

تهیه کننده:

حامد مظاهری

شما هم می توانید مقالات خود را به ما ارسال کنید

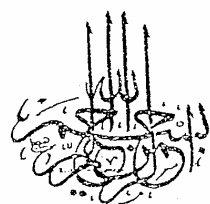
تا با نام شما در سایت قرار داده شود

Hamed@ir-micro.com

www.ir-micro.com

مرجع فارسی
میکروکنترلرهای PIC





نمونه سؤالات درس

ریاضی عمومی (۱)

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

به همراه پاسخ تشریحی



ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

پاسخ در صفحه ۱۱

۱- معادله‌ی $z^4 + z^2 + 1 = 0$ را در اعداد مختلط حل کنید.

۲- فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه‌ی $[a, b]$ باشد. همچنین برای $x \in (a, b)$ داشته باشیم: $f'(x) = 1$. به کمک قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ) ثابت کنید:

$$f(x) = x - a + f(a)$$

۳- هریک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

ب)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \Delta \cos x}$$

۴- در همگرایی یا واگرایی انتگرال زیر بحث کنید.

$$\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{\frac{1}{2}} x}$$

۵- طول منحنی $y = \int_0^x \sqrt{3 + 4 \cos(2t)} dt$ را در فاصله‌ی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ به دست آورید.

۶- با تغییر متغیر $t = \frac{\pi}{4} - x$ حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

۷- فاصله‌ی همگرایی سری زیر را به دست آورید و در نقاط کرانه‌ای بحث کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2^n}$$

۸- هریک از حدود زیر را به دست آورید.

الف)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{j}{n}\right)$$

ب)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$



ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

پاسخ در صفحه ۱۴

۱- اگر $z = \frac{-\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})}{-\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})}$ ، عدد صحیح n را طوری بیابید که z^n عددی حقیقی باشد.

۲- الف) نشان دهید معادله $xe^x = 2$ در فاصله $[0, 1]$ فقط یک ریشه دارد.

ب) بسط مکلورن تابع $f(x) = \frac{x}{1+x}$ را بیابید.

۳- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \tan(t^2) dt}{x^2}$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right]$

۴- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

ب) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$

ج) $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$

۵- در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر بحث کنید.

الف) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ب) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$

۶- طول قوس منحنی $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ که $1 \leq x \leq e$ را حساب کنید.

۷- در مورد همگرایی و واگرایی سری‌های زیر بحث کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n (2n-1)}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(1+n)}$

میان ترم دوم ۸۲-۱۳۸۳
پاسخ در صفحه ۱۸

۱- صورت مثلثاتی عدد مختلط $z = (i+1)i$ را به دست آورید. مقدار n را طوری پیدا کنید که $z^n \cdot \sqrt{i}$ موهومی محض باشد.

$$y = f(x) = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$$

۲- فرض کنیم تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است:

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0$$

y' و y'' را حساب کنید و نشان دهید:

۳- مقدار A و B را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در مبدأ پیوسته شود.

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \arctan x)^{\frac{1}{2}} + A & x < 0 \\ B & x = 0 \\ \frac{2 \tan(1 - \cos x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}} & x > 0 \end{cases}$$

۴- نمودار تابع $y = f(x) = e^{-x^2}$ را رسم کنید و نقاط عطف را مشخص کنید. اکستریم نسبی را بیابید. نشان دهید اگر قاعده مستطیلی روی محور x ها و دو رأس آن روی منحنی بالا باشد، آنگاه مستطیل در صورتی مساحت ماکزیمم دارد که دو رأس آن منطبق بر نقاط عطف نمودار باشد.

۵- انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$

ب) $\int (\sqrt{x} + 1) \arctan x dx$



ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

پاسخ در صفحه ۲۱

۱- معادله $z^6 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$ را در میدان اعداد مختلط \mathbb{C} حل کنید.

۲- قضیه رُل را بیان و اثبات کنید.

۳- نشان دهید تابع $f(x)$ با ضابطه روبرو در نقطه $x_0 = \frac{1}{p}$ پیوسته و در مابقی نقاط اعداد حقیقی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

۴- انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x dx$

ب) $\int \frac{dx}{a^y \cos^y x + b^y \sin^y x}$

ج) $\int \frac{x dx}{(x-1)^y (x^y+1)}$

د) $\int \tan^{-1} \sqrt{x+1} dx$

۵- طول نمودار تابع $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cosh t} dt$ را در فاصله $x=0$ و $x = \ln 2$ حساب کنید.

۶- مساحت سطح حاصل از دوران دایره $x^2 + (y-4)^2 = 1$ حول محور $y=0$ را به دست آورید.

۷- حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{\ln^2 x}$

ب) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{kn}{(ki)^y + n^y} \right) \right]$

۸- همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

ترم دوم ۸۰-۱۳۷۹

پاسخ در صفحه ۲۵

۱- معادله $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید. اگر z_1 و z_2 و ... و z_6 ریشه‌های معادله‌ی فوق باشند آنگاه مقادیر $\text{Im}(z_1 z_2 \dots z_6)$ و $\text{Im}(z_1 + z_2 + \dots + z_6)$ را بیابید.

۲- الف) قضیه‌ی مقدار میانگین را بیان کنید. (بدون اثبات)

ب) هرگاه برای تابع حقیقی f شرط $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ به ازای هر x و y حقیقی درست باشد آن‌گاه ثابت کنید f یک تابع ثابت است.

۳- حدود زیر را بیابید:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 e^x}{x^2 - 1} \int_1^x \frac{\sin(\frac{\pi}{4} t)}{t} dt$$

$$\text{ب) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-2} [e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \dots + ne]$$

۴- طول قوس منحنی به معادله‌ی $9x^2 = 4y^3$ را از نقطه‌ی $A(0,0)$ تا $B(2\sqrt{3}, 3)$ بیابید.

۵- حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به محورهای مختصات و خط $y = \ln 2$ و منحنی $x = \text{sech}(y)$ حول خط $x = -1$ را بیابید.

۶- انتگرال‌های زیر را حل کنید:

$$\text{الف) } \int \frac{\cos x + 2 \sin x}{2 \sin x + 2 \cos x} dx$$

$$\text{ب) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[(\cos x) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(x^2) \right] dx$$

۷- همگرایی یا واگرایی سری زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

۸- دامنه‌ی همگرایی تابع f که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود را بیابید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln x} + \frac{x^n}{n!} \right)$$



ترم دوم ۷۹-۱۳۷۸

پاسخ در صفحه ۲۹

۱- نشان دهید که اگر $|z|=1$ و $|w|=1$ و $\bar{z}w \approx 1$ آنگاه:

$$\left| \frac{z-w}{-\bar{z}w} \right| = 1$$

۲- قضیه مقدار میانگین را بیان و اثبات کنید و سپس نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2} \quad (x > 0)$$

۳- حدود زیر را بیابید:

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1 + \cos \frac{k\pi}{n}}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\sin x} \sec t dt}{x^2 \ln(1+x)}$

۴- انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$

ب) $\int \frac{\cos x dx}{1 - \cos x}$

ج) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

۵- همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_1^{\infty} e^{-x} \ln x dx$ را تعیین کنید.

۶- مطلوب است طول قوس منحنی $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ ، $1 \leq y \leq e$

۷- همگرایی یا واگرایی فقط یکی از سری‌های زیر را به دلخواه تعیین کنید:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

۸- بازه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2 - n + 1}$ را تعیین کنید. (در نقاط مرزی بحث کنید)

ترم اول ۷۸-۱۳۷۷

۱- الف) نشان دهید هرگاه α یک ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $\bar{\alpha}$ نیز یک ریشه معادله است.

ب) هرگاه $z_1 = i$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ باشد سایر ریشه‌ها را تعیین کنید.

۲- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{n}} \right)^n$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{2n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n+n)^2} \right]$

۳- ابعاد بزرگترین مستطیلی را تعیین کنید که در داخل نیم دایره‌ای به شعاع ۲ واقع گردد.

۴- معادله $\tanh x + x = 0$ دارای چند ریشه است.

۵- انتگرالهای نامعین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

ب) $\int (\arcsin x)^2 dx$

۶- در همگرایی یا واگرایی انتگرال غیر عادی زیر بحث کنید.

$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$

۷- الف) ثابت کنید هرگاه $f(x)$ یک تابع پیوسته در فاصله $[a, b]$ بوده و برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ در این صورت } F'(x) = f(x).$$

ب) نشان دهید اگر $f(x)$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، $F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ ثابت است.

۸- رفتار سری زیر را بررسی کنید.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

۹- دامنه همگرایی تابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$ را مشخص کنید.



ترم دوم ۷۶-۱۳۷۵

۱- معادله $z^4 = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$ را حل کنید.

۲- ثابت کنید اگر $0 < a < b$ ، آنگاه $(\frac{b}{a})^a < e^{b-a} < (\frac{b}{a})^b$ و نتیجه بگیرید:

$$\forall x > 0 : (1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$$

۳- مطلوبست محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

۴- مشتق پذیری تابع زیر را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

۵- انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$

ب) $\int \frac{x^x dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

۶- حجم حاصل از دوران ناحیهی محصور به منحنی های $y = \cosh x$ و $y = 2$ را حول خط $y = -1$ محاسبه کنید.

۷- همگرایی یا واگرایی سری های عددی زیر را مشخص کنید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$

۸- فاصله همگرایی سری توانی زیر را بدست آورید. در نقاط مرزی بحث کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$



ترم دوم ۷۴-۱۳۷۳

۱- حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

ب) $\lim_{n \rightarrow 0} e^{\tan x \ln(\sin x)}$

۲- الف) قضیه مقدار میانگین را بیان و اثبات کنید.

ب) تاساوی زیر را با کمک (الف) نشان دهید.

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

۳- انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$

ب) $\int \sin 2\theta - \ln(\sin \theta) d\theta$

پ) اگر $F(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x} dx$ ، انتگرال نامعین زیر را با استفاده از روش جزء به جزء بیابید.

$$\int F(x) dx$$

۴- ریشه‌های عدد مختلط زیر را بیابید.

$$z^5 = \left(\frac{1+i}{-\sqrt{2}+i} \right)$$



پاسخ نمونه سؤالات

ترم اول ۸۵-۱۳۸۴

سؤال در صفحه ۲

-۱

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \Rightarrow (z^2 + \frac{1}{z})^2 + \frac{z^2}{z} = 0 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} z_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1^2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{2\pi}{3})i \\ z_2^2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \cos(\frac{2k\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{2k\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})i & k = 0, 1 \\ z_2 = \cos(\frac{2k\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}) + \sin(\frac{2k\pi}{2} + \frac{4\pi}{3})i & k = 0, 1 \end{cases}$$

چنانچه ریشه‌های معادله را با w_0, w_1, w_2, w_3 نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$w_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad w_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad w_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۲- بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه لافل یک نقطه‌ی c در بازه‌ی (a, b) وجود دارد به طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

فرضیات مسئله در قضیه‌ی مقدار میانگین صادق می‌باشد. برای اثبات حکم حالت خاصی از قضیه را مدنظر قرار می‌دهیم یعنی با فرض $x \in (a, b)$ ، در صورت قضیه به جای b ، متغیر x را قرار می‌دهیم. پس

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$

اما بنابر فرض مسئله، به ازای هر نقطه در (a, b) ، $f'(c) = 1$ می‌باشد یعنی

$$f(x) - f(a) = x - a \Rightarrow f(x) = x - a + f(a)$$

۳-الف)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{\sqrt[3]{x} du}{\sqrt{u+1}} \stackrel{(2)}{=} \int \frac{\sqrt[3]{v} dv}{v+1}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \int (\sqrt[3]{v} - v + 1) \frac{1}{v+1} dv = \int \left(\frac{\sqrt[3]{v}^3}{v} - \frac{v^3}{v} + v - \ln(v+1) \right) dv = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^{2/3} - \ln(x^{1/3} + 1)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر زیر استفاده کردیم:

$$u = \sqrt[3]{x} \rightarrow du = \frac{1}{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}^2} \rightarrow 3\sqrt[3]{x} du = \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \rightarrow \sqrt[3]{x} du = \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

و در تساوی (۲) تغییر متغیر $du = 3v dv$ و $u = v^3$ به کار برده شد و برای تساوی (۳) عبارت v^3 را بر $(v+1)$ تقسیم نموده‌ایم.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3 + \Delta \cos x}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{3 + \Delta \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{2}}}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx}{2(2 - \tan^2 \frac{x}{2})} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{4 - u^2} \quad (ب)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u} \right) du = \frac{1}{4} (\ln(2+u) - \ln(2-u)) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} (\ln 2 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 2) = \frac{\ln 2}{4}$$

$$\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

۴- با تغییر متغیر $u = \ln x$ داریم:

با توجه به مقدار، فوق انتگرال داده شده همگراست.

$$y = \int_0^x \sqrt{3 + 4 \cos(2t)} dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \times \sqrt{3 + 4 \cos(2x)} - 0 \times \sqrt{3 + 4 \cos(0)} = \sqrt{3 + 4 \cos 2x} \quad 5-$$

$$\text{طول منحنی} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3 + 4 \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} \cos x dx$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sqrt{3} (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - t)) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1 + \tan t} dt \quad 6-$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt \Rightarrow \pi I = \frac{\pi}{4} \ln 2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2(n+1)}}{2(n+1)} \cdot \frac{2n}{(-1)^n 2^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-2n) 2^2}{2(n+1)} \right| = 4$$

بنابراین سری برای $|x| < \frac{1}{4}$ یعنی $|x^2| < \frac{1}{4}$ همگرا می‌باشد. حال همگرایی را برای $x = \pm \frac{1}{4}$ بررسی می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{4}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \times 2^{-2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$$

سری فوق یک سری همگرا می‌باشد. برای $x = -\frac{1}{4}$ نیز با محاسباتی مشابه به همگرایی سری خواهیم رسید پس بازه‌ی

همگرایی $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ می‌باشد.

(الف-۸)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) &= 2 \int_0^1 \ln(1+2x) dx = 2 \int_0^1 \left[x \ln(1+2x) \right]' - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x} dx \\ &= 2 \left[x \ln(1+2x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2x}\right) dx = 2 \left[x \ln(1+2x) \right]_0^1 - \left(x - \frac{1}{2} \ln(1+2x) \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left[\ln 3 - \left(1 - \frac{1}{2} \ln 3\right) \right] = 2 \left[\frac{3}{2} \ln 3 - 1 \right] = 3 \ln 3 - 2 \end{aligned}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر زیر استفاده کرده‌ایم:

$$u = \ln(1+2x) \Rightarrow du = \frac{2}{1+2x} dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

(ب) با در نظر گرفتن $y(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}$ داریم:

$$\begin{aligned} \ln y(x) &= \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^\epsilon} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^\epsilon} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\epsilon x^\epsilon \sin x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\epsilon x \sin x + \epsilon x^\epsilon \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\epsilon (x \sin x + \epsilon x^\epsilon \cos x)} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\epsilon \cos x + \epsilon \cos x - \epsilon x \sin x} = -\frac{1}{\epsilon} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) &= -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow 0} y(x)) = -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = e^{-\frac{1}{\epsilon}} \end{aligned}$$



ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

سؤال در صفحه ۳

-۱

$$z = \frac{-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}}{-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \times \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

اگر فرض کنیم $z = \cos \theta + i \sin \theta$ آنگاه $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. لذا بنا به صورت مسئله n باید طوری باشد که $\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{-n\pi}{6} = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 $\Rightarrow n = -6k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

بنابراین به ازای n هایی مانند $0, \pm 6, \pm 12, \dots$ z^n عددی حقیقی می باشد.

۲- الف) $f(x) = xe^x - 2$ را به عنوان تابعی پیوسته از $[0, 1]$ به \mathbb{R} معرفی می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 0 \times e^0 - 2 = -2 \Rightarrow f(0) < 0 \\ f(1) = 1 \times e^1 - 2 = e - 2 \Rightarrow f(1) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, 1), f(c) = 0 \Rightarrow ce^c - 2 = 0 \Rightarrow ce^c = 2$$

پس معادله $xe^x = 2$ در بازه $[0, 1]$ حداقل دارای یک ریشه می باشد.
 حال برای اثبات یکتایی ریشه از برهان خلف استفاده می نمایم. یعنی فرض می کنیم x_1 و x_2 متعلق به $[0, 1]$ دو ریشه ی متمایز معادله باشند، یعنی $f(x_1) = f(x_2) = 0$. تابع $f(x)$ روی $[x_1, x_2]$ پیوسته و روی (x_1, x_2) مشتق پذیر است. بنابر قضیه ی رول خواهیم داشت:

$$\exists t \in (x_1, x_2) : f'(t) = 0 \Rightarrow e^t + te^t = 0 \Rightarrow e^t(1+t) = 0 \xrightarrow{e^t \neq 0} 1+t = 0 \Rightarrow t = -1$$

که این متناقض با مثبت بودن x_1 و x_2 می باشد. پس $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ فقط یک ریشه دارد.

ب) می دانیم که بسط مکلوورن $\frac{1}{1-x}$ برای $|x| < 1$ عبارت است از $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در x خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$$



۳- الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^r} \tan t^r dt}{x^r} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r x^{r-1} \tan((x^r)^r) \cdot r x^r \times \tan(0^r)}{r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^r}{r x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r}{r x^r} = \frac{1}{r}$$

ب)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(n+1)^r} + \frac{n}{(n+2)^r} + \dots + \frac{n}{(rn)^r} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n^r}{(n+i)^r} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \right)^r \right) \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^r} = \left. \frac{-1}{1+x} \right|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

در تساوی (۱) از تقریب $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$ که $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ و $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^r$ استفاده نموده‌ایم.

نموده‌ایم.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{u^r \times r u^{r-1} du}{1+u^r} \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 \frac{u^r}{1+u^r} du = \int_0^1 \left(u^r - u^r + u^r - 1 + \frac{1}{1+u^r} \right) du =$$

۴- الف)

$$= \int_0^1 \left[\frac{u^r}{r} - \frac{u^r}{r} + \frac{u^r}{r} - u + \arctan u \right] du = \int_0^1 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - 1 + \frac{\pi}{4} \right] du = \frac{3\pi}{4} - \frac{15}{4}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $dx = r u^{r-1} du$ و $x = u^r$ در تساوی (۲) عبارت u^r را بر $(1+u^r)$ تقسیم نموده‌ایم.

ب)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}} &= \int \frac{dx}{x - \sqrt{(x+1)^2 + 3}} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{du}{u-1 - \sqrt{u^2 + 3}} \stackrel{(2)}{=} \int \frac{t^2 + 3}{2t^2 + 2t^2} dt \stackrel{(3)}{=} \\ &= \int \left(\frac{3}{2t^2} - \frac{3}{2t} + \frac{3}{t+1} \right) dt = -\frac{3}{2t} - \frac{3}{2} \ln(t) + 3 \ln(t+1) = \\ &= -\frac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} - \frac{3}{2} \ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1) + 3 \ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) \end{aligned}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $du = dx$ و $u = x+1$ استفاده نموده و در تساوی (۲) از تغییر متغیر زیر استفاده

نموده‌ایم:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{3+u^2} - u \Rightarrow t^2 = 3+u^2 - 2u\sqrt{3+u^2} + u^2 = 3+2u(\underbrace{u - \sqrt{3+u^2}}_{-t}) \\ \Rightarrow \frac{t^2 - 3}{-2t} = u &\Rightarrow \frac{-2t^2 + 2t^2 - 3}{-2t} dt = du \Rightarrow \frac{t^2 + 3}{2t^2} dt = du \end{aligned}$$

در تساوی (۳) نیز کسر $\frac{t^2+3}{2t^2+2t}$ را تجزیه نموده و در تساوی (۴) تغییر متغیرهای صورت گرفته را به حالت نخست برگردانیم.

(ج)

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}} = \int \frac{dx}{\frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} - 1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \int \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) dx}{2(\tan \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{x}{2})} \stackrel{(۱)}{=} \int \frac{du}{u + u^2} \stackrel{(۲)}{=} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \ln u - \ln(1+u)$$

$$= \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \ln\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $u = \tan \frac{x}{2}$ استفاده نموده و در (۲) عبارت $\frac{1}{u+u^2}$ را تجزیه نموده ایم.

۵- الف) برای بررسی همگرایی یا واگرایی $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ از آزمون همگرایی کمک می‌گیریم. پس داریم:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

با توجه به نامساوی بالا، چون می‌دانیم سری‌هایی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا هستند، پس سری بزرگتر همگرا است و در نتیجه سری کوچکتر هم همگرا است.

(ب)

$$\int_1^e \frac{dx}{x^{\frac{5}{4}} \sqrt{\ln x}} = \int_1^e (\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx \stackrel{(۱)}{=} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{\frac{5}{4} u^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{4}} \Big|_0^1 = \frac{5}{4}$$

در قسمت (۱) از تغییر متغیر $\ln x = u$ و $\frac{dx}{x} = du$ استفاده شده است.

-۶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{r} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow I = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{r} \left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2} dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)} dx = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{r^2} \left(r^2 + x^2 - 2r + \frac{1}{x^2}\right)} dx$$



$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e \sqrt{x^{\sqrt{e}} + \sqrt{e} + \frac{1}{x^{\sqrt{e}}}} dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{e}}} dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e \left|x + \frac{1}{x}\right| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{x^{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} + \ln|x|\right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^e = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{e^{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} + \ln e - \frac{1}{\sqrt{e}} - \ln \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{e^{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{e^{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} - \frac{3}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} (e^{\sqrt{e}} - 3) \end{aligned}$$

۷- الف)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)}{r^{n+1}(r^n + r)}}{\frac{n}{r^n(r^n - 1)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(r^n - 1)}{r^n(r^n + r)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r^n r + r^n - 1}{r^n r + r^n} \right| = \frac{1}{r} \Rightarrow R \text{ همگرایی} = r \Rightarrow |x - 1| < r \Rightarrow -1 < x < 3 \end{aligned}$$

حال در نقاط کرانه‌ای بحث می‌کنیم:

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-r)^n}{r^n(r^n - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(r^n - 1)}$$

چون حد دنباله‌ی $\frac{(-1)^n n}{r^n - 1}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، در صورتی که n زوج یا فرد باشد مخالف صفر است. پس این سری واگرا است.

$$x = 3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(r^n)}{r^n(r^n - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^n - 1}$$

حد دنباله‌ی $\frac{n}{r^n - 1}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، مخالف صفر است. پس سری واگراست.

ب) چون سری داده شده شرایط قضیه‌ی آزمون انتگرال را داراست، پس با استفاده از این آزمون داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n) \ln(1+n)} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x) \ln(1+x)} = \ln(\ln(1+x)) \Big|_1^{\infty} = \infty$$

پس سری واگراست.

میان ترم دوم ۸۴-۱۳۸۳

سؤال در صفحه ۴

-۱

$$z = (i+1)i = -1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

$$z^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right)$$

n را باید طوری بیابیم که قسمت حقیقی عبارت فوق صفر گردد یعنی

$$\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3n\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow n = \frac{4}{3}k + \frac{2}{3} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

به ازای n های فوق z^n و در نتیجه $\sqrt[3]{i}$ موهومی محض خواهد بود.

-۲

$$y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$$

$$y' = (\cos \ln x + \sin \ln x) + x \left(\frac{-\sin \ln x}{x} + \frac{\cos \ln x}{x} \right) = 2 \cos \ln x$$

$$y'' = \frac{-2 \sin \ln x}{x} \Rightarrow \text{تغیر نمودار به سمت پایین می باشد.}$$

$$x^2 y'' - xy' + 2y = x^2 \times \left(\frac{-2 \sin \ln x}{x} \right) - x(2 \cos \ln x) + 2(x(\cos \ln x + \sin \ln x))$$

$$= -2x \sin \ln x - 2x \cos \ln x + 2x \cos \ln x + 2x \sin \ln x = 0$$

-۳

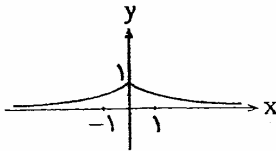
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan(1 - \cos x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 + \tan^2 x)(1 - \cos x) + 2 \tan x \sin x}{\frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left((1 + \arctan x)^{\frac{1}{\arctan x}} \right)^{\frac{\arctan x}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arctan x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x}} = e$$

برای پیوسته بودن $f(x)$ باید مقادیر حد چپ و حد راست و مقدار تابع در نقطه $x = 0$ با هم برابر باشند پس

$$B = 0, \quad A = -e$$



-۴

برای تعیین نقاط عطف مشتق دوم تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

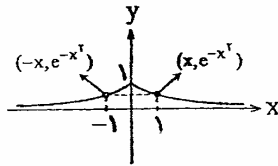
$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نقاط عطف:

از روی شکل مشاهده می‌کنید که تابع یک اکستریم نسبی در نقطه‌ی $(0, 1)$ دارد. حال اگر مستطیلی روی محور x ‌ها قرار گیرد مساحت مستطیل برابر است با $S = 2xe^{-x^2}$. زیرا مستطیل در دو نقطه‌ی (x, e^{-x^2}) و $(-x, e^{-x^2})$ تابع را قطع می‌کند. پس عرض مستطیل $2x$ و طول آن e^{-x^2} است.



$$\Rightarrow S'_x = 2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = 0 \Rightarrow 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

پس به ازای $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود. در نتیجه مستطیل در دو نقطه‌ی $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ و

$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ تابع را قطع می‌کند که این نقاط، همان نقاط عطف منحنی هستند.

(۵- الف)

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{du}{u^2 + u^4} = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{1+u^2} \right) du = \frac{-1}{u} - \text{Arc tan } u$$

$$= \frac{-1}{\sin x} - \text{Arc tan}(\sin x)$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $u = \sin x$ و $du = \cos x dx$ استفاده نموده‌ایم.

(ب)

$$\int (\sqrt{x+1}) \arctan x dx \stackrel{(1)}{=} (x^{\frac{1}{2}} + x) \arctan x - \int \frac{x^{\frac{1}{2}} + x}{1+x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + x) \arctan x - \int \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1 - 1 + x}{1+x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^{\gamma} + x) \arctan x - \int \left(1 + \frac{x-1}{x^{\gamma}+1}\right) dx \\
 &= (x^{\gamma} + x) \arctan x - x + \frac{xdx}{x^{\gamma}+1} - \int \frac{dx}{x^{\gamma}+1} \\
 &= (x^{\gamma} + x) \arctan x - x + \frac{1}{\gamma} \ln(x^{\gamma} + 1) - \arctan x
 \end{aligned}$$

در تساوی (۱) از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $du = (\gamma x + 1)dx$ و $u = \arctan x$ استفاده نموده‌ایم.



ترم اول ۸۱-۱۳۸۰

سؤال در صفحه ۵

۱- با توجه به اینکه ریشه‌ی عبارت $1+iz$ ، عدد مختلط i می‌باشد و i ریشه‌ی معادله‌ی داده شده نیست ($z \neq i$) می‌توانیم $(1+iz)$ را در دو طرف معادله مسأله ضرب کنیم.

$$(1+iz)(z^5 + iz^4 - z^3 - iz^2 + 1) = 0 \Rightarrow z^5 + iz^4 - z^3 - iz^2 + 1 + iz^6 + iz^5 - z^4 - iz^3 + z^2 + iz = 0$$

$$\Rightarrow 1 + iz^5 = 0 \Rightarrow iz^5 = -1 \xrightarrow{-ix} z^5 = i$$

پس جواب‌های معادله، کلیه ریشه‌های پنجم i ، به جز خود i ($z \neq i$) هستند. در نتیجه

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{Yk\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{Yk\pi}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

بنابراین ریشه‌های معادله‌ی اصلی عبارتند از

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{Yk\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{Yk\pi}{5}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

۲- قضیه: اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در بازه باز (a, b) مشتق پذیر و به علاوه $f(a) = f(b) = 0$ باشد، آنگاه حداقل یک نقطه مانند c ، $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c) = 0$.

برهان: برای اثبات، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) به ازای همه مقادیر x داشته باشیم $f(x) = 0$.

در این حالت $f'(x) = 0$ و بنابراین c می‌تواند هر یک از اعداد بین a و b را اختیار کند.

حالت دوم) $f(x)$ در بعضی نقاط (a, b) غیر صفر است.

در این حالت چون f روی $[a, b]$ پیوسته است، این تابع روی این بازه اکسترمم مطلق دارد. از این که $f(a) = f(b) = 0$ و f در بعضی نقاط بازه (a, b) غیر صفر است، نتیجه می‌گیریم که f در نقطه‌ای مانند $c_1 \in (a, b)$ دارای یک ماکسیمم مطلق مثبت یا در نقطه‌ای مانند $c_2 \in (a, b)$ دارای یک مینیمم مطلق منفی است و با هر دو. بنابراین f روی بازه باز (a, b) در نقطه‌ای مانند $c = c_1$ یا $c = c_2$ اکسترمم مطلق و در نتیجه اکسترمم نسبی دارد و چون $f'(c) = 0$ موجود است، پس داریم $f'(c) = 0$.

۳- در نقطه‌ی $x_0 = \frac{1}{5}$ چون $x_0 \in \mathbb{Q}$ ، مقدار تابع عبارت است از

$$f(x_0) = x_0 = \frac{1}{5}$$

و مقدار حدود چپ و راست تابع $f(x)$ که از ضابطه‌ی $x_0 \notin \mathbb{Q}$ یعنی $x_0 = \frac{1}{5}$ محاسبه می‌شود برابر مقدار

تابع می‌باشد. بنابراین $f(x)$ در نقطه‌ی $\frac{1}{5}$ پیوسته می‌باشد. اما چون به ازای تمامی نقاط دیگر حقیقی این مقادیر یعنی

مقدار تابع و حدود چپ و راست با هم برابر نخواهند بود، تابع ناپیوسته می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x} \cos x dx$$

۴-الف)

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال زیر را حل می‌نماییم.

$$A = \int e^{-x} \cos x dx \stackrel{(1)}{=} -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \stackrel{(2)}{=} -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \underbrace{\int e^{-x} \cos x dx}_A$$

$$\Rightarrow 2A = e^{-x} (\sin x - \cos x) \Rightarrow A = \frac{-e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x)$$

در تساوی (۱) از قاعده جزء به جزء با فرض $dv = \cos x dx$ و $u = e^{-x}$ و در تساوی (۲) از قاعده جزء به جزء با فرض $dv = \sin x dx$ و $u = e^{-x}$ استفاده نمودیم. حال انتگرال اصلی مسئله را با استفاده از قاعده جزء به جزء و فرض $u = x$ و $e^{-x} \cos x dx = dv$ حل می‌کنیم:

$$I = \int x e^{-x} \cos x dx = x \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \int e^{-x} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= x \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{-x} \sin x dx}_B + \frac{1}{2} \underbrace{\int e^{-x} \cos x dx}_A$$

$$B = \int e^{-x} \sin x dx \stackrel{(3)}{=} -e^{-x} \sin x + \underbrace{\int e^{-x} \cos x dx}_A \stackrel{(4)}{=} -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x)$$

در تساوی (۳) از قاعده جزء به جزء با فرض $dv = \sin x dx$ و $u = e^{-x}$ استفاده نموده و در (۴) مقدار انتگرال A را جایگذاری و خلاصه نویسی نمودیم. پس

$$I = x \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^{-x}}{4} (\sin x + \cos x) + \frac{e^{-x}}{4} (\sin x - \cos x)$$

$$= (x+1) \frac{e^{-x}}{2} \sin x - \frac{x e^{-x}}{2} \cos x$$

حال مقدار I از صفر تا ∞ را محاسبه می‌کنیم که با توجه به مقدار فوق برابر صفر خواهد بود.

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int \frac{dx}{a^2 \frac{1}{1+\tan^2 x} + b^2 \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} \quad (ب)$$

$$= \int \frac{(1+\tan^2 x) dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 u^2}$$

$$= \frac{a}{ba^2} \int \frac{\frac{b}{a} du}{1 + \left(\frac{bu}{a}\right)^2} = \frac{1}{ba} \text{Arctan}\left(\frac{bu}{a}\right) = \frac{\text{Arctan}\left(\frac{b \tan x}{a}\right)}{ab}$$

در تساوی (۱) از تغییر متغیر $du = (1 + \tan^2 x) dx$ و $u = \tan x$ استفاده نمودیم.



ج

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^{\gamma}(x^{\gamma}+1)} \stackrel{(1)}{=} \int \left(\frac{\frac{1}{\gamma}}{(x-1)^{\gamma}} - \frac{\frac{1}{\gamma}}{x^{\gamma}+1} \right) dx = \frac{1}{\gamma} \left[\int \frac{dx}{(x-1)^{\gamma}} - \int \frac{dx}{1+x^{\gamma}} \right]$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{-1}{x-1} - \text{Arc tan } x \right]$$

در تساوی (۱) عبارت $\frac{x}{(x-1)^{\gamma}(x^{\gamma}+1)}$ را تجزیه نمودیم.

د

$$\int \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) dx \stackrel{(1)}{=} x \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}(\gamma+x)}$$

$$\stackrel{(2)}{=} x \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) - \frac{1}{\gamma} \int \frac{(u^{\gamma}-1)u du}{u(\gamma+u^{\gamma}-1)} = x \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) - \frac{1}{\gamma} \int \left(\gamma - \frac{\gamma}{u^{\gamma}+1} \right) du$$

$$= x \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) - u + \gamma \text{Arc tan } u = x \text{Arc tan}(\sqrt{x+1}) - \sqrt{x+1} + \gamma \text{Arc tan}(\sqrt{x+1})$$

در تساوی (۱) از قاعده‌ی جزء به جزء با فرض $dv = dx$ و $u = \text{Arc tan}(\sqrt{x+1})$ استفاده نمودیم که در آن $v = x$

و $du = \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} dx}{1+(\sqrt{x+1})^{\gamma}}$ می‌باشد. در تساوی (۲) نیز از تغییر متغیر $u^{\gamma} = x+1$ که $\gamma u du = dx$ استفاده نمودیم.

-۵

$$y = f(x) = \int \sqrt{\cosh t} dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\cosh x}$$

$$l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\gamma}} dx = \int \sqrt{1 + \cosh^{\gamma} x} dx = \int \sqrt{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{\gamma}} dx = \int \sqrt{\frac{(e^{\frac{x}{\gamma}} + e^{-\frac{x}{\gamma}})^{\gamma}}{\gamma}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int (e^{\frac{x}{\gamma}} + e^{-\frac{x}{\gamma}}) dx = \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma} (\gamma e^{\frac{x}{\gamma}} - \gamma e^{-\frac{x}{\gamma}}) \Big|_0^{\ln \gamma} = \sqrt{\gamma} \left(\sqrt{\gamma} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - 1 + 1 \right) = 1$$

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \gamma + \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin \theta d\theta \\ dy = \cos \theta d\theta \end{cases} \Rightarrow dS^{\gamma} = dx^{\gamma} + dy^{\gamma} = \sin^{\gamma} \theta d\theta^{\gamma} + \cos^{\gamma} \theta d\theta^{\gamma} = d\theta^{\gamma}$$

-۶

$$\Rightarrow dS = d\theta \Rightarrow S = \gamma \pi \int y dS = \gamma \pi \int (\gamma + \sin \theta) d\theta = \gamma \pi (\gamma \theta - \cos \theta) \Big|_0^{\gamma \pi}$$

$$= \gamma \pi (\gamma \pi - 1 + 1) = \gamma \pi^{\gamma}$$

۷- الف) با در نظر گرفتن $y = x^{\frac{1}{\ln \gamma x}}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln \gamma x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln y(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{\ln \sqrt[x]{x}} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[x]{x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(y(x))) = 1$$

$$\Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = e$$

(ب)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{kn}{(ki)^r + n^r} \right) \right] &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^r} \left(\frac{kn}{(ki)^r + n^r} \right) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{k}{k^r \left(\frac{i}{n}\right)^r + 1} \right) \right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 \frac{dx}{kx^r + 1} \right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{rk} \ln(kx^r + 1) \right]_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(k+1)}{rk} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r(k+1)} = 0 \end{aligned}$$

۸- با استفاده از آزمون مقایسه داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=r}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^r} &\Rightarrow \sum_{n=r}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^r}\right)^{n^r} < \sum_{n=r}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^r} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^r}\right)^{n^r} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

از آنجا که سری کوچکتر واگراست (زیرا حدود دنباله‌ی آن مخالف صفر است)، پس سری بزرگتر هم واگراست.



ترم دوم ۸۰-۱۳۷۹

سؤال در صفحه ۶

-۱

$$z^6 - \sqrt{3}z^3 - \lambda = 0 \Rightarrow (z^3 + 1)(z^3 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^3 = -1 \\ z^3 = \lambda \end{cases}$$

$$-1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi) \Rightarrow z = \cos\left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3} + \pi\right), \quad k=0, 1, 2$$

$$\lambda = \lambda(\cos(0) + i \sin(0)) \Rightarrow z = \sqrt[3]{\lambda} \left(\cos\left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3}\right) \right), \quad k=0, 1, 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}; \quad \begin{cases} z_4 = \sqrt[3]{\lambda} \\ z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \dots + z_6) = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2 \dots z_6) = (\sqrt[3]{\lambda})^3 \sin\left(\pi + \left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3} + \pi\right) + \left(\frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3} + \pi\right) + 0 + \frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3} + \frac{\sqrt[3]{\lambda}\pi}{3}\right) = \lambda \sin 4\pi = 0$$

در تساوی فوق از رابطه‌ی زیر استفاده نموده‌ایم:

$$z_j = |z_j|(\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j)) \quad j=1, \dots, n$$

$$\prod_{j=1}^n z_j = |z_1| \dots |z_n| (\cos(\theta_1 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \dots + \theta_n))$$

۲- الف) اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر باشند، آنگاه حداقل یک نقطه‌ی c در بازه‌ی باز (a, b)

وجود دارد به طوری که:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

ب)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^r$$

$$\xrightarrow{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y|$$

از طرفین نامساوی فوق حدگیری می‌کنیم و λ را به سمت x میل می‌دهیم:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \lim_{y \rightarrow x} |x - y| \Rightarrow |f'(x)| \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

چون x اختیاری است پس f تابعی ثابت می‌باشد، زیرا مشتق آن به ازای هر x متعلق به \mathbb{R} ، صفر می‌گردد.

۳- الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r e^x}{x^r - 1} \int_1^{x^r} \frac{\sin(\frac{\pi}{r} t)}{t} dt \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(r x e^x + x^r e^x) \int_1^{x^r} \frac{\sin(\frac{\pi}{r} t)}{t} dt + x^r e^x (r x \frac{\sin(\frac{\pi}{r} x^r)}{x^r} - \dots)}{r x^r}$$

$$= \frac{0 + e(r x \frac{\sqrt{r}}{r})}{r \times 1} = \frac{\sqrt{r}}{r} e$$

ب)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-r} \left[e^{\frac{1}{n^r}} + r e^{\frac{1}{n^r}} + r e^{\frac{1}{n^r}} + \dots + n e \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^{-r} \sum_{i=1}^n i e^{\frac{i}{n^r}} \right] = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} e^{(\frac{i}{n})^r} \right)$$

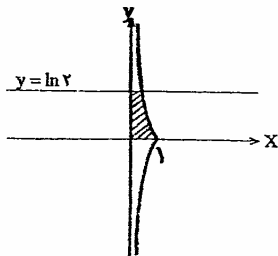
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \int_0^1 x e^{x^r} dx = 0 \times \text{عدد ثابت} = 0$$

-۴

$$a x^r = r y^r \Rightarrow x^r = \frac{r}{a} y^r \Rightarrow x = \pm \frac{r}{a} y^{\frac{r}{r}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{r}{a} \times \frac{r}{r} y^{\frac{1}{r}} = \pm y^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = y$$

$$\Rightarrow \ell = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^r} dy = \int_0^r \sqrt{1 + y} dy = \frac{r}{r} (1 + y)^{\frac{r}{r}} \Big|_0^r = \frac{r}{r} (\lambda - 1) = \frac{1}{r}$$



$$V = \pi \int_0^{\ln 2} (\text{sech}^r y - 1)^r dy$$

۵- از روش برشی داریم:

$$= \pi \int_0^{\ln 2} (\text{sech}^r y - 1) dy$$

$$= \pi (\tanh y - 2A \text{rcsin}(\tanh y) + y) \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \pi \left(\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} - 2 \text{Arcsin}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{3}}\right) + \ln 2 - 0 \right)$$

$$= \frac{\Delta}{r} + \ln 2 - 2A \text{rcsin}\left(\frac{\Delta}{r}\right)$$



۶- الف)

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x + \gamma \sin x}{\gamma \sin x + \gamma \cos x} dx &= \int \frac{1 + \gamma \tan x}{\gamma \tan x + \gamma} dx \stackrel{(1)}{=} \int \frac{1 + \gamma u}{\gamma u + \gamma} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \int \frac{1 + \gamma u}{(1 + u^2)(\gamma u + \gamma)} du \stackrel{(2)}{=} \int \left[\frac{1}{\gamma} \frac{(u + \gamma)}{1 + u^2} - \frac{\gamma}{\gamma u + \gamma} \right] du \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\int \frac{u}{1 + u^2} du + \gamma \int \frac{du}{1 + u^2} - \int \frac{\gamma du}{\gamma u + \gamma} \right) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + \gamma \operatorname{Arctan} u - \ln(\gamma u + \gamma) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \tan^2 x) + \frac{\gamma}{\gamma} x - \ln(\gamma \tan x + \gamma) \end{aligned}$$

در تساوی (۱) صورت و مخرج کسر را بر $\cos x$ تقسیم نمودیم. در تساوی (۲) نیز از تغییر متغیر $\frac{du}{1+u^2} = dx$

و $u = \tan x$ استفاده کردیم. در تساوی (۳) هم، کسر انتگرال را تجزیه نمودیم.

ب)

$$I = \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} \left[(\cos x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \ln(x^\gamma) \right] dx = \underbrace{\int_{-\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} \cos x (\ln(1+x) - \ln(1-x)) dx}_A + \underbrace{\int_{-\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} \ln(x^\gamma) dx}_B$$

از آنجا که تابع تحت انتگرال A یک تابع فرد بوده و بازه متقارن می‌باشد، $A = 0$.

$$\begin{aligned} \cos(-x) (\ln(1-x) - \ln(1-(-x))) &= \cos x (\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\ &= -\cos x (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

اما مقدار انتگرال B را با قاعده جزء به جزء و فرض اینکه $dv = dx$ ، $u = \ln x^\gamma$ ، $v = x$ و $du = \frac{\gamma}{x} dx$ محاسبه می‌نمائیم.

$$B = x \ln x^\gamma \Big|_{-\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} - \int_{-\frac{1}{\gamma}}^{\frac{1}{\gamma}} \gamma dx = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) - \gamma = \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) - \gamma$$

$$I = \ln \left(\frac{1}{\gamma} \right) - \gamma = -\gamma \ln(\gamma) - \gamma$$

پس مقدار انتگرال مسأله برابر است با

-۷

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

از آنجا که سری داده شده یک سری متناوب است و $a_n = \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right)$ نزولی می‌باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، پس سری

مذکور همگراست.



-۸

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

دامنه همگرایی هر یک از سری‌ها را محاسبه می‌کنیم. پس برای سری اول داریم:

$$\ln x > 1 \Rightarrow x > e$$

نکته: طبق قضایا داریم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ برای $p > 1$ همگرا هستند.

حال برای سری دوم می‌نویسیم:

$$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 \Rightarrow R_{\text{همگرایی}} = \infty$$

پس سری دوم در کل \mathbb{R} همگراست. حال با اشتراک‌گیری از دو بازه به بازه‌ی همگرایی سری مورد نظر در صورت

سؤال می‌رسیم. پس داریم:

$$x \in \{(e, +\infty) \cap \mathbb{R}\} \Rightarrow x \in (e, +\infty)$$



ترم دوم ۱۳۷۸-۷۹

سؤال در صفحه ۷

۱- با فرض $z = a + ib$ و $w = c + id$ و از اینکه $|z| = |w| = 1$ نتیجه می‌شود.

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$$

(۱) حال مقادیر $|z-w|$ و $|1-\bar{z}w|$ را محاسبه می‌کنیم. برای آنکه حکم مسئله برقرار باشد باید این مقادیر برابر باشند:

$$z-w = (a-c) + i(b-d) \Rightarrow |z-w| = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd} = \sqrt{2 - 2(ac+bd)}$$

$$1-\bar{z}w = 1-(a-ib)(c+id) = 1-ac+bd+i(ad-bc) \Rightarrow$$

$$|1-\bar{z}w| = \sqrt{1-2(ac+bd) + (ac+bd)^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{1-2(ac+bd) + a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{1-2(ac+bd) + a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)} = \sqrt{2-2(ac+bd)} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که حکم برقرار است:

$$|z-w| = |1-\bar{z}w| \Rightarrow \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$$

۲- قضیه: اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشد، آنگاه حداقل یک نقطه c در بازه (a, b) وجود دارد به طوری که:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

برهان: قرار می‌دهیم:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x$$

که در آن $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. تابع $\varphi(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته است و داریم:

$$\varphi(a) = f(a) - \lambda a = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\varphi(b) = f(b) - \lambda b = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

چون $\varphi(x)$ بر روی بازه (a, b) مشتق پذیر است. بنابر قضیه‌ی رول، حداقل نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $\varphi'(c) = 0$ از طرفی

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

اکنون اگر $x = c$ را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

برای قسمت دوم فرض کنیم:

$$f: [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (1+x^2)A \operatorname{arctan} x$$

۷- الف) از آنجا که سری داده شده در آزمون انتگرال صدق می‌کند پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\gamma}} &= \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\gamma}} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\gamma}} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^{\infty} - \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} \\ &= -\left(\frac{\ln x + 1}{x}\right) \Big|_1^{\infty} = -\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{x} - \ln \gamma\right) = -\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \ln \gamma\right) \\ &= -(-\ln \gamma) = \ln \gamma \end{aligned}$$

پس سری داده شده همگرا است. در قسمت (ب) با روش جزء به جزء از فرض $u = \ln x$ و $\frac{dx}{x} = dv$ استفاده نموده‌ایم.

ب) از آنجا که سری داده شده در شرایط آزمون انتگرال صدق می‌کند، پس داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)} \\ &= \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(1+x) \right] \Big|_1^{\infty} = \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + \ln(1+x) \right] \Big|_1^{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + \ln(1+x) \right] - \gamma \ln \gamma = e + \infty - \gamma \ln \gamma = \infty \end{aligned}$$

پس سری واگراست.

-۸

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n^{\gamma} - n + 1} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^{\gamma} - (n+1) + 1}}{\frac{1}{n^{\gamma} - n + 1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{n^{\gamma} + \gamma n + 1 - n - 1 + 1}{n^{\gamma} - n + 1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{n^{\gamma} + n + 1}{n^{\gamma} - n + 1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^{\gamma} - n + 1}{n^{\gamma} + n + 1} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$R \text{ همگرایی} = 1 \Rightarrow |e^x| < 1 \Rightarrow 0 < e^x < 1 \Rightarrow -\infty < x < 1$$

در مورد نقطه‌ی مرزی ۱ بحث می‌کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{\gamma} - n + 1}$$

از آنجا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^{\gamma} - n + 1} = \infty$ پس سری واگراست. در نتیجه بازه‌ی همگرایی $x \in (-\infty, 1)$ است.