باشد، بر کدام اصل قرار دارد؟

- (۱) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه موازی با یک صفحه با دو جسم.
(۲) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر صفحه موازی با یک صفحه با دو جسم.
(۳) تساوی سطح مقطع حاصل از تقاطع هر دو صفحه دلخواه با دو جسم.
(۴) تساوی محیط مقطع حاصل از تقاطع هر دو صفحه دلخواه با دو جسم.

۱۱- صفحه گذرنده بر انتهای سه یال واقع بر یک راس از مکعب آن را به دو جزء تقسیم می‌کند. حجم جزء بزرگتر چند برابر حجم جزء کوچکتر است؟

- (۱) ۵ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۶

۱۲- ارتفاع و ضلع قاعده یک هرم مربع‌القاعده به ترتیب ۸ و ۱۲ سانتیمتر است. حجم هرم ناقصی که قاعده بالای آن مقطع متوسط هرم است، چند سانتیمتر مکعب است؟

- (۱) ۳۱۲ (۲) ۳۱۶ (۳) ۳۲۸ (۴) ۳۳۶

۱۳- حجم مخروط دواری سه برابر حجم مخروط دوار دیگری است. اگر شعاع قاعده مخروط با حجم بیشتر، نصف شعاع قاعده مخروط دیگر باشد، نسبت ارتفاع‌های دو مخروط کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۴- تصویر یک مخروط بر یک صفحه مسطح، یک دایره است. زاویه‌ای که محور مخروط با صفحه تصویر می‌سازد چند درجه است؟

- (۱) صفر (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

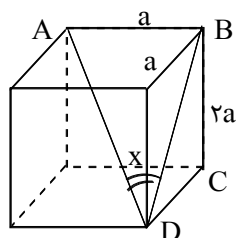
۱۵- در مخروطی که طول مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ سانتی‌متر است، کره‌ای محاط شده، حجم کره کدام است؟

- (۱) $2\pi\sqrt{3}$ (۲) $3\pi\sqrt{3}$ (۳) $4\pi\sqrt{3}$ (۴) $6\pi\sqrt{3}$

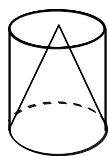
۱۶- هر مکعب چند صفحه متقارن دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۷- در شکل مقابل، مکعب مستطیلی به ابعاد a ، a و $2a$ است. تانژانت زاویه x کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{5}$



۱۸- در شکل مقابل، ارتفاع مخروط با قطر قاعده برابر است. اگر حجم مخروط $\frac{128\pi}{3}$ باشد، سطح جانبی استوانه کدام است؟

- (۱) 52π (۲) 56π (۳) 60π (۴) 64π

۱۹- صفحه‌ای موازی قاعده هرم، ارتفاع آن را نصف می‌کند. حجم هرم حاصل چه کسری از حجم هرم اولیه است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۲۰- حجم کره‌ای به شعاع R با حجم مخروطی به شعاع قاعده R برابر است ارتفاع مخروط چند برابر شعاع R است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱- عدد اندازه حجم یک کره، ۳ برابر عدد اندازه مساحت کره است. مساحت دایره عظیمه این کره کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 49π (۳) 64π (۴) 81π

۲۲- هرمی به حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر این قاعده هرم می‌گذرد قطع می‌کنیم، حجم هرم ناقص برابر است با:

- (۱) $\frac{3}{4}V$ (۲) $\frac{7}{8}V$ (۳) $\frac{8}{9}V$ (۴) $\frac{15}{16}V$

۲۳- حجم استوانه دواری به ارتفاع ۳، برابر است با 12π (واحد حجم) مساحت سطح جانبی آن برحسب واحد سطح کدام است؟

- (۱) 18π (۲) 12π (۳) 24π (۴) 36π

۲۴- حجم منشور مربع‌القاعده مایلی که طول ضلع قاعده آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجوهش مربع و وجه دیگر آن لوزی به زاویه 60° است، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{7}$ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$

۲۵- اگر راس یک مخروط را روی صفحه‌ای به موازات صفحه قاعده تغییر دهیم:

- (۱) حجم مخروط ثابت و سطح جانبی آن تغییر می‌کند (۲) حجم مخروط و سطح جانبی آن هردو ثابت می‌مانند
(۳) حجم مخروط و سطح جانبی هردو تغییر می‌کنند (۴) حجم مخروط تغییر و سطح جانبی آن ثابت می‌ماند

۲۶- طول قطر مکعبی $3\sqrt{3}$ سانتیمتر است. مساحت کل مکعب چند سانتیمتر مربع است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۲ (۳) ۴۸ (۴) ۵۴

۲۷- ارتفاع هرم مربع‌القاعده منتظمی ۷ و یک ضلع قاعده‌اش ۸ سانتیمتر است. یال هرم چند سانتیمتر است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{9}{5}$ (۳) ۸ (۴) $\frac{8}{5}$

۲۸- مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ را حول یکی از ضلعها دوران می دهیم، حجم حاصل چقدر است؟

- (۱) 12π (۲) 16π (۳) 18π (۴) 24π

۲۹- اگر شعاع قاعده یک مخروط قائم با ارتفاع آن و عدد حجم مخروط با عدد سطح جانبی آن برابر باشند، شعاع قاعده مخروط کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۳۰- سطح کل یک مکعب $18\sqrt{3}$ سانتی متر مربع است. قطر مکعب چند سانتی متر است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۳۱- اگر ضلع مکعبی $\frac{1}{6}$ شود، سطح کل آن به چه نسبتی کوچک می شود؟

- (۱) $\frac{1}{36}$ (۲) $\frac{1}{24}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۳۲- اگر سطح قاعده یک هرم ناقص به ترتیب ۱۸ و ۲۷ سانتی متر مربع و ارتفاع هرم اصلی ۱۲ سانتی متر باشد، فاصله قاعده کوچکتر از رأس هرم چند سانتی متر است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{30}$

۳۳- صفحه هر دو دایره عظیمه یک کره

- (۱) با هم موازیند (۲) بر هم عمودند (۳) در یک قطر مشترکند (۴) فاقد نقطه مشترکند

۳۴- در هرم منتظم مربع القاعده به ضلع قاعده $2\sqrt{3}$ ، ارتفاع هرم ۳ واحد است، سطح جانبی هرم کدام است؟

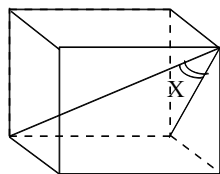
- (۱) $12\sqrt{6}$ (۲) ۱۸ (۳) ۴۲۴ (۴) $16\sqrt{3}$

۳۵- ارتفاع یک استوانه برابر با قطر دایره قاعده آن است. اگر تصویر استوانه بر صفحه یک مربع باشد، زاویه محور استوانه با صفحه تصویر چند درجه است؟

- (۱) 90° (۲) 60° (۳) 45° (۴) صفر

۳۶- قاعده یک مکعب مستطیل مربع است. اگر قطر قاعده و ارتفاع مکعب مستطیل هردو $2\sqrt{2}$ باشند، سطح جانبی مکعب مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) $14\sqrt{2}$ (۳) ۲۰ (۴) $16\sqrt{2}$



۳۷- در مکعب شکل زیر زاویه X کدام است؟

$$\begin{array}{ll} \text{ArcCos} \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (2) & \text{ArcCos} \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (1) \\ \text{ArcSin} \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (4) & \text{ArcSin} \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (3) \end{array}$$

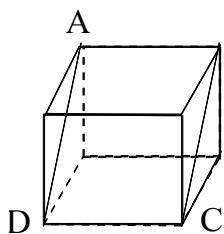
۳۸- طول یال‌های مکعب مستطیلی به ترتیب ۱ و $\sqrt{3}$ و ۲ واحد است، زاویه قطر مکعب مستطیل با یال بزرگتر چند درجه

است؟

$$30 \quad (1) \quad 45 \quad (2) \quad 60 \quad (3) \quad 90 \quad (4)$$

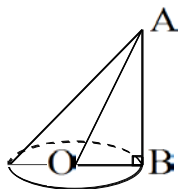
۳۹- در مکعب شکل مقابل مساحت چهارضلعی ABCD برابر $3\sqrt{2}$ است. سطح کل مکعب

چند سانتیمتر مربع است؟



$$12 \quad (1) \quad 16 \quad (2) \quad 18 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۴۰- در شکل مقابل $\widehat{AOB} = 60^\circ$ اگر $OA = 4\sqrt{3}$ ، حجم مخروط کدام است؟



$$12\pi \quad (1) \quad 16\pi \quad (2) \quad 18\pi \quad (3) \quad 24\pi \quad (4)$$

۴۱- در یک هرم منتظم مربعی، وجوه جانبی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به ضلع $3\sqrt{2}$ است. حجم هرم چند واحد مکعب

است؟

$$12 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 34 \quad (3) \quad 36 \quad (4)$$

۴۲- مساحت کل یک منشور قائم با قاعده مربع برابر ۱۸۲ واحد سطح است. اگر مجموع ارتفاع و ضلع قاعده آن ۱۰ واحد باشد ارتفاع منشور کدام است؟

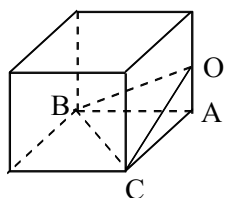
$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 7 \quad (4)$$

۴۳- سطح مقطع یک مکعب به طول یال ۶ واحد با صفحه‌ای گذرنده بر انتهای سه یال آن که در یک راس مشترک باشند چند واحد مربع است؟

$$18 \quad (1) \quad 12\sqrt{3} \quad (2) \quad 18\sqrt{3} \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۴۴- سه راس A و B و C از مکعبی را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دو راس آن از یک یال نباشد مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$



۴۵- در شکل مقابل O وسط یال مکعب است حجم هرم OABC چند برابر حجم مکعب است؟

(۲) $\frac{1}{12}$

(۱) $\frac{1}{16}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{9}$

۴۶- در داخل کره‌ای به شعاع ۶ واحد بزرگترین استوانه ممکن به ارتفاع ۸ واحد قرار دارد حجم این استوانه چند واحد مکعب است؟

(۴) 160π

(۳) 144π

(۲) 132π

(۱) 120π

۴۷- برای محاسبه سطح کره به طور مستقیم کدام اصل به کار رفته است؟

(۲) کاوالیری در مورد سطح

(۱) کاوالیری در مورد منحنی

(۴) تقسیم حجم کره به شبه‌مخروط‌های بسیار و بسیار زیاد

(۳) کاوالیری در مورد حجم

۴۸- دو منشور قائم یکسان را، که قاعده آن‌ها مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۳، در وجه بزرگتر که یک مربع است، به هم می‌چسبانیم، قطر مکعب مستطیل حاصل چند واحد است؟

(۴) ۷

(۳) $3\sqrt{5}$

(۲) ۶

(۱) $4\sqrt{2}$

۴۹- حجم یک کره به شعاع a با حجم یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۲a برابر است. طول ارتفاع مخروط کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}a$

(۳) $\frac{2}{3}a$

(۲) ۲a

(۱) a

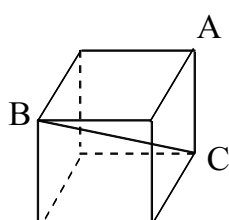
۵۰- حجم یک کره به شعاع a برابر با حجم یک استوانه به شعاع قاعده‌ی $\frac{a}{2}$ است. طول ارتفاع استوانه کدام است؟

(۴) $\frac{16a}{3}$

(۳) $\frac{14a}{3}$

(۲) ۵a

(۱) ۴a



۵۱- در مکعب شکل مقابل فاصله‌ی رأس A از قطر BC چند برابر یال مکعب است؟

(۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

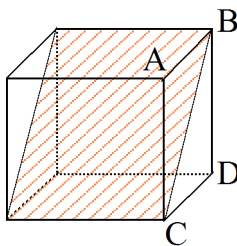
۵۲- حجم یک کره، $\sqrt{2}$ برابر حجم مخروط قائم است. اگر شعاع قاعده مخروط برابر شعاع کره باشد، فاصله رأس مخروط تا محیط قاعده آن، چند برابر شعاع قاعده است؟

(۴) $2\sqrt{13}$

(۳) $\sqrt{10}$

(۲) ۳

(۱) ۲



۵۳- در مکعب شکل مقابل، زاویه صفحه قطری سایه زده با صفحه وجه ABCD، چند درجه است؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۴۵
(۳) ۶۰
(۴) ۹۰

۵۴- در داخل نیم کره به قطر $2\sqrt{3}$ بزرگترین منشور قائم با قاعده‌ی مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{3}$ است، حجم منشور کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) ۲

۵۵- مخروطی به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

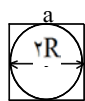
- (۱) $\frac{2\pi}{3}$
(۲) π
(۳) $\frac{4\pi}{3}$
(۴) 2π

۵۶- در یک چهاروجهی منتظم، از وسط هر یال آن صفحه‌ای موازی وجه مقابل می‌گذرانیم، تا ۴ هرم کوچک‌تر، از چهاروجهی مفروض جدا کند. حجم جسم باقی‌مانده چند برابر حجم چهاروجهی اولیه است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

۵۷- قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال کوچک‌تر آن چند درجه است؟

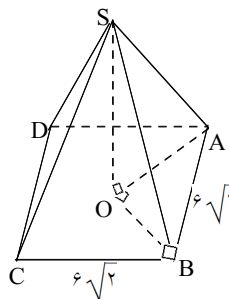
- (۱) ۱۵
(۲) ۳۰
(۳) ۴۵
(۴) ۶۰



۶- وقتی مکعبی محیط بر کره است کره در مکعب محاط است بنابراین فاصله دو وجه روبروی مکعب از هم برابر قطر کره است پس طول اضلاع مکعب $2R$ است. حجم مکعب به ضلع $2R$ برابر است با:

$$V = (2R)^3 = 8R^3$$

پس گزینه ۲ صحیح است.



۷- یادآوری: حجم هرمی با مساحت قاعده S و ارتفاع h برابر است با $V = \frac{1}{3} S \cdot h$

در هر هرم منظم، ارتفاع وارد بر قاعده از مرکز قاعده می‌گذرد.

O مرکز قاعده و محل تلاقی اقطار مربع است، پس OA نصف قطر مربع است:

$$(2OA)^2 = AB^2 + BC^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 144 \Rightarrow$$

$$2OA = AC = 12 \Rightarrow OA = 6$$

از طرفی SOA یک مثلث قائم‌الزاویه است:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow SO = 8$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} (AB)^2 \times SO = \frac{1}{3} (6\sqrt{2})^2 \times 8 = 192$$

پس:

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۸- می‌دانیم معادله کره به مرکز (α, β, γ) و شعاع R برابر است با $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$ جایگذاری نقطه $(2, -1, -2)$ در معادله کره خواهیم داشت:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = R^2 \Rightarrow (2 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 + (-2 - 3)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = 35$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 21$$

پس معادله کره پس از ساده شدن بصورت مقابل می‌باشد:

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۹- می‌دانیم حجم مخروط با سطح قاعده S و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ و حجم استوانه با سطح قاعده S و ارتفاع h برابر $V = S \cdot h$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{1}{3} S \cdot h = S \cdot h' \Rightarrow h' = \frac{h}{3}$$

حجم آب در هر دو یکسان است و چون مخروط پر از آب است بنابراین حجم آب با حجم مخروط برابر است پس:

$$2S = S \cdot h' \Rightarrow h' = 4$$

استوانه تا ارتفاع ۴ شامل آب است و چون ارتفاع استوانه ۶ سانتیمتر است بنابراین فاصله سطح آب تا بالای استوانه برابر $6 - 4 = 2$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰- یادآوری: اصل کاوالیری: «هرگاه قاعده‌های دو جسم در یک صفحه باشند و ارتفاع آن دو جسم یکسان باشد و هر

صفحه موازی قاعده بر روی اجسام، مقاطع هم مساحت ایجاد کند دو شکل هم حجم می‌باشند.» طبق این اصل گزینه

۱ صحیح می‌باشد.

جواب اشکال فضایی - سراسری

۱- AB، AC و BC هر کدام قطرهای وجه مکعب بوده و در نتیجه طول هر ۳ پاره خط باهم برابر است لذا مثلث ABC متساوی الاضلاع بوده و زاویه \widehat{ABC} برابر 60° خواهد بود. بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲- ارتفاع استوانه را h فرض می‌کنیم.

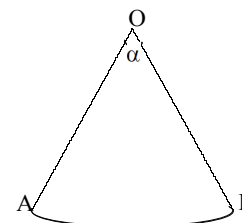
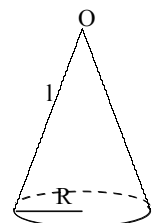
$$\left. \begin{aligned} V_{\text{نیمکره}} &= \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi (12)^3 \\ V_{\text{استوانه}} &= \pi R^2 h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3} \pi (12)^3 = \pi \times (12)^2 \times h \Rightarrow 8\pi = \pi h \Rightarrow h = 8$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳- چون G از همه رأسها به یک فاصله است، پس G محل برخورد قطرهای مکعب می‌باشد و در نتیجه:

$$\text{نصف طول قطر} = GA = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۴- طبق شکل داریم:

$$S = \pi R \cdot l \quad \text{مساحت جانبی مخروط دوار}$$

$$S' = \pi R^2 \quad \text{مساحت قاعده مخروط دوار}$$

$$S = 2S' \Rightarrow \pi R \cdot l = 2\pi R^2 \Rightarrow l = 2R \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} &= OA \cdot \alpha \\ OA &= l \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = l \cdot \alpha \quad (\alpha \text{ رادیان})$$

این قطاع از گسترش مخروط دوار فوق بدست آمده است. پس اندازه کمان \widehat{AB} برابر با محیط قاعده مخروط است، یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} &= 2\pi R \\ \widehat{AB} &= l \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi R = l \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi R}{l} \quad (2)$$

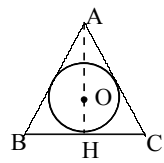
$$(1): l = 2R$$

زاویه قطاع حاصل π رادیان است و گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۵- حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب سه بعد آن بنابراین:

$$3a \cdot 2a \cdot a = 48 \Rightarrow 6a^3 = 48 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

پس گزینه ۲ صحیح است.



۱۵- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز دایره محاطی مرکز ثقل مثلث است بطوریکه همواره فاصله آن تا ضلع مقابلش $\frac{1}{3}$ طول ارتفاع مثلث است.

مطابق شکل، مخروط و کره محاط شده در آن از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره محاطی آن حول ارتفاع AH ایجاد می‌شود. در نتیجه شعاع کره برابر با $OH = \frac{1}{3}AH$ می‌باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow AH^2 = 36 - 9 \Rightarrow AH = 3\sqrt{3} \Rightarrow R = OH = \sqrt{3}$$

حجم کره مورد نظر برابر است با:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۶- صفحه قطری هر مکعب، صفحه تقارن آن است. هر مکعب ۶ قطر دارد پس شش صفحه قطری دارد. همچنین مکعب نسبت به صفحات عمود متصف هم تقارن است (صفحاتی که بر وجههای روبرو عمود بوده و از مرکز قاعده‌های آنها می‌گذرند) که تعدادشان ۳ می‌باشد. بنابراین هر مکعب ۹ صفحه تقارن داشته و گزینه ۴ صحیح است.

۱۷- با توجه به شکل، یال AB عمود بر وجه مقابل خود و در نتیجه عمود بر BD است. یعنی مثلث ABD در رأس B قائمه است، بنابراین $\tan x = \frac{AB}{BD}$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:

$$BD^2 = (a\sqrt{5})^2 + a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{5} \Rightarrow \tan x = \frac{a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

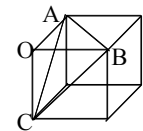
۱۸- اگر شعاع قاعده مخروط R فرض شود، ارتفاع مخروط ۲R خواهد بود. از طرفی حجم مخروط برابر $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{128}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi R^2 (2R) \Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = 2R = 8$$

بنابراین حجم جانی استوانه برابر است با:

$$S = \pi R \cdot h = \pi \times 4 \times 8 \Rightarrow S = 32\pi$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



۱۱- هرگاه صفحه‌ای از نقاط A، B و C بگذرد جزء کوچکتر (OABC) یک هرم می‌باشد. می‌دانیم حجم هرم با سطح مقطع S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

مساحت مقطع هرم اگر طول ضلع مکعب را a بگیریم مساحت یک وجه مکعب (AOB) و h ارتفاع هرم مذکور (CO) برابر ضلع مکعب می‌باشد پس داریم:

$$\begin{cases} h = a \\ S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{1}{6}a^3, V_{\text{مکعب}} = a^3 \Rightarrow V_{\text{جزء بزرگتر}} = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3 \end{cases}$$

پس حجم قسمت بزرگتر ۵ برابر حجم هرم است. یعنی گزینه ۱ صحیح است.

۱۲- اگر در یک هرم صفحه‌ای موازی قاعده رسم کنیم آنرا به یک هرم کوچکتر و یک هرم ناقص تبدیل می‌کند و هرم کوچکتر همواره با هرم اولیه متشابه است. نسبت حجم دو شکل متشابه برابر مکعب نسبت متشابه آنها است حال اگر

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

V_1 حجم هرم اولیه و V_2 حجم هرم کوچکتر باشد. داریم:

$$\text{حجم هرم ناقص برابر است با: } V_1 - V_2 = V_1 - \frac{1}{8}V_1 = \frac{7}{8}V_1$$

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

می‌دانیم حجم هرمی به ارتفاع h و مساحت قاعده S برابر است با:

بنابراین حجم هرم اولیه با قاعده مربع برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(12 \times 12) \times 8 = 384 \Rightarrow V_{\text{هرم ناقص}} = \frac{7}{8} \times 384 = 336$$

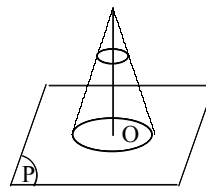
پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۳- می‌دانیم حجم مخروط دوار به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر است با مساحت قاعده آن در ثلث ارتفاع یعنی

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \text{ و طبق فرض سوال داریم } R_1 = \frac{1}{2}R_2, V_1 = 2V_2 \text{ با جایگذاری داریم:}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 \times h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 \times h_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_2}\right)^2 \times \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{4} \times \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = 8$$

پس گزینه ۱ صحیح است.



۱۴- می‌دانیم که اگر صفحه P عمود بر محور مخروط باشد، مقطع حاصل دایره خواهد بود بطوریکه مرکز آن دایره روی محور مخروط و تصویر و مولد دلخواه، شعاع دایره است. چون تصاویر بر روی صفحات موازی، برابر یکدیگرند، پس تصویر یک مخروط وقتی سطح دایره را می‌پوشاند که صفحه تصویر عمود بر محور مخروط باشد و یا به عبارت دیگر زاویه مخروط با صفحه تصویر 90° باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

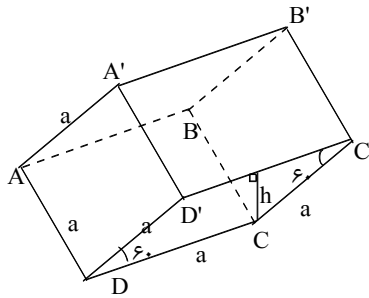
۲۳- حجم استوانه با شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر با $V = \pi R^2 h$ می باشد. پس:

$$V = \pi R^2 \times 3 = 12\pi \Rightarrow R = 2$$

$$S = 2\pi \times 2 \times 3 = 12\pi$$

مساحت جانبی استوانه برابر با $S = 2\pi R h$ می باشد، پس:

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.



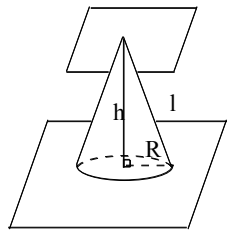
۲۴- ABCD قاعده و مربع است. همچنین A'B'C'D' نیز مربع می باشد و CDD'C' لوزی با زاویه ۶۰ درجه است. ارتفاع منشور برابر با ارتفاع لوزی است، پس:

$$h = a \sin 60 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S = a^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 = S_{ABCD} \quad \text{مساحت قاعده منشور:}$$

$$V = h \cdot S \Rightarrow V = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{حجم منشور برابر است با:}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



۲۵- حجم مخروط بصورت $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ و سطح جانبی آن $S = \pi R l$ می باشد.

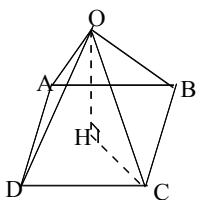
با تغییر رأس مخروط روی صفحه موازی با صفحه قاعده h ثابت می ماند، چون دو صفحه موازی هستند لذا فاصله بین آنها که طبق تعریف فاصله یک نقطه از یکی تا صفحه دیگر است همواره ثابت بوده و برابر مقدار h است. پس حجم ثابت می ماند ولی l تغییر می کند، پس سطح جانبی تغییر خواهد کرد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 3$$

$$S = 6a^2 = 6 \times 9 = 54$$

۲۶- می دانیم طول قطر مکعبی به ضلع a برابر با $a\sqrt{3}$ است، پس:

مساحت کل مکعب به ضلع a برابر است با $6a^2$ (۶ مربع مساوی به مساحت a^2)
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.



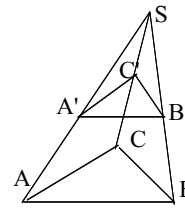
۲۷- از آنجا که هرم مربع القاعده و منتظم است، پس ارتفاع هرم بر مرکز مربع فرود می آید. لذا مثلث OHC یک مثلث قائم الزاویه ای است که ضلع CH در آن، نصف قطر مربع است.

پس:

$$\left. \begin{aligned} CH &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}a) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \times 4 = 2\sqrt{2} \\ OH &= v \end{aligned} \right\} \Rightarrow OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow$$

$$OC^2 = 4 + 16 \times 2 = 81 \Rightarrow OC = 9$$

طول یال هرم برابر ۹ سانتیمتر است. بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.



۱۹- نسبت مساحت های شکل های متشابه برابر توان دوم و نسبت حجم های شکل های متشابه برابر با توان سوم نسبت متشابه می باشد. از طرفی صفحه ای که موازی قاعده هرم، آن را قطع می کند، یک هرم متشابه با هرم اولیه ایجاد می کند، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S'}{S} &= K^2 \\ \frac{h'}{h} &= K \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3}S' \cdot h'}{\frac{1}{3}S \cdot h} = \frac{S'}{S} \times \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{V'}{V} = K^3$$

در این پرسش $K = \frac{1}{8}$ پس $\frac{V'}{V} = \frac{1}{8}$. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۰- حجم کره به شعاع R برابر با $\frac{4}{3}\pi R^3$ و حجم مخروط به شعاع قاعده R و ارتفاع h برابر با $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ است بنا به فرض:

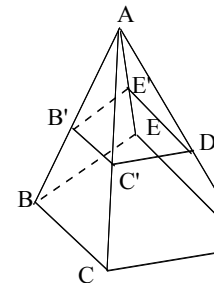
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = 4R \Rightarrow \frac{h}{R} = 4$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۱- دایره عظیمه هر کره دایره ای است که شعاع آن با شعاع کره برابر می باشد و مرکز آن نیز بر مرکز کره منطبق می باشد.

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = 3 \times \frac{4}{3}\pi R^2 \Rightarrow R = 9 \Rightarrow S_{\text{دایره عظیمه}} = \pi R^2 = 81\pi$$

گزینه ۴ صحیح است.



۲۲- یادآوری: ۱- هرگاه صفحه ای موازی قاعده هرم رسم شود آن را به ۲ هرم متشابه با رأس مشترک تبدیل می کند. ۲- نسبت حجم دو هرم متشابه با توان سوم نسبت ارتفاع های آنها برابر است.

صفحه ای که موازی قاعده هرم می گذرد و یال های هرم را قطع می کند، هرم اصلی را (هرم ABCDE) به یک هرم ناقص و یک هرم کامل (هرم A'B'C'D'E') تقسیم می کند. برای هرم A'B'C'D'E' داریم:

$$\frac{V_{A'B'C'D'E'}}{V_{ABCDE}} = \left(\frac{\text{ارتفاع هرم } A'B'C'D'E'}{\text{ارتفاع هرم } ABCDE} \right)^3$$

اگر حجم هرم A'B'C'D'E' را V' و ارتفاع آن را h' بگیریم، و چون صفحه از وسط ارتفاع هرم اصلی گذشته پس

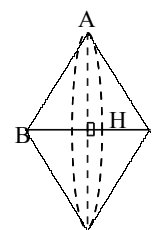
$$\frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V' = \frac{1}{8}V$$

$h' = \frac{1}{2}h$ است و داریم:

$$\text{حجم هرم ناقص} = V - V' = V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.

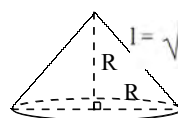
۲۸- هرگاه مثلث ABC را حول ضلع BC دوران دهیم A روی دایره‌ای به مرکز H و شعاع AH و در صفحه‌ای عمود بر BC حرکت می‌کند. بنابراین شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که در قاعده مشترک هستند. یال هر مخروط، ضلع مثلث و شعاع قاعده آن ارتفاع مثلث و ارتفاع آن (BH) نصف ضلع مثلث است. می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده ضربدر ارتفاع آن، پس:



یادآوری: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نظیر هر ضلع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول ضلع مثلث است.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{کل}} &= 2 \times \frac{1}{3} (\pi (AH)^2) CH \\ AH &= \frac{\sqrt{3}}{2} a = 2\sqrt{3} \\ CH &= \frac{1}{2} a = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2 \times \sqrt{3})^2 \times 2 = 16\pi$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.



۲۹- می‌دانیم حجم و سطح جانبی مخروط قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده R و طول یال l به قرار زیر است:

در این مسئله داریم $R = h$ و جانبی $V = S$ و با توجه به شکل $l = \sqrt{2}R$ ، بنابراین:

$$V = S_{\text{جانبی}} \Rightarrow \frac{1}{3} \pi R^2 h = \pi R l \Rightarrow \frac{1}{3} R^3 = \sqrt{2} R^2 \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

لذا گزینه ۳ جواب صحیح است.

۳۰- هر مکعب ۶ سطح دارد و اگر طول هر ضلع مکعب a باشد، داریم:

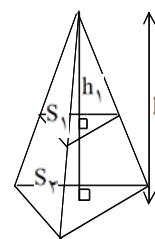
$$S = 6a^2 = 18\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} \Rightarrow a = \sqrt[4]{27}$$

$$\text{قطر مکعب} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \text{قطر مکعب} = \sqrt{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{27^3} = 3\sqrt[4]{3}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{36a^2} = \frac{1}{36}$$

لذا گزینه ۱ درست است.

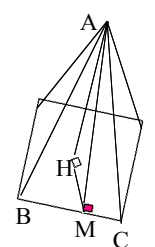


۳۲- می‌دانیم در دو هرم متشابه نسبت مساحت‌های قاعده با مجذور نسبت ارتفاع‌های آنها برابر است. در دو هرم (مطابق شکل) که متشابه هستند (چون قاعده‌ها موازی هستند) داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{h_1^2}{h_2^2} = \frac{18}{27} \Rightarrow h_1^2 = \frac{18 \times 144}{27} = 96 \Rightarrow h_1 = 4\sqrt{6}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۳- می‌دانیم صفحه گذرنده از دایره عظیمه یک کره از مرکز آن عبور می‌کند، پس تمام صفحات از یک نقطه یعنی مرکز کره عبور می‌کنند. در ضمن اشتراک هر دو صفحه متقاطع همواره خط است بطوریکه این خط از مرکز کره عبور می‌کند. لذا هر دو صفحه گذرنده از مرکز کره در قطری از کره مشترکند پس گزینه صحیح گزینه ۳ می‌باشد.

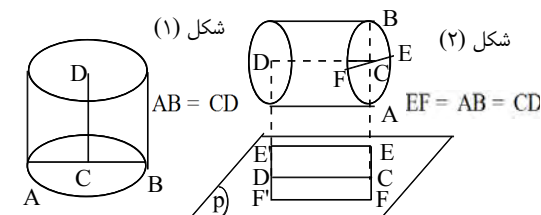


۳۴- طبق شکل زیر AM بر روی وجه ABC می‌باشد HM فاصله مرکز مربع تا ضلع مربع است که برابر نصف ضلع مربع است. برای محاسبه AM در مثلث AHM داریم:

$$AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 4S_{ABC} = 4 \times \frac{1}{2} AM \times BC = 4 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{12} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{36} = 24$$

پس گزینه ۳ صحیح است.



۳۵- استوانه را طبق شکل ۱ در نظر می‌گیریم، اگر استوانه را 90° بچرخانیم داریم: (شکل ۲)، مشاهده می‌شود شکل EFFE' مربع می‌باشد یعنی زاویه استوانه با صفحه صفر می‌باشد و محور استوانه موازی صفحه p است و گزینه ۴ صحیح است.

۴۰- می دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}$ مساحت قاعده در ارتفاع آن.

$$\sin(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \Rightarrow OB = \sqrt{OA^2 - AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

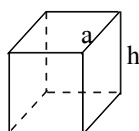
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}(\pi OB^2) \cdot AB = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} OH^2 &= OC^2 - CH^2 \\ CH &= \frac{\sqrt{3}}{2} BC \text{ (نصف قطر مربع)} \\ OC &= BC \end{aligned} \right\} OH^2 = OC^2 - \frac{1}{4}OC^2 = \frac{3}{4}OC^2 = \frac{3}{4}(2\sqrt{2})^2 = 6 \Rightarrow OH = \sqrt{6}$$

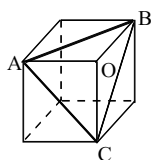
$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع هرم} = \frac{1}{3}BC^2 \times OH = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{6} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$



۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مساحت وجه‌های جانبی + مساحت قاعده $2 \times$ مساحت کل منشور

$$2a^2 + 2a \times h = 182 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ah = 91 \\ a + h = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+h)^2 - h^2 = 91 \Rightarrow 100 - h^2 = 91 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

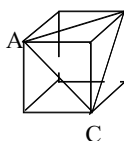


۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه سطح مقطع مورد نظر مثلث \widehat{ABC} باشد، مطابق شکل اضلاع این مثلث قطره‌های وجوه مکعب می‌باشند، پس داریم:

$$AB = \sqrt{2}AO = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

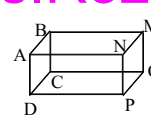
چون \widehat{ABC} متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و هر ضلع آن $a\sqrt{2}$ می‌باشد.

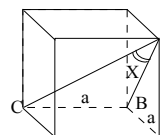
$$S_{ABC} = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{\text{یک وجه}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳۶- چون قطر قاعده مکعب $\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$ است و همچنین قاعده مربع می‌باشد پس طول ضلع آن با استفاده از رابطه فیثاغورث برابر $a = 2$ می‌شود. حال سطح جانبی بروش زیر محاسبه می‌شود.

$$BM = 2\sqrt{2} \Rightarrow S = 2S_{ABMN} + 2S_{ADPN} = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} + 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



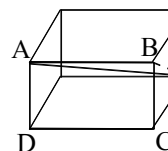
$$AB^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}a$$

۳۷- می‌دانیم هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود است. BC بر صفحه مستطیلی که AB قطری از آن است عمود است در نتیجه بر AB نیز عمود است لذا $\widehat{ABC} = 90^\circ$ بنابراین:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \cos x = \frac{AB}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.



۳۸- هرگاه AM قطر مکعب مستطیل و AB یال بزرگتر آن باشد داریم:

$$BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\widehat{ABM} = 90^\circ \Rightarrow \sin \widehat{BAM} = \frac{BM}{AM} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{BAM} = 45^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۳۹- AD قطر فرعی مکعب بوده و طول آن برابر است با: $\sqrt{2}AB$

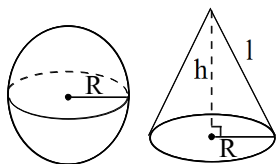
۴ ضلعی $ABCD$ مستطیل است لذا داریم:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = AB \times \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AB^2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{مکعب}} = 6AB^2 = 6(\sqrt{3})^2 = 18$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{2} \times \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow h = \sqrt{2}R$$

$$l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + 2R^2} = \sqrt{3}R \Rightarrow \frac{l}{R} = \sqrt{3}$$

۵۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

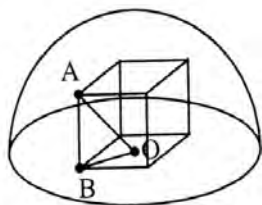
۵۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} OB = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ OA = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$$

$$= \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{9 - 3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

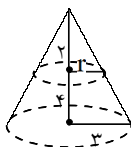
ارتفاع \times (مساحت مربع) = حجم منشور

$$= \left(\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{9}{4}$$



$$\frac{r}{3} = \frac{2}{6} \Rightarrow r = 1$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$



۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر هر ضلع چهاروجهی منتظم $2a$ باشد، آنگاه هر ضلع ۴ چهاروجهی منتظم

کوچکتر a خواهد بود. در ضمن حجم چهاروجهی منتظم به ضلع a از رابطه $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ به دست می آید.

$$\text{حجم چهاروجهی اولیه} = \frac{\sqrt{3}}{12} (2a)^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$$

$$\text{حجم یک هرم کوچک تر} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3 \Rightarrow \text{حجم چهار هرم} = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$$

$$\text{حجم جسم باقی مانده} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} a^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} a^3$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{r} \right) \left(\frac{a}{r} \right) = \frac{a^3}{12r}$$

$$V = a^3$$



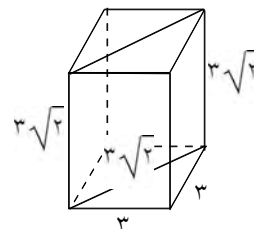
$$r^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

$$V = \pi (2\sqrt{5})^2 \times 1 = 160\pi$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معکب مستطیل حاصل به ابعاد ۳ و ۳ و $3\sqrt{2}$ می باشد.



$$\text{قطر} = \sqrt{9 + 9 + 18} = 6$$

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}(\pi(2a)^2 \cdot h)$$

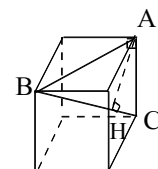
۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 h \Rightarrow h = a$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \pi \left(\frac{a}{r} \right)^2 h \Rightarrow \frac{4}{3}a^3 = \frac{a^2 h}{r} \Rightarrow h = \frac{4}{3}a$$

۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



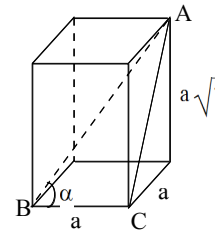
با توجه به رابطه فیثاغورث در مثلث ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)

$$AC = a \text{ و } BC = a\sqrt{2} \text{ و } AB = a\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \Rightarrow \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

۵۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مثلث \widehat{ABC} قائم‌الزاویه است.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$